TD 21 : Développements limités

▸ Calcul niveau 1

Exercice 21.1 **Des sommes** F

Calculer les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

1. $\cos(x) - \sin(x)$, $n = 4$
2. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, $n = 3$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x)$, $n = 3$
4. $e^{-x} + \ln(1+x)$, $n = 5$

Exercice 21.2 **Des produits** PD

Calculer les développements limités suivants en 0, à l'ordre n indiqué

1. $\sin(x)\tan(x)$, $n = 3$
2. $\dfrac{e^x}{1-x}$, $n = 3$.
3. $\sin(x)\sqrt{1+x}\ln(1-2x)$, $n = 4$
4. $\dfrac{\mathrm{sh}(3x)}{\sqrt[3]{1-2x}}$, $n = 3$
5. $x^3\sqrt{1+x}$, $n = 5$
6. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, $n = 5$.

Exercice 21.3 **Encore des produits (anticipation des ordres)** AD

Déterminer, avec le moins de calculs possibles, les développements limités suivants en 0 à l'ordre n indiqué.

1. $\left(\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right)(\cos x - 1)$, $n = 6$
2. $(1-\cos(2x))(e^{-x}-1)(x-\sin(x))$, $n = 7$

Exercice 21.4 **Avec des composées** AD

Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre n indiqué.

1. $e^{\sin x}$, $n = 4$
2. $\sqrt{1+\sin(x)}$, $n = 3$
3. $\mathrm{Arctan}(e^x)$, $n = 3$.
4. $e^{\sqrt{1+x}}$, $n = 3$.
5. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $n = 3$.

Exercice 21.5 **Avec des quotients** AD

Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre n

1. $\dfrac{1}{1+e^x}$, $n = 3$
2. $\dfrac{x}{e^x-1}$, $n = 2$
3. $\mathrm{th}(x)$, $n = 5$
4. $\dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$, $n = 3$
5. $\dfrac{1-e^{-x^2}}{x\,\mathrm{Arctan}(x)}$, $n = 5$

Exercice 21.6 **Et ailleurs qu'en zéro ?** AD

Calculer les développements limités suivant en a à l'ordre n.

1. e^x, $a = 1$, $n = 4$
2. $\ln(x)$, $a = e$, $n = 3$
3. $\sin(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$, $n = 3$.
4. $\mathrm{Arcsin}(x)^2$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $n = 2$.
5. $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $a = 1$, $n = 3$.

▸ Calcul niveau 2

Exercice 21.7 Calculer les développements limités à l'ordre n indiqué, en 0. AD

1. $\ln(3e^x + e^{-x})$, $n = 3$
2. $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$, $n = 5$
3. $(1+x)^{1/x}$, $n = 3$
4. $\dfrac{\mathrm{Arctan}\, x}{\mathrm{Arcsin}\, x}$, $n = 4$
5. $\mathrm{Arcsin}(\sin^2 x)$, $n = 6$
6. $\dfrac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x\cos x\sqrt{1-\sin x}}$, $n = 2$

Exercice 21.8 **Développement limité de la tangente** AD

1. Justifier que la tangente possède un développement limité à l'ordre 7 en 0.
2. En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, déterminer ce développement limité.
3. Proposer au moins deux autres méthodes pour obtenir le développement limité de la tangente, et les essayer à l'ordre 5.

Exercice 21.9 Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$. D

Exercice 21.10 AD

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+t}$. On notera $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ sa partie régulière.
2. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$.
3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $N^4 = 0$. Déterminer une racine carrée de $I_n + N$, c'est-à-dire une matrice dont le carré est $I_n + N$.

Exercice 21.11 Déterminer le développement limité à l'ordre 22 au voisinage de 0 de $\exp\left(\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right)$. AD

▸ Applications des développements limités

Exercice 21.12 Dérivation des développements limités PD

1. Montrer que $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}$, qui possède un $DL_1(0)$, mais que f' n'est pas continue en 0.
2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle contenant 0. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$ la partie régulière du $DL_n(0)$ de f' est obtenue en dérivant la partie régulière du $DL_{n+1}(0)$ de f.

Exercice 21.13 Calculer les limites suivantes : AD

1. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x}$.
3. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+1}$
4. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2^x}{\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(2)}$.

Exercice 21.14 Déterminer des équivalents des suites suivantes : AD

1. $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2. $u_n = \dfrac{n \sin \frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} - 1$
3. $(\star)$ $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Exercice 21.15 Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \end{array} \right.$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. PD

Exercice 21.16 Soit $\Phi : t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{e^t - 1} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. PD

On note alors $F : x \mapsto \int_0^x \Phi(t)\,dt$. Montrer que F admet un développement limité d'ordre 3 en 0, que l'on déterminera.

Exercice 21.17 Soit $f : x \mapsto \frac{-x^3 + 5x}{x^2 + 3}$. PD

Sans calculer f', déterminer l'équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ en 0, et déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Exercice 21.18 Former un développement asymptotique en 0 de la fonction $x \mapsto (ex)^x$, à la précision $x^2 \ln^2(x)$. PD

Exercice 21.19 Développement limité d'une solution d'une équation différentielle AD

Après avoir justifié qu'il existe une unique fonction $y :]-1, +\infty[\to \mathbf{R}$ solution de $2(1+x)y' - y = e^x$ et qui s'annule en 0, déterminer le $DL_4(0)$ de cette fonction.

Exercice 21.20 Former un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln\left(x \tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, à la précision $\frac{1}{x^6}$. D

Exercice 21.21 Sans calculer directement sa dérivée, prouver que $f : x \mapsto \frac{x\ln(x)}{x^2 - 1}$ se prolonge par continuité en 1, et que ce prolongement admet un point critique en 1. AD

Déterminer la nature locale de ce point critique.

Exercice 21.22 Déterminer les asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ des fonctions f suivantes, et déterminer leur position par rapport à Γ_f. AD

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$
2. $f(x) = \frac{x^2}{x+1} \mathrm{Arctan}(x)$.

Exercice 21.23 (Oral X) TD

Soit $f : [0, c] \to [0, c]$ une fonction continue admettant un développement asymptotique de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$, avec $a > 0$, $\alpha > 1$.

