TD 22 : Dimension finie

► Dimension d'un espace vectoriel, sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 22.1 Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer la dimension. F

1. $F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y = 0\}$
2. $F_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases}\right\}$
3. $F_3 = \{P \in \mathbf{R}_2[X] \mid (X-1)P' - XP'' = 2P\}$
4. $F_4 = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \mid MN = NM\}$ où $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ avec λ_1, λ_2 deux réels fixés distincts.
5. $F_5 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$

Exercice 22.2 Soient $a, b \in \mathbf{C}$, $a \neq b$. Montrer que la famille $(X-a)^k(X-b)^{n-k}, 0 \leqslant k \leqslant n$ est une base de $\mathbf{C}_n[X]$. F

Exercice 22.3 Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'ensemble des suites p-périodiques (c'est-à-dire des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+p} = u_n$) est un espace vectoriel, et en déterminer la dimension. PD

Exercice 22.4 Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$. Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ est une famille libre. F

Exercice 22.5 Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note $u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$. Montrer que $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$. PD

Exercice 22.6 Soient $a, b, c \in \mathbf{R}$. Montrer que la famille $f_a : x \mapsto \sin(x+a)$, $f_b : x \mapsto \sin(x+b)$, $f_c : x \mapsto \sin(x+c)$ est liée dans $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. PD

Exercice 22.7 Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $k \in [\![0, n]\!]$. On pose $f_k : x \mapsto \cos^k x$ et $g_k : x \mapsto \cos(kx)$. AD

1. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ et $(g_0, \dots, g_n)$ sont deux familles libres de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
2. Soit $F_n = \operatorname{Vect}(f_0, \dots, f_n)$ et $G_n = \operatorname{Vect}(g_0, \dots, g_n)$. Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $f_k \in G_n$.
3. Montrer que $F_n = G_n$.

Exercice 22.8 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F_1, F_2, F_3 des sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont simultanément vérifiées : PD

i) $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3$ ii) $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$ iii) $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{0_E\}$

Exercice 22.9 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie, tels que $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$. F

Exercice 22.10 Montrer, **sans analyse-synthèse** que F et G sont supplémentaires dans E dans les deux cas suivants : PD

1. $E = \mathbf{R}^4$, $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2z + t = 0 \text{ et } 2y + 3z - t = 0\}$, $G = \operatorname{Vect}((1,1,1,1), (1,-1,1,1))$
2. $E = \mathbf{R}_3[X]$, $F = \left\{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2P(X)\right\}$, $G = \{P \in \mathbf{R}_3[X] \mid P(0) = P(2)\}$

Exercice 22.11 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \sum_{i=1}^{p} F_i$. Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels $G_1, \dots, G_p$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} G_i$ et $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $G_i \subset F_i$. D

► Applications linéaires

Exercice 22.12 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit f un automorphisme de E. AD

Montrer qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda_0, \dots, \lambda_p \in \mathbf{K}$ tels que $f^{-1} = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i f^i$.

Exercice 22.13 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. AD

1. On suppose que f est nilpotent, d'indice de nilpotence p (c'est-à-dire tel que $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$). On souhaite prouver que $p \leqslant n$.
   (a) Justifier qu'il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.
   (b) Montrer qu'alors la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
   (c) Conclure.
2. On suppose à présent que pour tout $x \in E$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $f^p(x) = 0_E$. Montrer que f est nilpotent. Donner un exemple d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension infinie pour lequel ce résultat est faux.

► Théorème du rang et conséquences

Exercice 22.14 Soient $(a_1, \dots, a_n)$ des éléments distincts de $\mathbf{K}$. Montrer que $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme. Connaissez-vous sa bijection réciproque ? PD

Exercice 22.15 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g = \dim E$. Montrer que f et g sont deux projecteurs. AD

Exercice 22.16 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, f$ si et seulement si n est pair. AD

Exercice 22.17 On note $\mathscr{T}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, et $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer qu'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathscr{T}_n(\mathbf{K}) \to \mathscr{S}_n(\mathbf{K})$. PD

Exercice 22.18 Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. PD
Montrer que $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ u & \longmapsto & (u(e_1), \dots, u(e_n)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme, et retrouver la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$.

Exercice 22.19 PD

1. Pour $n \geqslant 2$, on pose $\varphi_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P + P(0)X + XP'' \end{array} \right.$. Montrer que φ_n est un isomorphisme.
2. En déduire que $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + P(0)X + XP'' \end{array} \right.$ est un isomorphisme.
3. Les endomorphismes $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP(X) \end{array} \right.$ et $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'' \end{array} \right.$ sont-ils injectifs ? Surjectifs ?

Exercice 22.20 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que u est nilpotent, et que $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = 1$. Montrer que pour tout $k \leqslant n$, on a $\dim(\mathrm{Ker}\, u^k) = k$. D

Exercice 22.21 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient u, v deux endomorphismes de E tels que $E = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Ker}(v)$. AD
Prouver que $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont supplémentaires dans E, et que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont supplémentaires dans E.

Exercice 22.22 Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E. D
En considérant $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n & \longrightarrow & F_1 + \cdots + F_n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & x_1 + \cdots + x_n \end{array} \right.$, retrouver le résultat suivant : la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si $\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dim F_i$.

Exercice 22.23 AD

1. Soit E un espace vectoriel de dimensions finie, et soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que
$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u + v$ bijectif.
Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim E$.

Exercice 22.24 **Inégalité de Sylvester (Oral X)** TD
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, u et v deux endomorphismes de E.

1. Comparer $\mathrm{rg}(u+v)$ à $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ et $\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)$.
2. Prouver que $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v = \{0_E\}$ **et** $\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v = E)$.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leqslant \mathrm{rg}(uv) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

► Hyperplans et formes linéaires

Exercice 22.25 Déterminer la dimension de $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et en déterminer un supplémentaire. F

Exercice 22.26 Soit E un espace vectoriel de dimension finie. PD

1. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E, et soit $x \notin \mathrm{Ker}\, \varphi$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, \varphi \oplus \mathrm{Vect}(x)$.
2. Soit H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice 22.27 Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires sur E. On suppose qu'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$. Montrer que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée. AD

Exercice 22.28 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. D

1. Montrer que si F et G sont deux hyperplans de E, ils possèdent un supplémentaire commun.
2. On suppose que $\dim F = \dim G$. Montrer que F et G possèdent un supplémentaire commun.

Exercice 22.29 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. À quelles conditions existe-t-il $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E telles que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$? AD

Exercice 22.30 **Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$** D

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $\operatorname{tr}(AE_{i,j})$ en fonction des coefficients de A.
2. En déduire que si φ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors il existe un unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

Exercice 22.31 **(Oral ENS)** D

Soit p un nombre premier et $n \in \mathbf{N}^*$. Combien y a-t-il d'hyperplans dans un $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel de dimension n ?

Correction des exercices du TD 22

Solution de l'exercice 22.1

1. On a

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = -2y\} = \{(-2y,y,z),\ (y,z) \in \mathbf{R}^2\} = \{y(-2,1,0)+z(0,0,1),\ (y,z) \in \mathbf{R}^2\} = \mathrm{Vect}((-2,1,0),(0,0,1)).$$

Ainsi, la famille $(-2,1,0),(0,0,1)$ est génératrice de F_1. Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires : c'est une base de F_1, qui est donc de dimension 2.

2.

$$\begin{aligned} F_2 &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x+5y-3z=0 \\ -x-4y+2z=0 \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x+5y-3z=0 \\ y=z \end{cases}\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid \begin{cases} x=-2z \\ y=z \end{cases}\right\} \\ &= \{(-2z,z,z),\ z \in \mathbf{R}\} = \{z(-2,1,1),\ z \in \mathbf{R}\} = \mathrm{Vect}(-2,1,1). \end{aligned}$$

La famille $(-2,1,1)$ est donc génératrice de F_2. Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul[1] : c'est donc une base de F_2 et $\dim F_2 = 1$.

[1] Une famille formée d'un seul vecteur est libre... à condition que ce vecteur soit non nul !

3. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbf{R}_2[X]$. Alors $P \in F_3$ si et seulement si

$$(X-1)P' - XP'' = 2P \Leftrightarrow (X-1)(2aX+b) - 2aX = 2aX^2 + 2bX + 2c \Leftrightarrow bX - 4aX - b = 2bX + 2c.$$

Par identification des coefficients, c'est le cas si et seulement si

$$\begin{cases} b-4a=2b \\ -b=2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2a \\ b=-4a \end{cases}$$

Et donc $P \in F_3 \Leftrightarrow P = a(X^2-4X+2)$, de sorte que $F_3 = \mathrm{Vect}(X^2-4X+2)$.
En particulier, F_3 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_2[X]$, de base X^2-4X+2, de sorte que $\dim F_3 = 1$.