1. Montrer que pour u_0 assez petit, une suite $(u_n)_n$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0.
2. Déterminer alors un équivalent de u_n. Traiter le cas d'une suite vérifiant $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 21

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.1

1. On a $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)$, et donc

$$\cos(x)-\sin(x) \underset{x\to 0}{=} 1-x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right).$$

2. On a

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right).$$

Et alors, en changeant[1] x en $-x$, on a

[1] C'est de la composition à droite !

$$\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right)$$

et donc par somme

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 2-\frac{x^2}{4}+o\left(x^3\right).$$

3. On a $\ln(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}+o\left(x^3\right)=2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)$.
Et $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{5}{16}x^3+o\left(x^3\right)$.
Donc par somme, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\ln(1+2x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{3}{2}x-\frac{13}{8}x^2+\frac{113}{48}x^3+o\left(x^3\right)$.

4. On a $e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)$.
Et donc en sommant avec $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o\left(x^5\right)$.
Donc

$$e^{-x}+\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^3}{6}-\frac{5x^4}{24}+\frac{23x^5}{120}+o\left(x^5\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.2

1. On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x+o\left(x^2\right)$ et $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+o\left(x^2\right)$. Et donc

$$\sin(x)\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x+o\left(x^2\right)\right)\left(x+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2+o\left(x^3\right).$$

2. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$ et $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)$.
Donc par produit,

$$\frac{e^x}{1-x}=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(1+x+x^2+x^3+o\left(x^3\right)\right)=1+2x+\frac{5}{2}x^2+\frac{8x^3}{3}+o\left(x^3\right).$$

3. Notons que le développement limité de $\sin(x)$ comme celui de $\ln(1-2x)$ ne contiennent pas de termes constants. Donc il suffit de faire le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2, et les deux autres à l'ordre 3.

$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(1-2x)\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(-2x-2x^2-\frac{8}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)\left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -2x^2-3x^3-\frac{37}{12}x^4+o(x^4).\end{aligned}$$

4. On a $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right))$, et donc $\mathrm{sh}(3x) \underset{x\to 0}{=} 3x + \dfrac{9x^3}{2} + o\left(x^3\right)$.
Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-1/3} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{3}x + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{3} + \frac{4x^2}{18} + o\left(x^2\right).$$

Et donc

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{2}{3}x + \frac{8}{9}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Par produit, il vient finalement

$$\frac{\sin(3x)}{\sqrt[3]{1-2x}} \underset{x\to 0}{=} 3x + 2x^2 + \frac{43}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

5. Puisque nous avons déjà un x^3, il suffit de faire le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$.
C'est $1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, de sorte que

$$x^3\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} x^3 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^5}{8} + o(x^5).$$

6. Puisque le premier terme non nul du développement limité de $\ln(1+x)$ est de degré 1, il suffit d'utiliser un $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+x}$ et un $DL_5(0)$ de $\ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)x^5 + o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + \frac{137}{60}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

Question subsidiaire *: au vu des calculs précédents, pensez-vous pouvoir exprimer le développement limité à n'importe quel ordre de* $\ln(1+x)/(1+x)$ *en fonction des nombres harmoniques* $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *?*

Solution de l'exercice 21.3

Pour faire le moins de calculs possibles, il faut être capable d'anticiper les ordres auxquels réaliser nos développements limités afin de ne pas manipuler plus de termes que nécessaire.

1. Puisque les deux premiers termes du $DL_6(0)$ de $\ln(1+x)$ sont $x - \frac{x^2}{2}$, $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ va commencer par un terme en x^3.
Donc il suffit d'obtenir un $DL_3(0)$ de $\cos x - 1$.
Et puisque $\cos x - 1$ va commencer par un terme en x^2, il suffit d'un $DL_4(0)$ de $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.
Donc

$$\begin{aligned}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right)(\cos x - 1) &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{8} + o(x^6) + o(x^7) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^5}{6} + \frac{x^6}{8} + o(x^6).\end{aligned}$$

2. De même, $1 - \cos(2x)$ va commencer par un terme en x^2, et donc il suffit d'un $DL_5(0)$ de $(e^{-x} - 1)(x - \sin x)$.
Et puisque $e^{-x} - 1$ commence par x, il suffit d'un $DL_3(0)$ de $x - \sin(x)$.
Puisque $x - \sin(x)$ commence par un x^3, il suffit d'un $DL_2(0)$ de $e^{-x} - 1$.
Et puisque $(e^{-x} - 1)(x - \sin x)$ commence par un x^4, il suffit d'un $DL_3(0)$ de $1 - \cos(2x)$.
Ceci étant dit, il n'y a plus qu'à calculer :

$$\begin{aligned}(1-\cos(2x))(e^{-x}-1)(x-\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)\right)\left(-x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^6}{3} + \frac{x^7}{6} + o(x^7).\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.4

Détails
L'égalité des o provient simplement du fait que $\sin^4 x \sim x^4$.

1. Puisque $\sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1+\sin(x)+\dfrac{\sin^2 x}{2}+\dfrac{\sin^3(x)}{6}+\dfrac{\sin^4(x)}{24}+\underbrace{o\left(\sin^4(x)\right)}_{=o(x^4)}$.

   Mais $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^4)$, et donc
   $$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4),\ \sin^3(x) \underset{x\to 0}{=} x^3+o(x^4),\ \sin^4(x) \underset{x\to 0}{=} x^4+o(x^4).$$
   Donc
   $$e^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4) = 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

2. De même, $\sqrt{1+\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+\dfrac{\sin x}{2}-\dfrac{\sin^2(x)}{8}+\dfrac{\sin^3 x}{16}+\underbrace{o(\sin^3 x)}_{=o(x^3)}$.

   Donc en reprenant les développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 des puissances de sin calculées à la question précédente,
   $$\sqrt{1+\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{48}+o(x^3).$$

3. Une petite subtilité ici : lorsque $x\to 0$, $e^x \to 1$.
   Donc il nous faut un développement limité à l'ordre 3 de l'arctangente au voisinage de 1.
   La formule de Taylor-Young, qui s'applique puisque l'arctangente est bien $\mathscr{C}^3$, peut nous fournir ce développement limité, en notant que
   $$\mathrm{Arctan}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ et } \mathrm{Arctan}^{(3)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$
   Il vient donc
   $$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(x-1)^2+\frac{1}{12}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right).$$
   Et par composition avec le $DL_3(0)$ de e^x,
   $$\mathrm{Arctan}(e^x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3+o(x^3).$$
   Alternative : on peut faire le changement de variable $h=x-1$, de sorte que $\mathrm{Arctan}(x)=\mathrm{Arctan}(1+h)$, et chercher alors un développement limité en 0 de $f(h)=\mathrm{Arctan}(1+h)$.
   Il est toujours possible d'utiliser Taylor, mais on peut également intégrer un $DL_2(0)$ de $f'(h)=\dfrac{1}{1+(1+h)^2}$. On a alors
   $$\frac{1}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-h-\frac{h^2}{2}+h^2+o(h^2)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+o(h^2).$$
   Et donc par intégration,
   $$f(h) \underset{h\to 0}{=} \underbrace{f(0)}_{=\frac{\pi}{4}}+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{4}+\frac{h^3}{12}+o(h^3).$$
   La conclusion est alors la même, en composant par le $DL_3(0)$ de e^x.

4. $e^{\sqrt{1+x}} = e\times e^{\sqrt{1+x}-1} \underset{x\to 0}{=} e\left(1+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{48}x^3+o(x^3)\right)$.

5. $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)}.\end{aligned}$$

Notons $u = \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32}$, de sorte que $u^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{16} - \frac{x^3}{32} + o(x^3)$ et $u^3 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{64} + o(x^3)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)} &= \sqrt{1+u}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(x^3)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{32} + \frac{x^3}{64} - \frac{x^2}{128} + \frac{x^3}{256} + \frac{x^3}{1024} + o(x^3)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128} + \frac{21}{1024}x^3 + o(x^3).\end{aligned}$$

Et donc enfin,

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{2} + \sqrt{2}\frac{x}{8} - \sqrt{2}\frac{5x^2}{128} + \sqrt{2}\frac{21}{256}x^3 + o(x^3).$$

Solution de l'exercice 21.5

1. On a $1 + e^x \underset{x\to 0}{=} 2 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$.
Et par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + o(x^3) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^3\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + o(x^3)\end{aligned}$$

2. Notons tout de suite que le premier terme non nul de $e^x - 1$ va être x, qui va se simplifier avec le numérateur.
Il est donc judicieux de partir d'un développement limité de $e^x - 1$ à l'ordre 3,

$$\begin{aligned}\frac{x}{e^x - 1} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2).\end{aligned}$$

3. On a $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$. Il nous faut donc un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ et un $DL_5(0)$ de $\operatorname{sh}(x)$.

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

Et $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)$.
Donc par produit, $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

Alternative : on peut aussi noter que la dérivée de th est $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$, et donc calculer un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ et l'intégrer.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + x^2 + \frac{x^4}{12} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4 + o(x^4)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Et donc $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\mathrm{th}(0)} = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

4. Encore une fois, essayons d'être prévoyants pour ne faire ni pas assez, ni trop de calculs.
Le numérateur va commencer par un terme en x^2, quand le numérateur va commencer par un terme en x.
Comme nous allons devoir simplifier par x, il faut donc commencer nos développements limités à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)\left(1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Optimal ?
Peut-être avez vous remarqué que le terme en x^3 du second facteur ne nous a en fait pas servi (car le terme qui provenait du numérateur commençait toujours par x). Autrement dit, il suffit de faire un DL_2 du dénominateur. Avec un peu d'entraînement, vous pourrez peut-être le repérer et économiser un peu de temps sur les calculs.

5. Anticipons les ordres : le dénominateur est équivalent à x^2, et donc pour pouvoir utiliser le DL de $\frac{1}{1+u}$, il faudra commencer par simplifier le dénominateur et le numérateur par x^2.
Donc il nous faut un DL_7 de chacun d'entre eux.
Puisqu'ils sont pairs, il nous suffit en réalité d'un DL_6. On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{1 - e^{-x^2}}{x \operatorname{Arctan} x} = &\underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \left(1 - x^2 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} + o\left(x^7\right)\right)}{x\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^6\right)\right)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^5\right)}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^5\right)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5}\right) + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5}\right)^2 + o\left(x^5\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{4}{45}x^4 + o\left(x^5\right).
\end{aligned}$$

Détails
On a composé avec le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-u}$, en posant $u = \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{5}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.6

1. Notons $h = x - 1$. Alors
$$e^x \underset{x\to 1}{=} e^{h+1} \underset{x\to 1}{=} ee^h \underset{x\to 1}{=} e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)\right).$$

2. Notons $h = x - e$. Alors
$$\ln(x) = \ln(e+h) = 1 + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) \underset{x\to e}{=} 1 + \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2e^2} + \frac{h^3}{3e^3} + o(h^3).$$

3. Posons $h = x - \frac{\pi}{4}$, de sorte que
$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin(h) + \cos(h)\right).$$
Puisque $h \longrightarrow 0$, on a donc, utilisant les DL de sin et cos en 0 :
$$\sin(x) \underset{x\to\pi/4}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right).$$

4. Notons $h = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alors par la formule de Taylor-Young, on obtient
$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 1/\sqrt{2}}{=} \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}h + h^2 + o(h^2).$$
Et donc par produit,
$$\operatorname{Arcsin}(x)^2 \underset{x\to 1/\sqrt{2}}{=} \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}h + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)h^2 + o(h^2).$$

Détails

Les deux premières dérivées de l'arcsinus sont $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

5. Posons $h = x - 1$. Alors
$$\begin{aligned}
\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+h)}{\sqrt{1+h}} &\underset{h\to 0}{=} \frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)}\\
&\underset{h\to 0}{=} \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)\right)\\
&\underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4} + \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{4} + o(h^3)\\
&\underset{h\to 0}{=} h - h^2 + \frac{23}{24}h^3 + o(h^3).
\end{aligned}$$

Astuce

Le numérateur commence par h, donc on n'a besoin que d'un $DL_2(0)$ du dénominateur.