Astuce
Si on arrive à écrire un ensemble sous forme d'un Vect, c'est automatiquement un sous-espace vectoriel.

4. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Alors $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_2 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix}$ et $NM = \begin{pmatrix} a\lambda_1 & b\lambda_1 \\ c\lambda_2 & d\lambda_2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $M \in F_4$ si et seulement si

$$\begin{cases} a\lambda_1 = a\lambda_1 \\ b\lambda_1 = b\lambda_2 \\ c\lambda_1 = c\lambda_2 \\ d\lambda_2 = d\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b(\lambda_1-\lambda_2)=0 \\ c(\lambda_1-\lambda_2)=0 \end{cases}$$

Et puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ceci équivaut à $b = c = 0$. Ainsi,

$$F_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, (a,d) \in \mathbf{R}^2\right\} = \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (a,d) \in \mathbf{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Donc F_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$, dont une famille génératrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Puisqu'il s'agit d'une famille de deux vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ non colinéaires, elle est libre, et donc c'est une base de F_4, qui est donc de dimension 2.

5. Il s'agit de noter qu'une matrice de trace nulle s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ddots & & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & m_{n-2,n} \\ \vdots & & \ddots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \dots & \dots & -(m_{1,1}+\dots+m_{n-1,n-1}) \end{pmatrix} = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} m_{i,j}E_{i,j} + \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}(E_{i,i} - E_{n,n})$$

On a alors une famille[2] génératrice, dont on prouve facilement qu'elle est libre.
Et donc c'est une base de F_5, qui est de dimension $n^2 - 1$.

[2] La famille formée des $E_{i,j}$ pour $i \neq j$ et des $E_{i,i} - E_{n,n}$.

Solution de l'exercice 22.2

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des complexes tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (X-a)^i (X-b)^{n-i} = 0_{\mathbf{C}[X]}$.

En évaluant en $X = b$, il vient $\lambda_0 (b-a)^n = 0$. Or $b \neq a$, donc $\lambda_0 = 0$.

Il reste donc $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X-a)^i (X-b)^{n-i} = 0_{\mathbf{C}[X]}$.

En simplifiant[3] par $(X-a)$, il reste

$$\lambda_1 (X-b)^{n-1} + \lambda_2 (X-a)(X-b)^{n-2} + \cdots + \lambda_n (X-b)^n = 0_{\mathbf{C}[X]}.$$

[3] Ce qui est possible car $\mathbf{C}[X]$ est un anneau intègre.

En évaluant en $X = b$, il vient $\lambda_1 (b-a)^{n-1} = 0$, et donc $\lambda_1 = 0$.

Ne reste donc que $\sum_{i=2}^{n} \lambda_i (X-a)^i (X-b)^{n-i} = 0_{\mathbf{C}[X]}$.

De proche en proche, on prouve ainsi que tous les λ_i sont nuls, donc que la famille est libre.
Étant de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{C}_n[X]$, c'est une base de $\mathbf{C}_n[X]$.

Solution de l'exercice 22.3

Notons E l'ensemble des suites p-périodiques. Soient $(u_n)_n$ et (v_n) deux éléments de E, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lambda u_{n+p} + v_{n+p} = \lambda u_n + v_n$, de sorte que $(\lambda u_n + v_n)_n$ est p-périodique.
De plus, la suite nulle est évidemment p-périodique, donc l'ensemble E est bien un sous-espace vectoriel[4] de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

[4] Et donc un espace vectoriel.

L'idée est alors qu'une suite p-périodique $(u_n)_n$ est uniquement déterminée par la donnée de ses p premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$.
Notons pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, $(v_n^{(i)})_n$ la suite p-périodique telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv i \quad [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\left(\left(v_n^{(0)}\right), \left(v_n^{(1)}\right), \dots, \left(v_n^{(p-1)}\right)\right)$ est une famille libre de E.
En effet, soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que

$$\lambda_0 \left(v_n^{(0)}\right) + \lambda_1 \left(v_n^{(1)}\right) + \cdots + \lambda_{p-1} \left(v_n^{(p-1)}\right) = 0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}.$$

Alors pour $i \in [\![0, p-1]\!]$, en prenant $n = i$, on obtient $\lambda_i = 0$.
Commentaires *: si les notations vous perturbent, remarquez que la suite $\lambda_0 (v_n^{(0)}) + \lambda_1 (v_n^{(1)}) + \cdots + \lambda_{p-1} (v_n^{(p-1)})$ est la suite*

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-2}, \lambda_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_0, \lambda_1, \dots)$$

et il est clair que si elle est nulle, alors tous les λ_i sont nuls.

De plus, pour $(u_n)_n \in E$, on a $(u_n) = \sum_{i=0}^{p-1} u_i (v_n^{(i)})$.

Intuition
La valeur de u_0 impose celle de tous les u_{kp}. Celle de u_1 impose celle des u_{kp+1}, etc

En effet, pour $n \in \mathbf{N}$, si on note $n = kp + r$, $0 \leqslant r \leqslant p-1$ la division euclidienne de n par p, alors

$$u_n = u_{kp+r} = u_r = u_r v_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{p-1} u_i \underbrace{v_n^{(i)}}_{=0 \text{ si } i \neq r}.$$

Donc $(u_n) \in \operatorname{Vect}\left((v_n^{(0)}), (v_n^{(1)}), \dots, (v_n^{(p-1)})\right)$, et ainsi, $\left((v_n^{(0)}), (v_n^{(1)}), \dots, (v_n^{(p-1)})\right)$ est une base de E, qui est donc de dimension p.

Solution de l'exercice 22.4

Puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbf{K}^n$, de cardinal $n = \dim \mathbf{K}^n$, c'est une base de $\mathbf{K}^n$, et en particulier une famille libre.

Donc toute sous-famille en est libre, et c'est notamment le cas de $(e_1, \dots, e_{n-1})$.
Remarque *: ceci n'est plus vrai pour une famille génératrice dont le cardinal dépasse la dimension de l'espace ambiant.*
Par exemple $(1,1), (2,2), (1,0)$ *est génératrice de* $\mathbf{R}^2$*, mais la famille formée de ses deux premiers vecteurs n'est pas libre.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.5

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_{\mathbf{R}^n}$.
Soit encore $(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n, \lambda_2 + 2\lambda_3 + \cdots + (n-1)\lambda_n, \dots, \lambda_{n-1} + 2\lambda_n, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.
Il vient alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \cdots + n\lambda_n & = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 + \cdots + (n-1)\lambda_n & = 0 \\ & \vdots \\ \lambda_{n-1} + 2\lambda_n & = 0 \\ \lambda_n & = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls qui a clairement $(0, \dots, 0)$ pour unique solution.
Et donc $(u_1, \dots, u_n)$ est libre. Étant de cardinal $n = \dim \mathbf{R}^n$, c'est une base de $\mathbf{R}^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.6

Notons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sin(x+a) = \sin(x)\cos(a) + \cos(x)\sin(a)$, et donc $f_a \in \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$.
Et de même, $f_b, f_c \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.
Donc (f_a, f_b, f_c) est une famille de trois vecteurs de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$, qui est forcément de dimension au plus[5] 2 puisqu'engendré par deux vecteurs.
Donc nécessairement, (f_a, f_b, f_c), est une famille liée.

[5] Et même en fait exactement deux car il n'est pas très difficile, même si inutile ici, de voir que $(\sin, \cos)$ est une famille libre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.7

1. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$.

Alors en évaluant en $\frac{\pi}{2}$, on a $\lambda_0 = 0$.

Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut diviser par $\cos(x) \neq 0$, et on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos^{k-1}(x) = 0$.

En prenant la limite lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, il vient $\lambda_1 = 0$.
De proche en proche[6], en divisant par $\cos^i(x)$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, puis en prenant la limite lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, on montre que $\lambda_i = 0$.
Donc la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.

[6] Rappelons que c'est un moyen pas très rigoureux de cacher une récurrence.

Montrons par récurrence sur n que $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.
Pour $n = 0$, c'est évident.

Soit n tel que $(g_0, \dots, g_n)$ soit libre, et soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k g_k = 0$. $\quad (\star_1)$

En dérivant deux fois, il vient

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 \lambda_k g_k = 0. \quad (\star_2)$$

Détails
g_k est deux fois dérivable et $g_k'' = -k^2 g_k$.