Et donc
$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{x\to 1}{=} (x-1) - (x-1)^2 + \frac{23}{24}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

Solution de l'exercice 21.7

1. Au voisinage de 0, on a
$$3e^x + e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 3 + 3x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 4 + 2x + 2x^2 + \frac{x^3}{3}.$$
Donc $\ln(3e^x + e^{-x}) \underset{x\to 0}{=} \ln(4) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)$.
En utilisant alors le $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$, on arrive à
$$\ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

2. $\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + o(x^6)$.
Donc $\sqrt{1 - \sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + o(x^6)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)}$.

On reprend alors $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+o(u^2)$, avec $u=\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{8}$, et on obtient après calculs,

$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} \frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{x^2}{8}+\frac{7}{128}x^4+o(x^4)\right).$$

3. Par définition, $(x+1)^{1/x}=\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$. Mais

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3).\end{aligned}$$

Méthode
On va jusqu'à l'ordre 4 pour le $\ln(1+x)$, puisque la division par x va nous faire perdre un ordre.

Et donc

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/x} &= e\times\exp\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)\\ &= e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2-\frac{7}{16}x^3+o(x^3)\right).\end{aligned}$$

4. Commençons par noter que nous savons que les fonctions Arcsin et Arctan sont toutes deux équivalentes à x en 0.
Et que donc pour calculer un développement limité du quotient, nous allons commencer par diviser par x pour pouvoir utiliser le DL de $\frac{1}{1+u}$.
Donc il va nous falloir des $DL_5(0)$ de Arctan et Arcsin.
Rappelons que le développement limité de Arctan s'obtient en intégrant celui de $\frac{1}{1+x^2}$.
Pour avoir Arctan à l'ordre 5, il suffit d'avoir celui de $\frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 4.
Or, $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2+o(x^2)$, et donc

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1-x^2+x^4+o(x^4)$$

Donc en intégrant,

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\operatorname{Arctan}(0)}_{=0}\,x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5).$$

De même, on obtient le $DL_5(0)$ de Arcsin en intégrant le $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Mais $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2)$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^4).$$

Et donc

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\operatorname{Arcsin}(0)}_{=0}+x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+o(x^5).$$

Reste alors à calculer le quotient :

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{\operatorname{Arcsin}(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)}{x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+o(x^5)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+o(x^4)}{1+\frac{x^2}{6}+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)}.\end{aligned}$$

Commençons par calculer le DL de $\dfrac{1}{1+\frac{x^2}{6}+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)}$. La méthode est classique : composer avec le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+u^4+o(u^4)$.
Il vient donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\frac{x^2}{6}+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)} &= 1-\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)\right)+\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)\right)^2\\ &\quad \underbrace{-\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)\right)^3-\left(\frac{x^2}{6}+\frac{3}{40}x^4+o(x^4)\right)^4}_{=o(x^4)}+o(x^4)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{6}-\frac{17}{360}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

Remarque
Notons que nous sommes en fait en train de calculer le $DL_4(0)$ de $\frac{x}{\mathrm{Arcsin}(x)}$.

Remarque
Si l'on voit tout de suite que les deux derniers termes ne vont faire apparaître que des degrés supérieurs à 4, il n'est pas utile de les calculer.

Et donc en multipliant ensuite par $1-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^4}{5}+o(x^4)$, on obtient

$$\frac{\mathrm{Arctan}\, x}{\mathrm{Arcsin}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4).$$

5. La question précédente rappelle comment obtenir le développement limité de l'arcsinus. Avant de nous lancer dans des calculs, remarquons que le terme de plus bas degré de $\sin^2 x$ est de degré 2.
Et donc que pour obtenir un développement limité à l'ordre 6 de $\mathrm{Arcsin}(\sin^2(x))$, il suffit de composer un $DL_3(0)$ de Arcsin avec le $DL_6(0)$ de $\sin^2(x)$.

Autrement dit
Pour $k \geqslant 4$,
$$(\sin^2 x)^k \underset{x\to 0}{=} o(x^6).$$

On a donc $\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^6)$, et donc

$$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+o(x^6).$$

Et $\mathrm{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3)$, de sorte que par composition,

$$\mathrm{Arcsin}(\sin^2(x)) \underset{x\to 0}{=} \sin^2(x)+\frac{1}{6}(\sin^2 x)^3+\underbrace{o(\sin^3(x))}_{=o(x^6)} \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{19}{90}x^6+o(x^6).$$

6. Commençons par nous intéresser au dénominateur : on a $x\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x$, de sorte que le terme non nul de plus petit degré dans un développement limité de $x\cos(x)\sqrt{1-\sin x}$ sera de degré 1.
Donc pour calculer un développement limité du quotient, il nous faudra commencer par diviser par x pour composer avec le DL de $\frac{1}{1+u}$.
Nous avons donc besoin d'un $DL_3(0)$ du numérateur et du dénominateur.
On a

$$\ln(1+e^x)-\ln(2) = \ln(2+e^x-1)-\ln(2) = \ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^3).$$

Puis $x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+e^x)-\ln(2)}{x\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x^2}{4}+o(x^2).\end{aligned}$$

Détails
On a ici composé avec le DL de $\frac{1}{1-x}$.

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}} = (1-\sin(x))^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{3}{8}\sin^2(x) + o(\sin^2(x))$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$

Et donc enfin, par produit,

$$\frac{\ln(1+e^x)-\ln(2)}{x\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.8

1. La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, donc possède des développements limités de tout ordre.
Notons dès à présent que la tangente étant impaire, il est inutile de chercher des termes de degré pair.
2. Nous connaissons déjà le terme de degré 1 du DL, c'est x.
Donc notons $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + o(x^7)$ le développement limité cherché.
Alors $1+\tan^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + 2a_3x^4 + (a_3^2 + 2a_5)x^6 + o(x^6)$.
Mais $\tan' = 1 + \tan^2$, donc en intégrant ce développement limité, ce qui fait apparaître la constante $\tan(0) = 0$, il vient

$$x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + o(x^7) = \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2a_3}{5}x^5 + \frac{a_3^2+2a_5}{7}x^7 + o(x^7).$$

Par identification des parties régulières, on en vient à

$$a_3 = \frac{1}{3},\ a_5 = \frac{2}{15}, a_7 = \frac{17}{315}.$$

3. Une première option a été évoquée en cours : utiliser le développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 de tan pour en déduire les développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\tan' = 1+\tan^2$, puis en intégrant en déduire le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de tan.
Dont on déduit le développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de $\tan' = 1+\tan^2$, puis le développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 de tan, etc.

Une autre option serait de noter que $\tan' = \dfrac{1}{\cos^2}$.
Mais, $\dfrac{1}{\cos^2 x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)^2} = \left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+o(x^6)\right)^{-2}$.
Or un calcul[2] nous donne donc

$$\cos(x)^{-2} \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o(x^6).$$

Ne reste alors qu'à intégrer.

Une autre méthode est de revenir à la définition, en posant $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, et en calculant un développement limité de ce quotient.
Enfin, une option encore différente serait de noter que tan étant impaire, elle admet un développement limité de la forme $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$.
Donc $\tan(x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + 2a_3x^4 + o(x^5)$, puis $\tan(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + 3a_3x^5 + o(x^5)$, et

$$\tan(x)^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o(x^5).$$

Mais par ailleurs, $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$ et $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$.
Donc par composition de développements limités,

$$x \underset{x\to 0}{=} \tan(x) - \frac{\tan(x)^3}{3} + \frac{\tan(x)^5}{5} + o(x^5)$$

[2] Que je ne détaillerai pas....

soit encore

$$x \underset{x\to 0}{=} x + \left(a_3 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(a_5 - \frac{3a_3}{3} + \frac{1}{5}\right)x^5 + o(x^5).$$

Et donc par identification des coefficients, $a_3 = \dfrac{1}{3}$ et $a_5 - a_3 + \dfrac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow a_5 = \dfrac{2}{15}$.
Lorsque vous avez le choix, vous privilégierez la première des trois méthodes.

Solution de l'exercice 21.9

Il faut être assez soigneux sur les ordres. En effet, on a $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)\right)$.
Pour pallier à la division par x^2, il va nous falloir un $DL_5(0)$ de $\ln\dfrac{\tan x}{x}$, ce qui nécessitera donc un $DL_6(0)$ de $\tan(x)$.

On a[3] $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$.
Donc $\dfrac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o\left(x^5\right)$.
Donc $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o\left(x^5\right)\right)$.
Posons alors $u = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o(x^5)$, de sorte que

$$u^2 = \frac{x^4}{9} + o(x^5),\ u^3 o(x^5).$$

Et donc $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{7}{90}x^4 + o(x^5)$.
Donc $\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{90}x^2 + o\left(x^3\right)$.
En composant par l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} e^{1/3}e^{\frac{7}{90}x^2+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} e^{1/3}\left(1 + \frac{7}{90}x^2 + o(x^3)\right).$$

[3] Cf l'exercice précédent.

Solution de l'exercice 21.10

1. C'est du cours, c'est $(1+t)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.
   On a donc $\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3 + o(t^3)$.
2. On a donc

   $$1 + t = \sqrt{1+t}^2 \underset{t\to 0}{=} \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + o(t^3)\right)^2 \underset{t\to 0}{=} \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right)^2 + o(t^3).$$

   Mais par ailleurs, $R : t \mapsto 1 + t - \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3\right)^2$ est une fonction polynomiale, donc équivalente à son terme non nul de plus bas degré.
   Puisque $R(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(t^3\right)$, c'est donc que ce terme de degré non nul est de degré strictement supérieur à 3.
   Et donc R est un polynôme[4] divisible par X^4 : il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $R = X^4 Q$. Et donc

   $$1 + X = R(X) + (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 \Leftrightarrow 1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X).$$

   [4] On a ici identifié les polynômes et les fonctions polynomiales, ce qui est légitime puisqu'on a une bijection entre les deux.
3. Par la question précédente, on a

   $$I_n + N = (a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3)^2 + \underbrace{N^4}_{=0} Q(N) = (a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3)^2.$$

   Ce point n'est en fait pas complètement clair pour l'instant, et il faudra quelques outils sur les «polynômes de matrices» qui seront développés l'an prochain pour s'en convaincre, l'idée étant que les calculs qu'on fait sur les coefficients de polynômes restent valables pour des matrices.

Mais ici on peut s'en convaincre «à la main», à l'aide des valeurs des a_i :

$$\begin{aligned}(a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3)^2 &= \left(I_n + \frac{N}{2} - \frac{1}{8}N^2 + \frac{1}{16}N^3\right)^2 \\ &= I_n + N + \frac{N^2}{4} - \frac{N^2}{4} + \frac{1}{8}N^3 - \frac{1}{8}N^3 + \underbrace{N^4\left(\frac{1}{16}I_n + \frac{1}{64}I_n - \frac{1}{64}N + \frac{1}{256}N^2\right)}_{=N^4 Q(N)} \\ &= I_n + N.\end{aligned}$$

Et donc une racine carrée de $I_n + N$ est $a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3$.

Solution de l'exercice 21.11

Il y a bien entendu une astuce. Il s'agit de reconnaître que l'expression dans la parenthèse est la partie régulière du développement limité d'ordre 20 au voisinage de 0 de $\ln(1+x)$.

On a donc $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o\left(x^{20}\right)$.