Mais alors[7] $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k((n+1)^2 - k^2) g_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k((n+1)^2 - k^2) g_k = 0$.
Par l'hypothèse de récurrence, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_k\left((n+1)^2 - k^2\right) = 0$ et donc $\lambda_k = 0$.
Et alors la relation $(\star_1)$ devient $\lambda_{n+1} g_{n+1} = 0$ si bien que $\lambda_{n+1} = 0$.
Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(g_0, \dots, g_n)$ est libre.

[7] C'est l'équation $(\star_1)$ multipliée par $(n+1)^2$, à laquelle on soustrait l'équation $(\star_2)$.

Alternative : voici une autre preuve pour la liberté de $(f_0, \dots, f_n)$.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cos^i = 0$.

Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i$ est une fonction polynomiale, qui s'annule en tous les

éléments de $[-1,1]$ (car cos est surjective sur $[-1,1]$). Elle est donc nulle[8], de sorte que tous ses coefficients sont nuls : $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

[8] Car possède une infinité de racines.

2. Par récurrence simple sur k : si $k = 0$, c'est évident.

Soit k tel que $\cos^{k-1} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i f_i$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\cos^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \cos(ix)\cos(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i(\cos((i+1)x) + \cos((i-1)x))$$

et donc $g_k \in F_k$.

Alternative : par la formule d'Euler, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\cos^k(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} e^{i(2j-k)x}.$$

Et donc en considérant la partie réelle[9],

[9] La partie imaginaire du membre de gauche est nulle, donc celle du membre de droite aussi.

$$g_k(x) = \cos^k(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cos((2j-k)x) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} f_{2j-k}(x).$$

Notons qu'on a toujours $-k \leqslant 2j-k \leqslant k$, et si $2j-k < 0$, $f_{2j-k} = f_{k-2j}$ par parité du cosinus, avec $0 \leqslant k-2j \leqslant k$.
Donc on a bien écrit g_k comme combinaison linéaire de $f_0, f_1, \ldots, f_k$. Et donc $g_k \in F_k$.

3. Les deux espaces sont de même dimension $n+1$, et on vient de prouver que $F_n \subset G_n$ à la question précédente.
Donc nécessairement $F_n = G_n$.

Commentaires : en réalité, nous avions déjà prouvé lors d'un DM qu'il existe des polynômes $P_n \in \mathbf{R}_n[X]$, appelés polynômes de Tchebychev, tels $\cos(nx) = P_n(\cos(x))$, c'est-à-dire que $g_n \in \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$. Et donc $G_n \subset F_n$.

Ici nous avons prouvé cette inclusion d'une autre manière[10], ce qui prouve, sans donner de formules explicites, que g_n est combinaison linéaire de $f_0, \ldots, f_n$.

[10] À l'aide d'un argument de dimension.

Et alors si $g_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i$, alors en posant $T_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \in \mathbf{R}_n[X]$, on a bien, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T_n(\cos x) = \cos(nx)$. Autrement dit, on prouve, sans donner de formule explicite, l'existence des polynômes de Tchebychev.
L'unicité découlant du fait qu'il y a une et seule manière d'écrite g_n comme combinaison linéaire de $f_0, \ldots, f_n$.

Solution de l'exercice 22.8

Supposons que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$. Alors déjà

$$\dim E = \dim(F_1 \oplus F_2 \oplus F_3) = \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3.$$

Rappel
La dimension d'une somme directe est la somme des dimensions.

Si $x \in F_1 \cap F_2$, alors on a $0_E = \underbrace{x}_{\in F_1} + \underbrace{(-x)}_{\in F_2} + \underbrace{0_E}_{\in F_3}$, et donc, la somme étant directe, $x = -x = 0_E$. Donc $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.
De même, si $x \in (F_1+F_2) \cap F_3$, alors soient $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.
Et donc on a $0_E = \underbrace{x_1}_{\in F_1} + \underbrace{x_2}_{\in F_2} - \underbrace{x}_{\in F_3}$, et donc $x = x_1 = x_2 = 0_E$, de sorte que $(F_1+F_2) \cap F_3 = \{0_E\}$.

Inversement, supposons les trois conditions vérifiées, et montrons que $F_1 + F_2 + F_3$ est une somme directe. Soient donc $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, x_3 \in F_3$ tels que $0_E = x_1 + x_2 + x_3$.
Alors $x_3 = -(x_1+x_2) \in F_3 \cap (F_1+F_2)$. Et donc $x_3 = \{0_E\}$.
Il reste alors $x_1 + x_2 = 0_E$, soit encore $x_1 = -x_2 \in F_1 \cap F_2$. Et donc $x_1 = x_2 = 0_E$.

Ainsi, la somme $F_1+F_2+F_3$ est directe, et donc de dimension $\dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 = \dim E$. Or, le seul sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E$ est E tout entier, et donc $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.9

Par la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) > \dim E - \dim(F+G).$$

Mais $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc de dimension inférieure ou égal à $\dim E$, si bien que $\dim E - \dim(F+G) > 0$, et donc $\dim(F \cap G) > 0$.
On en déduit[11] que $F \cap G \neq \{0_E\}$. Et en particulier que F et G ne peuvent pas être en somme directe.
Alternative : sans Grassmann. Si on avait $F \cap G = \{0_E\}$, alors F et G seraient en somme directe, et alors $F \oplus G$ serait un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim F + \dim G > \dim E$, ce qui est impossible. Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

[11] Un espace vectoriel est de dimension nulle si et seulement si il ne contient que son vecteur nul.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.10

1. Il est clair que G est de dimension 2, et une base de F est $\left(-2, -\frac{3}{2}, 1, 0\right), \left(-1, \frac{1}{2}, 0, 1\right)$, de sorte que F est aussi de dimension 2.
Donc on a déjà $\dim \mathbf{R}^4 = \dim F + \dim G$, si bien qu'il suffit, pour répondre à la question, de prouver soit que $F \cap G = \{0_{\mathbf{R}^4}\}$, soit que $\mathbf{R}^4 = F + G$.

Méthode
Votre premier réflexe dans ce genre de situation doit être d'essayer de passer par l'intersection, c'est souvent beaucoup plus facile.

Soit alors $(x, y, z, t) \in F \cap G$, et soient λ, μ deux réels[12] tels que

$$(x, y, z, t) = \lambda(1, 1, 1, 1) + \mu(1, -1, 1, 1) = (\lambda + \mu, \lambda - \mu, \lambda + \mu, \lambda + \mu).$$

Mais alors[13] $\begin{cases} 4(\lambda + \mu) = 0 \\ 4\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \mu = 0.$
Donc $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$, de sorte que $F \cap G$ est réduit au vecteur nul.
Donc F et G sont en somme directe, et puisqu'on a déjà $\dim F + \dim G = \dim \mathbf{R}^4$, ils sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

[12] Ils existent puisque $(x, y, z, t) \in G$.

[13] On utilise là le fait qu'il s'agit d'un vecteur de F.

2. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors

$$P \in F \Leftrightarrow aX^6+bX^4+cX^2+d = aX^5+bX^4+cX^3+dX^2 \Leftrightarrow a = c = d = 0 \Leftrightarrow P = bX^2 \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}(X^2).$$

Donc F est de dimension 1.
De même, on prouve que $G = \mathrm{Vect}(X^3 - 8, X^2 - 4, X - 1)$. Puisqu'il s'agit d'une famille de polynômes de degrés distincts, elle est libre, et donc $\dim G = 3$.

Pour prouver que F et G sont supplémentaires, nous pourrions procéder comme dans la première partie, en prouvant que $F \cap G = \{0\}$. Mais il est également possible de prouver que la concaténation d'une base de F et d'une base de G (par exemple les bases que nous venons d'obtenir) est libre.
Ceci se fait sans difficultés[14].
Étant libre et de cardinal $4 = \dim \mathbf{R}_3[X]$, la famille ainsi obtenue, que l'on sait être génératrice de $F + G$ est une base de $\mathbf{R}_3[X]$. Et donc $\mathbf{R}_3[X] = F + G$.
Puisque $\dim F + \dim G = \dim \mathbf{R}_3[X]$, on a donc $\mathbf{R}_3[X] = F \oplus G$.

[14] Mais il y aurait un vrai calcul à faire, puisque cette fois ce n'est plus une famille de polynômes à degrés distincts.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.11

Commençons par prouver le résultat pour $p = 2$.
Soient donc F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 + F_2$.

Soit alors G_2 un sous-espace vectoriel de F_2, de dimension minimale parmi les sous-espaces vectoriels H de F_2 tels que $E = F_1 + H$.

Remarque
Notons qu'il existe de tels sous-espaces vectoriels puisque $H = F_2$ convient.