Et donc

$$\begin{aligned}\exp\left(\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right) &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\ln(1+x) - \frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} + o\left(x^{22}\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} e^{\ln(1+x)} \exp\left(-\frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} + o\left(x^{22}\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} (1+x)\left(1 - \frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} + o\left(x^{22}\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} (1+x) - \frac{x^{21}}{21} + \frac{x^{22}}{22} - \frac{x^{22}}{21} + o\left(x^{22}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{1}{21}x^{21} - \frac{1}{462}x^{22} + o\left(x^{22}\right).\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 21.12

1. On a $0 \leqslant |f(x)| \leqslant x^2$, si bien que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Donc f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

   Par ailleurs, puisque $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{=} O(1)$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^2) \underset{x\to 1}{=} o(x)$.
Et donc f possède un développement limité d'ordre 1 en 0 qui est $f(x) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + o(x)$.
Ceci suffit à justifier que f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$, et puisqu'elle était clairement dérivable sur $\mathbf{R}^*$, f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

   Pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
Or, $x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, alors que $\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$ n'a pas de limite en 0.
Donc f' n'est pas continue en 0, et par conséquent n'a pas de développement limité à l'ordre 0 (ni à aucun ordre).

   Détails
   Pour prouver la non-existence de cette limite, on peut par exemple utiliser une caractérisation séquentielle avec les suites $x_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ et $y_n = \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}$.

2. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, alors la formule de Taylor-Young nous garantit l'existence des développements limités à tout ordre de f mais aussi de f' (qui est également de classe $\mathscr{C}^\infty$).
On a alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{n+1})$ et

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

   Mais la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est

$$x \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(0)}{k!} x^k.$$

Donc le $DL_n(0)$ de f' s'obtient bien par dérivation du $DL_{n+1}(0)$ de f.

Solution de l'exercice 21.13

1. On a $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} = \exp\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)\right)$.
Mais $\dfrac{1}{1-\cos(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2}$ et
$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{6}+o(x^2).$$
Donc
$$\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{3}+o(1).$$
Et donc par composition par l'exponentielle, la limite cherchée est $e^{-1/3}$.

⚠ Attention !
Il n'est pas nécessaire ici de faire un développement limité de l'exponentielle.

2. On a $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x} = \exp\left[x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-x\right]$.
On $\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x^4}+o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.
Donc $x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-x \underset{x\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{2x}+o(x)$.
On en déduit que $x^3\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)-x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^3}e^{-x}=1$.
3. Le début est similaire à ce que nous aurions fait sans les développements limités : on factorise par le terme prépondérant (qui ici se trouve être x dans chacun des deux termes) :
$$\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x} = x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$
Posons alors $X=\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On a donc
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1+X^2+X^3}-\sqrt{1+X^2} &\underset{X\to 0}{=} 1+\frac{1}{3}X^2+o(X^2)-1-\frac{1}{2}X^2+o(X^2)\\ &\underset{X\to 0}{=} -\frac{1}{6}X^2+o(X^2).\end{aligned}$$
Et donc $\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{6x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque
Nous n'avons finalement utilisé que les développements limités à l'ordre 1. Donc nous aurions déjà été capables de calculer cette limite avant ce chapitre.

4. Posons $h=x-2$, de sorte que $h \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 0$.
Alors $2^x = e^{x\ln 2} = e^{(h+2)\ln(2)} = \underbrace{e^{2\ln 2}}_{=4}e^{h\ln(2)}$.
Soit encore $2^x \underset{x\to 2}{=} 4\left(1+h\ln(2)+o(h)\right)$.
Par ailleurs, $x^2=(2+h)^2=4+4h+h^2 \underset{h\to 0}{=} 4+4h+o(h)$.
Et donc $x^2-2^x \underset{h\to 0}{=} 4(1-\ln 2)h+o(h)$.
C'est-à-dire $x^2-2^x \underset{x\to 0}{\sim} 4(1-\ln(2))(x-2)$.
Par ailleurs, par Taylor-Young à l'ordre 1 en 2,
$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 2}{=} \operatorname{Arctan}(2)+\frac{1}{5}(x-2)+o(x-2).$$
Donc $\operatorname{Arctan}(x)-\operatorname{Arctan}(2) \underset{x\to 2}{\sim} \frac{1}{5}(x-2)$. Et donc par quotient[5]
$$\frac{x^2-2^x}{\operatorname{Arctan}(x)-\operatorname{Arctan}(2)} \underset{x\to 2}{\sim} 20(1-\ln(2)) \underset{x\to 2}{\longrightarrow} 20(1-\ln(2)).$$

[5] D'équivalents.

Solution de l'exercice 21.14

1. Commençons par factoriser par $\sqrt{n}$: $u_n = \sqrt{n}\left(2 - \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$. Et alors en utilisant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ en 0,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left[2 - \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{n}}.$$

2. On a donc $n\sin\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{6n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right)\right)$ et de même

$$e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\frac{n\sin\frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^2}}-1} &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1 - \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)}{1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

Et donc en retranchant 1, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

3. On a $\sqrt[n+1]{n+1} = e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)}$ et de même $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$.
Mais par croissances comparées, $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + o\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right).$$

Sur le même principe,

$$e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Remarque

Puisque $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ on a

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$

Et donc nous pouvons regrouper les deux o en un seul.

Mais

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{n\ln(n+1) - (n+1)\ln n}{n(n+1)} = \frac{-\ln n + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.$$

$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = o(\ln n)$.

Il vient donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Malheureusement, puisque $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$, ceci ne suffit pas à trouver un équivalent, seulement à dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$...

Poussons donc le développement limité un ordre plus loin :

$$e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).$$

Et de même,

$$e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(n)^2}{n^2} + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n+1}{n+1} + \frac{\ln n}{n}\right)\right) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(-\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)(1+o(1)) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Détails
On a utilisé ici une identité remarquable

Caramba, encore raté ! $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$.
Toutefois, on semble s'approcher, mais sans avoir très envie de faire apparaître les termes d'ordre 3 dans le développement limité.
Rusons un peu et notons que

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n+1}{n+1} + \frac{\ln n}{n}\right)\right) + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.
\end{aligned}$$

Détails
La clé, c'est que cette fois, on a

$$\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Solution de l'exercice 21.15

On a

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc déjà f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Étudions la dérivabilité en 0 de ce prolongement : pour $x > 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}.$$

Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\frac{1}{6}$.

Par ailleurs, il est évident que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ car différence de deux fonctions qui le sont, et alors pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Cette dérivée est évidemment continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par opérations usuelles.
Enfin, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{x^4 + o(x^4)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^3)}{x^4 + o(x^4)}\\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6} = f'(0).
\end{aligned}$$

Remarque
Nous avons ici dû calculer 3 limites. Nous verrons bientôt un théorème (dit de la limite de la dérivée) qui nous permettra de n'en calculer que 2 pour prouver le même résultat.

Et donc f' est continue en 0, et donc est continue sur $\mathbf{R}_+$.
Donc f se prolonge bien une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Alternative : on a

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2 + o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x}{6} + o(x)}{1 + o(x)} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{6} + o(x).$$

Ainsi, nous avons là le développement limité en 0 à l'ordre 1 de f.
Si on prolonge f en posant $f(0) = 0$ (ce qui est légitime puisque le terme constant du DL ci-dessus est nul), alors f possède un développement limité d'ordre 1 en 0, donc est non seulement continue, mais elle est en plus dérivable, avec $f'(0) = -\frac{1}{6}$.
Et alors pour prouver la continuité de f' en 0, il faut, comme ci-dessus, calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 21.16

On a $\frac{t^2}{e^t - 1} \underset{t\to 0}{=} t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$.
En particulier, $\frac{t^2}{e^t - 1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, et donc Φ est continue en 0 et donc sur $\mathbf{R}$, et donc possède bien au moins une primitive sur $\mathbf{R}_+$. Ce qui justifie la définition de F.
Et alors, par intégration de développements limités[6] :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

[6] La constante d'intégration est ici nulle puisque nous cherchons la primitive qui s'annule en 0.

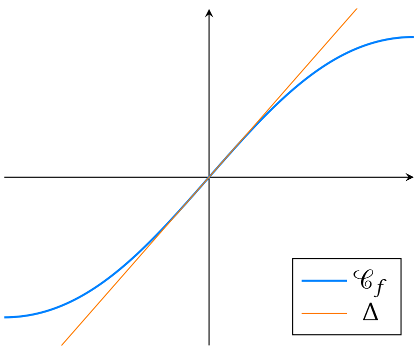
SOLUTION DE L'EXERCICE 21.17

Notons que

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{-x^3 + 5x}{1 + \frac{x^2}{3}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}(5x - x^3)\left(1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{5x}{3} - \frac{8x^3}{9} + o\left(x^3\right).$$

Donc en particulier, le développement limité d'ordre 1 en 0 de $f(x)$ est $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{5x}{3} + o(x)$, si bien que l'équation de la tangente en 0 est $y = \frac{5x}{3}$.
Par ailleurs, $f(x) - \frac{5x}{3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{8x^3}{9}$.
Et deux fonctions équivalentes en 0 sont de même signe sur un voisinage de 0.
Donc si V est un tel voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de Δ sur $V \cap \mathbf{R}_-$ et en dessous sur $V \cap \mathbf{R}_+$.
Autrement dit, $\mathscr{C}_f$ traverse Δ en 0.

Remarque
En revanche, sans davantage de calculs, il n'est pas possible de déterminer V, l'information que nous avons est juste locale.
Pour en savoir plus, il faudrait étudier le signe de $x \mapsto f(x) - \frac{5}{3}x$ (ce qui se fait ici très bien).



SOLUTION DE L'EXERCICE 21.18

Souvenons nous que $(ex)^x = e^x e^{x\ln(x)}$.
Mais lorsque $x \to 0$, $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $e^{x\ln(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x\ln(x) + \frac{x^2\ln^2(x)}{2} + o\left(x^2\ln^2(x)\right)$.

Puisque d'autre part, $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, il vient, par produit

$$(ex)^x \underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + x\ln(x) + \frac{x^2\ln^2(x)}{2} + o(x^2\ln^2(x))\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + x\ln(x) + x + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + \underbrace{x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{1}{2}x^3\ln^2(x) + \frac{1}{4}x^4\ln^2(x) + o(x^2)}_{=o(x^2\ln^2(x))}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + o(x^2\ln^2(x)).$$

Remarque : une des grosses difficultés de cet exercice est de bien réussir à ordonner les termes et à décider lequel est négligeable devant l'autre. Au moindre doute, revenir au quotient.
Par exemple, $\dfrac{x^2\ln(x)}{x^2\ln^2(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, si bien que $x^2\ln(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^2\ln^2(x)\right)$.
Et de même, $\dfrac{x}{x\ln(x)} = \dfrac{1}{\ln(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, et donc $x \underset{x\to 0}{=} o(x\ln(x))$. Ce qui explique l'ordre dans lequel se trouvent les deux premiers termes.
Rappelons tout de même que pour des fonctions qui tendent vers 0, c'est celle qui tend le plus vite vers 0 qui est négligeable devant l'autre. Or $x\ln(x)$ tend moins vite vers 0 que x, puisqu'égale à x fois une fonction qui tend vers l'infini.

Rédaction ✎
Une bonne habitude dans les développements asymptotiques est, comme dans les développements limités, d'ordonner les termes de sorte que chacun soit négligeable devant le précédent.

Solution de l'exercice 21.19

Sur $]1, +\infty[$, l'équation différentielle s'écrit sous forme normalisée $y' - \dfrac{y}{2(1+x)} = \dfrac{e^x}{2(1+x)}$.
Et alors les résultats généraux sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 nous garantissent l'existence et l'unicité d'une solution satisfaisant la condition initiale $y(0) = 0$.

Nous avons déjà justifié en cours qu'une telle solution y est de classe $\mathscr{C}^1$.
Mais alors $y'(x) = \dfrac{e^x}{2(1+x)} - \dfrac{y(x)}{2(1+x)}$, si bien que y' est une somme et un produit de fonctions dérivables, donc est dérivable sur$]-1, +\infty[$. Et par conséquent y est deux fois dérivable.
Puis sur le même principe, par somme/produit de fonctions deux fois dérivables, y' est deux fois dérivable, si bien que y est trois fois dérivable.
De proche en proche, on prouve que y est de classe $\mathscr{C}^\infty$, et donc en particulier est au moins de classe $\mathscr{C}^4$.
Ce qui suffit à appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre 5, et donc à garantir l'existence d'un $DL_5(0)$ de y.