Supposons par l'absurde que F_1 et G_2 ne soient pas en somme directe. Il existe alors $h \in F_1 \cap G_2$ non nul. Considérons alors H un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(h)$ dans G_2, de sorte que $\dim H' = \dim G_2 - 1$.
Alors pour tout $x \in E$, il existe $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in G_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.
Mais $x_2 = y + \lambda h$, avec $y \in H$ et $\lambda \in \mathbf{K}$.
Donc $x = \underbrace{(x_1 + \lambda h)}_{\in F_1} + \underbrace{y}_{\in H} \in F_1 + H$, si bien que $E = F_1 + H$, ce qui contredit la minimalité

de G_2.
Ainsi, F_1 et G_2 sont en somme directe, de sorte que $E = F_1 \oplus G_2$, avec $G_2 \subset F_2$.
C'est bien le résultat souhaité, avec $G_1 = F_1$.

Pour le cas général, procédons par récurrence sur p, et soit $\geqslant 2$ tel que pour tout espace vectoriel de dimension finie E qui est somme de p sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$, il existe $G_1 \subset F_1, \dots, G_p \subset F_p$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} G_i$.
Soit alors E un espace vectoriel de dimension finie somme de $p+1$ sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$. Alors en particulier, $E = \left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) + F_{p+1}$.
Comme le prouve le cas particulier $p = 2$, il existe donc $G_{p+1} \subset F_{p+1}$ tel que $E = \left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \oplus G_{p+1}$.
Et alors par hypothèse de récurrence, il existe $G_1 \subset F_1, \dots, G_p \subset F_p$ tels que $\sum_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} G_i$.
Et donc

$$E = \left(\bigoplus_{i=1}^{p} G_i\right) \oplus G_{p+1} = \bigoplus_{i=1}^{p+1} G_i.$$

Une autre solution, en manipulant des bases.
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, notons $d_i = \dim F_i$, et considérons une base $(e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$ de F_i.
Alors la famille $(e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,d_2}, \dots, e_{p,1}, \dots, e_{p,d_p})$ est génératrice de $\sum_{i=1}^{p} F_i = E$.
On peut donc en extraire une base de E. Quitte à renuméroter les vecteurs de chacune des bases, supposons que cette base extraite est

$$\mathscr{B} = (e_{1,1}, \dots, e_{1,j_1}, e_{2,1}, \dots, e_{2,j_2}, \dots, e_{n,1}, \dots, en, j_d)$$

où pour chaque $k \in [\![1, p]\!]$, $0 \leqslant j_k \leqslant d_k$.
On notera que si $j_k = 0$, cela signifie qu'on n'a gardé aucun vecteur de la base de F_k dans la base $\mathscr{B}$.

Pour chaque $k \in [\![1, p]\!]$, notons $G_k = \mathrm{Vect}(e_{k,1}, \dots, e_{k,j_k})$, avec la convention que si $j_k = 0$, alors $G_k = \{0_E\}$.
Alors $G_k \subset F_k$ puisque les $e_{k,i}$, $1 \leqslant i \leqslant j_k$ sont tous dans F_i.
Et de plus, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\dim G_k = j_k$.
Puisque la concaténation des bases des G_k forme la base $\mathscr{B}$ de E, c'est une famille libre, si bien que les G_k sont en somme directe.
Et de plus $\bigoplus_{k=1}^{p} G_k = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = E$.

Solution de l'exercice 22.12

Notons n la dimension de E, de sorte que $\mathscr{L}(E)$ est de dimension n^2.
La famille $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ étant une famille de $\mathscr{L}(E)$ de cardinal $n^2 + 1$, elle est liée.
Donc il existe des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n^2}$, non tous nuls[15] tels que $\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i f^i = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

[15] Ce qui veut dire que l'un au moins des λ_i est non nul.

Notons $p = \min\{k \in [\![0, n^2]\!] \mid a_k \neq 0\}$, de sorte que $\sum_{k=p}^{n^2} a_k f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
En composant[16] par f^{-p}, $a_p \mathrm{id}_E + a_{p+1} f + \dots + a_{n^2} f^{n^2-p} = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

[16] À gauche ou à droite, peu importe car toutes les puissance de f commutent entre elles.

Soit encore $\mathrm{id}_E = \left(-\frac{1}{a_p} \sum_{k=p+1}^{n^2} a_k f^{k-p-1}\right) \circ f$.
Et donc $f^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=p+1}^{n^2} a_k f^{k-p-1}$ est bien de la forme souhaitée.

Solution de l'exercice 22.13

1.a. Puisque f^{p-1} n'est pas l'application nulle par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$.

1.b. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que

$$\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0_E.$$

En appliquant f^{p-1}, il vient

$$\lambda_0 f^{p-1}(x) + \lambda_1 \underbrace{f^p(x)}_{=0_E} + \cdots + \lambda_{p-1} \underbrace{f^{2p-2}(x)}_{0_E} = 0_E \Leftrightarrow \lambda_0 f^{p-1}(x) = 0_E.$$

Rappel
Si $f^p = 0$, alors pour tout $k \geqslant p$, $f^k = 0$.

Puisque $f^{p-1}(x) \neq 0_E$, c'est donc que $\lambda_0 = 0$.
Il ne reste donc que $\lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0_E$.
En appliquant f^{p-2}, il vient alors $\lambda_1 f^{p-1}(x) = 0_E$, et donc $\lambda_1 = 0$.
De proche en proche, on prouve que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$, et donc la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

1.c. Nous venons d'obtenir une famille libre de p vecteurs dans un espace de dimension n, donc $p \leqslant n$.

Rappel
Toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à la dimension.

2. La différence réside dans l'ordre des quantificateurs : ici l'entier p peut dépendre du vecteur x choisi alors que pour un endomorphisme nilpotent, il s'agit nécessairement du même p pour tous les vecteurs de E.
Toutefois, le raisonnement de la question précédente fonctionne encore : à $x \in E \setminus \{0\}$ fixé, soit p le plus petit entier tel que $f^p(x) = 0_E$.
Alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre, et donc $p \leqslant n$.
Et par conséquent, $f^n(x) = 0_E$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $f^n = 0$, et donc f est bien nilpotente.

Alternative : si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons $p_i \in \mathbf{N}$ tel que $f^{p_i}(e_i) = 0_E$, et soit $p = \max(p_1, \dots, p_n)$.
Alors $f^p(e_1) = \cdots = f^p(e_n) = 0_E$, si bien que f^p est nulle sur une base, et donc est l'application nulle.

Ceci ne vaut plus en dimension infinie, comme le prouve par exemple le cas de la dérivation des polynômes, qui est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
En effet, étant donné un polynôme P non nul, si $n = \deg P$, alors $f^{n+1}(P) = P^{(n+1)} = 0$.
Pour autant, $f : P \mapsto P'$ n'est pas nilpotente, car pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n(X^n) = n! \neq 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.14

La linéarité de Φ ne pose pas de difficulté.
Soit $P \in \operatorname{Ker} \Phi$. Alors $(P(a_1), \dots, P(a_n)) = 0_{\mathbf{K}^n}$.
Donc $P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$, de sorte que P possède n racines distinctes.
Étant de degré au plus $n-1$, c'est le polynôme nul, donc $\operatorname{Ker} P = \{0\}$.
On en déduit que Φ est injectif. Mais $\dim \mathbf{K}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbf{K}^n$, donc Φ est bijectif : c'est un isomorphisme.

Sa bijection réciproque est l'application qui à un n-uplet $(y_1, \dots, y_n)$ associe l'unique polynôme P de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$.
Notons alors $L_1, \dots, L_n$ les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $a_1, \dots, a_n$.
Alors $P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i$ est un polynôme de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$, tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = y_i$.
C'est donc l'unique antécédent de $(y_1, \dots, y_n)$ par Φ.

Et donc $\Phi^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K}_{n-1}[X] \\ (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i L_i \end{array} \right.$.

Remarque
Ceci fournit donc un moyen simple de garantir l'existence et l'unicité des polynômes de Lagrange associés à $(a_1, \dots, a_n)$, sans avoir à donner leur expression : L_i est l'antécédent par Φ du $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.15

Puisque $f + g = \mathrm{id}_E$, on a $f^2 = f \circ (\mathrm{id}_E - g) = f - f \circ g$.
Si nous voulons prouver que f est un projecteur, il nous faut donc prouver que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(E)}$, soit encore[17] que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.
Par le théorème du rang, nous savons que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} g$.
Par ailleurs, pour $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $x = \mathrm{id}_E(x) = f(x) + g(x) = g(x) \in \operatorname{Im} g$.
Donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} g$. Ces deux espaces possédant mêmes dimensions, ils sont égaux.

[17] Voir l'exercice 22 du TD 20.

Et donc en particulier, $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$, et donc on a bien $f^2 = f$, donc f est un projecteur.

Nous pourrions refaire un calcul similaire pour g, mais notons plutôt que puisque f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$, alors $\mathrm{id}_E - f$ (qui se trouve être ici égal à g) est la projection sur $\operatorname{Ker} f$ parallèlement à $\operatorname{Im} f$.

Rappel
Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F.

Solution de l'exercice 22.16

Supposons qu'un tel endomorphisme existe.
Alors[18] $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = 2 \dim \operatorname{Ker} f$ est pair.

[18] C'est le théorème du rang.

Inversement, supposons que $\dim E = 2p$ soit pair, et soit $(e_1, \dots, e_{2p})$ une base de E.
Soit alors f l'unique endomorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1, p]\!], f(e_i) = e_{i+p}$ et $\forall i \in [\![p+1, 2p]\!]$, $f(e_i) = 0_E$.

Rappel
Un endomorphisme de E est uniquement déterminé par sa valeur sur une base de E.

Soit alors $x \in E$. De manière unique, $x = \sum_{i=1}^{2p} \lambda_i e_i$, avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2p}) \in \mathbf{K}^{2p}$. Et alors

$$x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{2p} \lambda_i f(e_i) = 0_E \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_{i+p} = 0_E.$$

Par unicité de la décomposition de $f(x)$ dans la base $(e_1, \dots, e_{2p})$, on a donc

$$f(x) = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0.$$

Soit encore $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x \in \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_{2p})$.
Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_{2p})$.

Par ailleurs, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_{2p})) = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_{2p})$, si bien que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$.

Rappel
L'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image.

Solution de l'exercice 22.17

Une solution simple pour prouver l'existence d'un tel isomorphisme[19] est de prouver que les deux espaces ont même dimension.

[19] Et pas d'en construire un.

Nous avons déjà donné en cours la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$, c'est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Dimension
Nous en avons même construit une base, qui est la famille formée des $E_{i,i}$ et des $E_{i,j} + E_{j,i}$, $i \neq j$.

Par ailleurs, si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice de $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$, alors pour tout $i > j$, $m_{i,j} = 0$.
Donc $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} m_{i,j} E_{i,j}$, si bien que la famille des $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$.
Elle est évidemment libre puisque sous-famille de la base canonique, et donc c'est une base de $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$.
Son cardinal est donc le nombre de couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $i \leqslant j$, c'est donc $n + (n-1) + \dots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Donc $\dim \mathcal{T}_n(\mathbf{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2} = \dim \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$.
Donc $\mathcal{T}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ sont de même dimension, et donc sont isomorphes.

Rappel
Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

En réalité, il est facile de construire un isomorphisme entre ces deux espaces, et on peut par exemple prendre l'application $\varphi : \mathcal{T}_n(\mathbf{K}) \to \mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ définie par

$$\varphi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ 0 & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n-1} & m_{1,n} \\ m_{1,2} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n-1} & m_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m_{1,n-1} & & & \ddots & m_{n-1,n} \\ m_{1,n} & m_{2,n} & \dots & m_{n-1,n} & m_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Je vous laisse le soin de prouver qu'elle est linéaire, et bijective.

Méthode
Ici, il faudra faire à la main et l'injectivité et la surjectivité, pas question d'utiliser le théorème du rang si vous ne connaissez pas les dimensions de l'espace de départ et/ou de l'espace d'arrivée !

Solution de l'exercice 22.18

Commençons par prouver que φ est bien linéaire : soient u, v deux applications linéaires de E dans F, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$\varphi(\lambda u + v) = ((\lambda u + v)(e_1), \dots, (\lambda u + v)(e_n)) = (\lambda u(e_1) + v(e_1), \dots, \lambda u(e_n) + v(e_n))$$

$$= \lambda(u(e_1), \dots, u(e_n)) + (v(e_1), \dots, v(e_n)) = \lambda\varphi(u) + \varphi(v).$$

C'est un isomorphisme car nous avons prouvé que pour tout n-uplet $(y_1, \dots, y_n) \in F^n$, il existe une **unique** application linéaire $u : E \to F$ telle que $u(e_1) = y_1, \dots, u(e_n) = y_n$.
Ce qui revient à dire que φ est bijective : tout élément de l'espace d'arrivée possède un unique antécédent par φ.
Et donc $\mathscr{L}(E, F)$ et F^n ont même dimension.
Mais $\dim F^n = \dim F + \dim F + \cdots + \dim F = n \dim F = \dim E \times \dim F$.

$\dim E = n$
n est bien la dimension de E, puisque nous avons noté n le cardinal d'une base de E.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.19

1. La linéarité de φ_n ne pose pas de difficultés.
Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi_n$. Alors $\varphi(P) = 0$, et donc $P = -P(0)X - XP''$.
En particulier, $P(0) = 0$, et donc $P = -XP''$.
Si P est non nul, ceci n'est pas possible pour des raisons de degré : XP'' est de degré inférieur ou égal[20] à $\deg P - 1$, et ne peut donc être égal à P.
Donc $\operatorname{Ker} \varphi_n = \{0\}$ et donc φ_n est injectif.

Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme d'un espace vectoriel **de dimension finie**, c'est une bijection.

Alternative : on peut aussi calculer $\varphi_n(X^k)$ et constater qu'il s'agit d'un polynôme de degré k, si bien que la famille des $\varphi_n(X^k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$ est libre, et étant de cardinal $n + 1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$, c'est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
Et donc φ_n envoie une base sur une base, donc c'est un isomorphisme.

Dimension
Nous savons qu'une application linéaire entre espaces de même dimension est un isomorphisme si et seulement si elle est injective. C'est donc notamment vrai pour des endomorphismes de E (puisque l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont les mêmes, donc de même dimension), sous réserve que E soit de dimension finie. Ce n'est plus vrai pour des endomorphismes d'un espace de dimension infinie.

2. Pour les mêmes raisons que précédemment, φ est linéaire et injectif.
Et pour tout $Q \in \mathbf{R}[X]$, si n est tel que $n \geqslant \deg Q$, alors $Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et donc la question 1 prouve que Q possède un unique antécédent $P \in \mathbf{R}_n[X]$ par φ_n.
Et donc $\varphi(P) = \varphi_n(P) = Q$, de sorte que Q possède un antécédent par φ, qui se trouve donc être surjectif.
Et donc φ est bijectif : c'est un isomorphisme.

3. L'application f_1 est clairement injective, puisque $f_1(P) = 0 \Leftrightarrow XP = 0 \Leftrightarrow P = 0$.
Pourtant elle n'est pas surjective puisque pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $f_1(P)$ possède 0 pour racine, si bien que $X - 1 \notin \operatorname{Im} f_1$.

De même, il est assez facile de prouver que f_2 est surjective, car étant donné $P \in \mathbf{R}[X]$, on sait[21] construire un polynôme $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $Q'' = P$.
En revanche, f_2 n'est pas injectif puisque $\mathbf{R}_1[X] \subset \operatorname{Ker} f_2$ (et on pourrait même prouver que c'est là une égalité).
Nous avons donc là des exemples d'endomorphismes en dimension infinie qui sont soit injectifs, soit surjectifs, mais pas les deux à la fois.

[21] D'ailleurs, êtes-vous sûr de savoir donner une formule pour Q ?

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.20

Notons p l'indice de nilpotence de u, et prouvons par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$ que $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.
Pour $k = 1$, c'est l'hypotèse faite par l'énoncé.

Supposons que $k < n$ et que $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.
Alors nécessairement, puisque $\dim \operatorname{Ker} u^k < \dim E$ alors $\operatorname{Ker} u^k \neq E$, si bien que $u^k \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, et donc $p > k$.

Appliquons alors le théorème du rang à la restriction de u à $\operatorname{Im} u^k$, en remarquant dès maintenant que $\operatorname{Im} u_{|\operatorname{Im} u^k} = \operatorname{Im} u^{k+1}$.
Alors

$$\dim \operatorname{Im} u_{|\operatorname{Im} u^k} + \dim \operatorname{Ker} u_{|\operatorname{Im} u^k} = \dim \operatorname{Im} u^k.$$

Il est clair que $\operatorname{Ker} u_{|\operatorname{Im} u^k} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u^k \subset \operatorname{Ker} u$, et donc il s'agit d'un espace vectoriel de dimension 0 ou 1.

Puisque $u \circ u^{p-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\operatorname{Im} u^{p-1} \subset \operatorname{Ker} u$, de sorte que $\operatorname{Im} u^{p-1} \cap \operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^{p-1}$.
Et u^{p-1} n'étant pas l'endomorphisme nul, son image n'est pas réduite au vecteur nul.
Mais puisque $k \leqslant p - 1$, $\operatorname{Im} u^{p-1} \subset \operatorname{Im} u^k$, et donc $\operatorname{Im} u^k \cap \operatorname{Ker} u \neq \{0_E\}$.

Donc $\operatorname{Im} u^k \cap \operatorname{Ker} u$ est un sous-espace de $\operatorname{Ker} u$, non réduit au vecteur nul : nécessairement il est de dimension 1.

On a donc $\dim \operatorname{Im} u^{k+1} = \dim \operatorname{Im} u_{|\operatorname{Im} u^k} = \dim \operatorname{Im} u^k - 1 = n - \dim \operatorname{Ker} u^k - 1 = n - (k+1)$. Et alors par le théorème du rang, appliqué cette fois à u^k, $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} = \dim E - \dim \operatorname{Im} u^{k+1} = n - n + (k+1) = k+1$.

Remarque : notons qu'on prouve au passage que pour un tel endomorphisme, l'indice de nilpotence est égal à n.

Alternative : soit p l'indice de nilpotence de u, de sorte que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.
On a facilement[22] les inclusions :

$$\{0_E\} \subset \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} u^p.$$

[22] Et la nilpotence de u n'est d'aucune utilité ici.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Par le théorème du rang, appliqué à la restriction de u à $\operatorname{Ker} u^{k+1}$, on a

$$\dim(\operatorname{Ker} u^{k+1}) = \dim \operatorname{Im} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}} + \dim \operatorname{Ker} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}}.$$

Or, $\operatorname{Ker} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u$.
Vu l'hypothèse faite sur $\operatorname{Ker} u$, il s'agit là d'une droite vectorielle.
Par ailleurs, si $y \in \operatorname{Im} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}}$, alors il existe $x \in \operatorname{Ker} u^{k+1}$ tel que $y = u(x)$.
Mais $u^{k+1}(x) = 0_E$, si bien que $u^k(y) = u^{k+1}(x) = 0_E$, et donc $y \in \operatorname{Ker} u^k$.
Ainsi, $\operatorname{Im} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}} \subset \operatorname{Ker} u^k$, et donc $\dim \operatorname{Im} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}} \leqslant \dim \operatorname{Ker}(u^k)$.
On a donc

$$\dim(\operatorname{Ker} u^{k+1}) = \dim \operatorname{Im} u_{|\operatorname{Ker} u^{k+1}} + 1 \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u^k) + 1.$$

Ceci prouve déjà[23] que pour $k \in [\![1, p]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k \leqslant k$.
Puisqu'en particulier $\dim \operatorname{Ker} u^p = \dim E = n$, nécessairement $n \leqslant p$.

[23] Par une récurrence sans difficulté, initialisée par le fait que $\dim \operatorname{Ker} u = 1$.

Par ailleurs, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$ l'inclusion $\operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1}$ est stricte : $\operatorname{Ker} u^k \subsetneq \operatorname{Ker} u^{k+1}$.
En effet, supposons par l'absurde que deux termes consécutifs soient égaux, c'est-à-dire que $\operatorname{Ker} u^k = \operatorname{Ker} u^{k+1}$, pour un entier $k \leqslant p-1$. Alors pour $x \in \operatorname{Ker} u^{k+2}$, il vient $u^{k+2}(x) = 0_E = u^{k+1}(u(x))$.
Donc $u(x) \in \operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u^k$, et donc $u^k(u(x)) = 0_E \Leftrightarrow u^{k+1}(x) = 0_E$.
Donc si pour un $k_0 < p$, $\operatorname{Ker} u^{k_0} = \operatorname{Ker} u^{k_0+1}$, alors $\operatorname{Ker} u^{k_0+2} = \operatorname{Ker} u^{k_0+1}$, et donc la suite est stationnaire à partir de k_0.
En particulier, $\operatorname{Ker} u^{p-1} = \operatorname{Ker} u^p$, ce qui contredit la définition de l'indice de nilpotence.
Donc pour tout $k < p$, $\operatorname{Ker} u^k \subsetneq \operatorname{Ker} u^{k+1}$, et donc $\dim(\operatorname{Ker} u^{k+1}) \geqslant \dim(\operatorname{Ker} u^k) + 1$.
Comme nous avions déjà prouvé l'inégalité inverse, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} = \dim \operatorname{Ker} u^k + 1$, et donc $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.
Notons qu'en particulier, ceci prouve que $p = n$, puisque $p = \dim \operatorname{Ker} u^p = \dim E = n$.

Encore mieux : on peut conclure encore plus rapidement si on s'autorise le résultat (classique) de l'exercice 22.13, qui nous dit que $p \leqslant n$.
Repartons alors du fait que pour tout k, $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^k + 1$.
Si l'une de ces inégalités était stricte,[24] on aurait alors $\dim \operatorname{Ker} u^n < n$.
Mais $n \leqslant p$, si bien que $u^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et donc $\dim \operatorname{Ker} u^n = \dim E = n$.

[24] Ce qui voudrait dire $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} \leqslant \dim \operatorname{Ker} u^k$, et donc $\operatorname{Ker} u^{k+1} = \operatorname{Ker} u^k$.

Donc nécessairement, pour tout $k \leqslant n$, $\dim \operatorname{Ker} u^{k+1} = \dim \operatorname{Ker} u^k + 1$ et donc $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$.

Solution de l'exercice 22.21

D'après le théorème du rang, on a d'une part $\dim E = \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u$ et d'autre part $\dim E = \dim \operatorname{Im} v + \dim \operatorname{Ker} v$.

De plus, par la formule de Grassmann, on a

$$\dim(\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Im}(v)) = \dim \operatorname{Im}(u) + \dim \operatorname{Im}(v) - \dim(\operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)) = \dim \operatorname{Im}(u) + \dim \operatorname{Im} v - \dim E.$$

Et de même,

$$\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Ker} v - \dim E.$$

En sommant ces deux relations, il vient donc

$$\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v)+\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = \underbrace{\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u}_{=\dim E} + \underbrace{\dim \operatorname{Im} v + \dim \operatorname{Ker} v}_{=\dim E} - 2\dim E = 2\dim E - 2\dim E = 0.$$

Et puisque les dimensions sont des entiers naturels, on a donc

$$\dim(\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v) = 0$$

et donc $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Ker} v = \{0_E\}$.

Puisqu'on sait déjà que $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$, on en déduit[25] que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont supplémentaires dans E.
Et de même, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} v$ sont supplémentaires dans E.

[25] C'est l'une des caractérisations des supplémentaires : si deux propositions parmi trois sont vérifiées...

Alternative : on peut aussi se souvenir que la dimension d'une somme est inférieure ou égale à la somme de dimensions, avec égalité si et seulement si la somme est directe.
En particulier, ici on a

$$\dim E = \dim(\operatorname{Im} u+\operatorname{Im} v) \leqslant \dim \operatorname{Im} u+\dim \operatorname{Im} v \text{ et } \dim E = \dim(\operatorname{Ker} u+\operatorname{Ker} v) \leqslant \dim \operatorname{Ker} u+\dim \operatorname{Ker} v.$$

Et donc en sommant, il vient

$$2\dim E \leqslant \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} v + \dim \operatorname{Ker} v$$

ce qui par le théorème du rang nous donne $2\dim E \leqslant 2\dim E$.
Cela ne nous apprend pas grand chose.... sauf que si l'une des deux inégalités que l'on a sommées était stricte, on aurait alors au final une inégalité stricte, et donc $2\dim E < 2\dim E$.
Ce qui est absurde. Et donc les deux inégalités sont des égalités, si bien que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont en somme directe, de même que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker} v$.
Ajouté au fait que $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$, on a donc $E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$, et de même pour les noyaux.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.22

Il est facile de prouver que Φ est linéaire.
Et elle est surjective par définition de la somme de sous-espaces vectoriels.

De plus, on a $(x_1, \dots, x_n) \in \operatorname{Ker} \Phi \Leftrightarrow x_1 + \cdots + x_n = 0_E$.
Mais rappelons que, par définition, la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si $\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, $x_1 + \cdots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0_E$.
Soit encore si et seulement si $(x_1, \dots, x_n) \in \operatorname{Ker} \Phi \Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = (0_E, \dots, 0_E)$.
Donc si et seulement si $\operatorname{Ker} \Phi = \{(0_E, \dots, 0_E)\}$, et donc si et seulement si Φ est injective.

Comme nous avons toujours la surjectivité, la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe si et seulement si Φ est un isomorphisme.
Si la somme est directe, alors Φ est un isomorphisme, et donc $F_1 \times \cdots \times F_n$ et $F_1 + \cdots + F_n$ ont même dimension.
Mais nous connaissons celle du produit : c'est la somme des dimensions des F_i, donc $\dim(F_1 + \cdots + F_n) = \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_n$.

Inversement, si cette égalité est vérifiée, alors l'espace de départ et d'arrivée de Φ ont même dimension. Mais Φ étant surjective, par le théorème du rang, elle est injective.
Et donc pour $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0_E \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0_E$, si bien que la somme est directe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 22.23

1. On a facilement $\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$. En effet, pour $y \in \operatorname{Im}(u+v)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u+v)(x) = u(x) + v(x) \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.

Et donc nécessairement,

$$\operatorname{rg}(u+v) = \dim \operatorname{Im}(u+v) \leqslant \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leqslant \dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Im} v \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$

Et alors, on a $u = u + v + (-v)$, donc par ce qui vient d'être dit,

$$\operatorname{rg}(u) \leqslant \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(v).$$

Rappel
Nous avons déjà dit que multiplier une application linéaire par un scalaire non nul ne change pas son image, et donc ne change pas son rang.
Donc $\operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(v)$.

On en déduit que $\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$, et sur le même principe, $\mathrm{rg}(v)-\mathrm{rg}(u) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.
Donc $|\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)| \leqslant \mathrm{rg}(u+v)$.

2. Puisque $u \circ v = 0_{\mathscr{L}(E)}$, $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}\, u$. Et donc $\mathrm{rg}(v) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, u$.
Or par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, u = \dim E - \mathrm{rg}(u)$, de sorte que $\mathrm{rg}(v)+\mathrm{rg}(u) \leqslant \dim E$.

Par ailleurs, $u+v$ étant bijectif, on a $\mathrm{rg}(u+v) = \dim E$, et donc par la question 1, $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v) \geqslant \dim E$.
Par double inégalité, on a donc $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v) = \dim E$.

Solution de l'exercice 22.24

1. On a facilement $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$, et donc $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v) \leqslant \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$.
Et alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u+v(-v)) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)+\mathrm{rg}(-v) \leqslant \mathrm{rg}(u+v)+\mathrm{rg}(v)$.
Et donc $\mathrm{rg}(u+v) \geqslant \mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)$.
Notons qu'on obtient les mêmes inégalités en échangeant u et v, et donc $\mathrm{rg}(u+v) \geqslant |\mathrm{rg}(u)-\mathrm{rg}(v)|$.

2. Reprenons nos calculs, si $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$ alors nécessairement les deux inégalités ci-dessus sont des égalités, si bien que
   - ▸ $\dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v) = \dim \mathrm{Im}\, u + \dim \mathrm{Im}\, v$
   - ▸ $\dim \mathrm{Im}(u+v) = \dim(\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v)$, et alors puisque $\mathrm{Im}(u+v)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$, il vient $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$.

En particulier, si la première condition est vérifiée, alors[26] $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont en somme directe : $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v = \{0_E\}$.
Par ailleurs, on a $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v = \mathrm{Ker}(u+v)$.
En effet, l'inclusion $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u+v)$ est toujours vraie, et si $x \in \mathrm{Ker}(u+v)$, alors $u(x) = -v(x) \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)$, de sorte que $u(x) = v(x) = 0_E$, et donc $x \in \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$.
Donc par la formule de Grassmann, couplée au théorème du rang,

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v) &= \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, v - \dim \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \\ &= \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Ker}\, v - \dim \mathrm{Ker}(u+v) \\ &= n - \mathrm{rg}(u) + n - \mathrm{rg}(v) - n + \mathrm{rg}(u+v).\end{aligned}$$

Mais $\mathrm{rg}(u+v) = \mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v)$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v) = n = \dim E$, de sorte que $\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v = E$.

Inversement, si on suppose à la fois $\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v = E$ et $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v = \{0_E\}$, alors pour les mêmes raisons que précédemment[27] $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$ et donc

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Im}(u+v) &= n - \dim \mathrm{Ker}(u+v) = n - \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v) \\ &= n - \dim \mathrm{Ker}\, u - \dim \mathrm{Ker}\, v + \dim(\mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Ker}\, v) \\ &= n - \dim \mathrm{Ker}\, u + n - \dim \mathrm{Ker}\, v = \dim \mathrm{Im}\, u + \dim \mathrm{Im}\, v \\ &= \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).\end{aligned}$$

3. Puisque $\mathrm{Im}(uv) \subset \mathrm{Im}\, u$, nécessairement $\mathrm{rg}(uv) \leqslant \mathrm{rg}(u)$.
Par ailleurs, $\mathrm{Im}(uv) = u(\mathrm{Im}\, v)$, qui est forcément[28] de dimension inférieure ou égale à celle de $\dim \mathrm{Im}\, v$.
Donc $\mathrm{rg}(uv) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$ (être plus petit que deux nombres, c'est être plus petit que leur minimum.)

Enfin, considérons la restriction de u à $\mathrm{Im}\, v$.
On a alors, $\mathrm{Im}\, u_{|\mathrm{Im}\, v} = \mathrm{Im}(uv)$ et $\mathrm{Ker}(u_{|\mathrm{Im}\, v}) = \mathrm{Im}\, v \cap \mathrm{Ker}\, u$.
Et donc par le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}\, v = \mathrm{rg}(uv) + \dim(\mathrm{Im}\, v \cap \mathrm{Ker}\, u) \geqslant \mathrm{rg}(uv) + \dim \mathrm{Ker}\, u$$

et donc $\mathrm{rg}(uv) \leqslant \mathrm{rg}(v) - \dim \mathrm{Ker}\, u \leqslant \mathrm{rg}(v) - n + \mathrm{rg}(u)$.

Plus généralement
Pour tout sev F de E, $\mathrm{Ker}(u_{|F}) = F \cap \mathrm{Ker}\, u$.

Solution de l'exercice 22.25

Puisque F est le noyau de la forme linéaire trace[29], c'est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, qui est donc de dimension n^2-1.
Nous avons prouvé en cours que pour toute matrice A qui n'est pas dans F, $\mathrm{Vect}(A)$ est un

[26] Puisque la dimension de la somme vaut la somme des dimensions.

[27] Il suffisait d'avoir $\mathrm{Im}\, u \cap \mathrm{Im}\, v = \{0_E\}$ pour prouver $\mathrm{Ker}(u+v) = \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v$.

[28] Une application linéaire ne peut que diminuer la dimension d'un sous-espace, et jamais l'augmenter. C'est une conséquence directe du théorème du rang.

[29] Qui est non nulle, par exemple car $\mathrm{tr}(I_n) = n \neq 0$.

supplémentaire de F.
Reprouvons-le[30] : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice de trace non nulle.
Alors $A \notin F$ et donc $\mathrm{Vect}(A) \cap F = \{0_n\}$, de sorte qu'on a à la fois $\mathrm{Vect}(A) \cap F = \{0_n\}$ et $\dim F + \dim \mathrm{Vect}(A) = n^2 - 1 + 1 = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, de sorte que F et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

[30] En notant qu'en dimension finie, on peut se passer de l'analyse-synthèse qui a été faite en cours.

Donc par exemple la droite engendrée par I_n, ou encore la droite engendrée par $E_{1,1}$ sont deux supplémentaires de F dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Solution de l'exercice 22.26

Notons $n = \dim E$.

1. Il s'agit d'un résultat de cours, que nous allons prouver sans analyse-synthèse en utilisant le fait que E est de dimension finie.
Puisque $x \notin \mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Vect}(x)$ est un sous-espace vectoriel de E, qui contient $\mathrm{Ker}\,\varphi$, mais qui contient aussi x, donc n'est pas égal à $\mathrm{Ker}\,\varphi$.
Donc il est de dimension strictement supérieure à $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = n - 1$.
Nécessairement $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Vect}(x)) = n$, et par conséquent : $E = \mathrm{Ker}\,\varphi + \mathrm{Vect}(x)$.

> **Rappel**
> E est le seul sous-espace vectoriel de E de même dimension que E.

Par ailleurs, on a $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi + \dim \mathrm{Vect}(x) = n - 1 + 1 = n = \dim E$, et donc la somme est directe.

2. On a $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2)$.
Mais puisque H_1 et H_2 sont distincts, et qu'ils sont de même dimension, aucun des deux n'est inclus dans l'autre.
En particulier, il existe $x \in H_2$ qui n'est pas dans H_1. Donc par la question 1, $H_1 \oplus \mathrm{Vect}(x) = E$.
Or $H_1 \oplus \mathrm{Vect}(x) \subset H_1 + H_2$.
Donc $H_1 + H_2 = E$, de dimension n. Et donc $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2$.

> **Détails**
> Si l'un était inclus dans l'autre, étant de même dimension, ils seraient égaux.

Remarque *: si $H_1 \neq H_2$, cela signifie que deux formes linéaires de noyaux H_1 et H_2 ne sont pas proportionnelles.*
Donc par exemple $\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + 2y - 3z + t = 0 \text{ et } 2x - 4t = 0\}$, qui est l'intersection des deux hyperplans d'équations $x + 2y - 3z + t = 0$ et $2x - 4t = 0$ est de dimension $4 - 2 = 2$, puisque les formes linéaires $(x, y, z, t) \mapsto x + 2y - 3z + t$ et $(x, y, z, t) \mapsto 2x - 4t$ ne sont pas proportionnelles.

Solution de l'exercice 22.27

Il existe une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbf{K}$ telle que $\varphi(x) \neq 0$.
En effet, si H est un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$ dans E, alors nécessairement $\dim H = \dim E - 1$, et donc H est un hyperplan de E.
Donc si φ est une forme linéaire telle que $H = \mathrm{Ker}\,\varphi$, alors $x \notin H$ et donc $\varphi(x) \neq 0$.
Puisque toutes les φ_i s'annulent en x, la forme linéaire φ n'est pas dans $\mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.
Donc $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$.
Étant de cardinal $n = \dim \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$, elle ne peut donc pas être libre, faute de quoi ce serait une base.

Solution de l'exercice 22.28

1. Nous savons que les supplémentaires d'un hyperplan H sont les $\mathrm{Vect}(x)$, pour $x \notin H$.
Donc il nous faut ici trouver un vecteur x qui ne soit ni dans F ni dans G.
Puisque F et G ont même dimension, on ne peut avoir $F \subset G$, faute de quoi F et G seraient égaux, ce qui n'est pas le cas.
Donc il existe $u \in F \setminus G$.
De même, $G \not\subset F$, et donc il existe $v \in G \setminus F$.
Considérons alors $x = u + v$. Alors $x \notin F$, car sinon on aurait $v = x - u \in F$ car différence de deux éléments de F.
Et de même, $x \notin G$, donc $x \notin F \cup G$.
Et donc $\mathrm{Vect}(x)$ est un supplémentaire commun à F et G.

> **Plus simplement**
> Si $F \not\subseteq G$ et $G \not\subseteq F$, alors $F + G$ n'est pas un sev de E. Et donc en particulier n'est pas égal à E tout entier. Donc il existe un vecteur x de E qui n'est ni dans F ni dans G.

2. Nous allons procéder à une récurrence un peu surprenante[31] : une récurrence sur la dimension de F.
Nous venons de prouver que si F et G sont des hyperplans de E, alors ils ont un supplémentaire commun.
Notons donc, pour $d \in [\![1, \dim E]\!]$ $\mathcal{P}(d)$: «deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $\dim E - d$ possèdent un supplémentaire commun».

[31] Mais vous allez vous habituer !

La question 1 prouve donc que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Soit donc $d \in [\![1, \dim E - 1]\!]$ tel que $\mathscr{P}(d)$ soit vrai et prouvons $\mathscr{P}(d+1)$.
Soient donc F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension $\dim E - (d+1)$.
Si $F = G$, tout supplémentaire de F fera l'affaire.
Si $F \neq G$, alors comme précédemment[32], il existe $u \in F \setminus G$, il existe $v \in G \setminus F$ et donc $x = u + v \notin F \cup G$.
Alors $F \cap \mathrm{Vect}(x) = G \cap \mathrm{Vect}(x) = \{0_E\}$, si bien que $\mathrm{Vect}(x)$ est en somme directe à la fois avec F et avec G.
Ainsi $F \oplus \mathrm{Vect}(x)$ est de dimension $\dim E - (d+1) + 1 = \dim E - d$, tout comme $G \oplus \mathrm{Vect}(x)$.
Par hypothèse de récurrence, ces deux sous-espaces possèdent donc un supplémentaire commun, notons-le H.
Alors $E = (F \oplus \mathrm{Vect}(x)) \oplus H = F \oplus (\mathrm{Vect}(x) \oplus H)$ et de même, $E = G \oplus (\mathrm{Vect}(x) \oplus H)$, si bien que $\mathrm{Vect}(x) \oplus H$ est un supplémentaire commun de F et G.
Donc $\mathscr{P}(d+1)$ est vraie. Par le principe de récurrence, pour tout $d \in [\![1, \dim E]\!]$, $\mathscr{P}(d)$ est vraie.

[32] Toujours car F et G ont même dimension.

Solution de l'exercice 22.29

Commençons par supposer que de telles formes linéaires existent.
Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des scalaires tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_E$.
Alors en appliquant φ_1, il vient

$$\lambda_1 \varphi_1(x_1) + \lambda_2 \underbrace{\varphi_1(x_2)}_{=0} + \lambda_p \underbrace{\varphi_1(x_p)}_{=0} = 0$$

et donc $\lambda_1 = 0$. Et sur le même principe, tous les λ_i sont nuls, si bien que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

Inversement, supposons que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, et complétons-là en une base $(x_1, \dots, x_n)$ de E.
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, notons alors φ_i l'unique[33] application linéaire de E dans $\mathbf{K}$ telle que $\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}$.
Alors $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont des formes linéaires sur E, qui vérifient bien la condition imposée.

[33] Une application linéaire est uniquement déterminée par sa valeur sur une base de E.

Solution de l'exercice 22.30

1. Nous l'avons presque déjà fait.
Rappelons[34] que multiplier A **à droite** par $E_{i,j}$ donne une matrice dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$, qui est égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.
En particulier, tous ses coefficients diagonaux sont nuls, à l'exception de celui situé à la $j^{\text{ème}}$ colonne, et qui vaut donc $a_{j,i}$.
Donc $\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.
Bien entendu ce résultat pouvait s'obtenir à l'aide de la définition du produit matriciel et de la trace, mais c'est à réserver aux amateurs[35] de permutation de sommes et de symboles de Kronecker.

[34] Ça se retrouve avec les mains, ou sur un exemple.

[35] Dont je ne suis pas.

2. Considérons l'application $\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \mathbf{K}) \\ A & \longmapsto & (\varphi_A : M \mapsto \mathrm{tr}(AM)) \end{array} \right.$.
Il n'est pas très difficile, à l'aide de la linéarité de la trace, de prouver que Φ est linéaire.
Soit donc $A \in \mathrm{Ker}\,\Phi$, de sorte que φ_A est l'application nulle.
Alors pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\varphi_A(E_{i,j}) = \mathrm{tr}(AE_{i,j}) = 0$.
Mais par la question 1, $\mathrm{tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$.
Et donc $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = \varphi_A(E_{j,i}) = 0$, de sorte que $A = 0_n$.
Donc $\mathrm{Ker}\,\Phi = \{0_n\}$ et donc Φ est injective.
Mais $\dim \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \dim \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \mathbf{K})$, et donc Φ étant injectif, c'est un isomorphisme.
Et donc toute forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ possède un antécédent par Φ, autrement dit, pour toute forme linéaire φ, il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\varphi = \varphi_A$.

Dimensions
Notons qu'ici nous n'avons même pas besoin de connaître la dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Solution de l'exercice 22.31

Soit E un $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel de dimension n.
Alors $\mathscr{L}(E, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, l'ensemble des formes linéaires sur E est encore un $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$-espace vectoriel de dimension n, et à ce titre est isomorphe à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$, et donc en bijection avec $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$, qui est de cardinal p^n.
Donc il y a en tout p^n formes linéaires sur E, dont $p^n - 1$ non nulles.
Si les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles, il n'y a pas de bijection entre les formes linéaires non nulles et les hyperplans, puisqu'à un même hyperplan peuvent

correspondre plusieurs formes linéaires.

Plus précisément, nous avons dit que deux formes linéaires définissent le même hyperplan[36] si et seulement si elles sont proportionnelles.
Donc à chaque hyperplan correspondent $\mathrm{Card}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^* = p-1$ formes linéaires non nulles, si bien qu'il y a en tout

$$\frac{p^n-1}{p-1} = 1 + p + \cdots + p^{n-1}$$

hyperplans de E.

[36] Au sens où elles ont le même noyau.