Détails
Ce résultat est plutôt intuitif, il sera prouvé en détails dans le chapitre consacré à la dérivation.

Notons alors $y(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{y(0)}_{=0} + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5)$ ce $DL_5(0)$ de y.

Comme expliqué à l'exercice 12, on a alors $y'(x) \underset{x\to 0}{=} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + o(x^4)$.

Il vient alors

$$2(1+x)\left(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + o(x^4)\right) - \left(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + o(x^4)\right) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4).$$

On identifie alors les coefficients du DL, de sorte que

$$\begin{cases} 2a_1 = 1 \\ a_1 + 4a_2 = 1 \\ 6a_3 + 3a_2 = \frac{1}{2} \\ 8a_4 + 5a_3 = \frac{1}{6} \\ 10a_5 + 7a_4 = \frac{1}{24} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ a_2 = \frac{1}{8} \\ a_3 = \frac{1}{48} \\ a_4 = \frac{1}{128} \\ a_5 = -\frac{1}{768} \end{cases}$$

Solution de l'exercice 21.20

Il s'agit de remarquer que $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et d'utiliser alors le développement limité de la tangente en 0 (voir l'exercice 8) :

$$\tan\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{2}{15}\frac{1}{x^5} + \frac{17}{315}\frac{1}{x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right).$$

Il s'agit ensuite de multiplier par x puis de composer avec le développement limité à l'ordre 6 de $\ln(1+x)$.

$$\ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{3x^2}+\frac{7}{90x^4}+\frac{62}{2835x^6}+o\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

Solution de l'exercice 21.21

Cherchons un développement limité de f au voisinage de 1.
Pour cela, procédons au changement de variable habituel $x = 1+h$, avec $h \to 0$. Alors

$$\begin{aligned}
f(1+h) &\underset{h\to1}{=} \frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \frac{(1+h)\ln(1+h)}{2h+h^2}\\
&\underset{h\to1}{=} (1+h)\frac{h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)}{2h+h^2}\\
&\underset{h\to1}{=} (1+h)\frac{1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)}{2+h}\\
&\underset{h\to1}{=} (1+h)\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)\right)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}\\
&\underset{h\to1}{=} \left(1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{6}+o(h^2)\right)\frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right)\\
&\underset{h\to1}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{12}h^2+o(h^2).
\end{aligned}$$

Méthode

On a repéré que le dénominateur commence par h, donc qu'il faudra diviser par h, et donc on cherche directement un développement limité à l'ordre 3 du numérateur.

Autrement dit, $f(x) \underset{x\to1}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{12}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$.
En particulier, $f(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=\frac{1}{2}$.
Par ailleurs f possède un développement limité d'ordre 1 en 1, qui est

$$f(x) \underset{x\to1}{=} \frac{1}{2}+0\times(x-1)+o(x-1).$$

Donc f (prolongée par continuité) est dérivable en 1, et $f'(1)=0$.
Voici donc qui prouve l'existence du point critique.
Enfin, $f(x)-f(1) \underset{x\to1}{=} -\frac{1}{12}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right) \underset{x\to1}{\sim} -\frac{1}{12}(x-1)^2$.

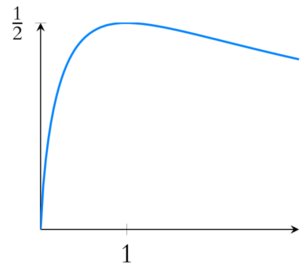


Figure 21.1– La fonction f.

Donc au voisinage de 1, $f(x)-\frac{1}{2}$ est du signe de $-\frac{1}{12}(x-1)^2$, c'est-à-dire négatif.
Autrement dit, il existe un voisinage V de 1 tel que $\forall x\in V, f(x)-f(1)\leqslant 0 \Leftrightarrow f(x)\leqslant f(1)$.
Donc f possède un maximum local en 1.

Solution de l'exercice 21.22

1. On a $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}} = x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$.
   Mais $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Et donc $\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.
   Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}+o(1)$.
   Donc $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc la droite d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote oblique à Γ_f au voisinage de $+\infty$.
   Pour déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote, il nous faut pousser le développement limité un ordre plus loin : pour simplifier les notations, posons $X=\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a

$$\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \sqrt{\frac{1}{1-X}} \underset{X\to0}{=} \sqrt{1+X+X^2+o(X^2)} \underset{X\to0}{=} 1+\frac{1}{2}(X+X^2)-\frac{1}{8}X^2+o(X^2).$$

Soit encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.
Donc en particulier, $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$.
Puisque cet équivalent est positif, au voisinage de $+\infty$, $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right)$ est aussi positif, et donc Γ_f est située au dessus de son asymptote oblique.

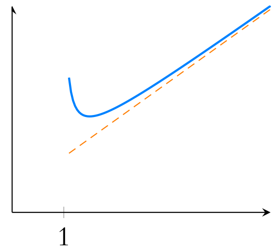


Figure 21.2– Γ_f et son asymptote

2. On a $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$, et donc au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{x^2}{x+1} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x-1\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par ailleurs, on a $\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$, de sorte qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Et par produit, il vient donc

$$\frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}-1+\left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En particulier, on en déduit que $\frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x)-\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc la droite d'équation $y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}-1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
Et d'autre part, $\frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x)-\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}-1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{1}{x}$ est du signe de x au voisinage de $+\infty$, et donc Γ_f est située au dessus de son asymptote.

Solution de l'exercice 21.23

1. Puisque f est continue, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Par ailleurs, $f(x)-x \underset{x\to 0}{\sim} -ax^\alpha$, qui est négatif au voisinage de 0.
Donc il existe $\eta\in\mathbf{R}_+^*$ tel que $\forall x\in[0,\eta]$, $f(x)-x\leqslant 0$ et donc $f(x)<x$.
Et donc pour $u_0\in[0,\eta]$, (u_n) est décroissante et à valeurs positives donc elle converge vers un point fixe de f, qui est encore[7] dans $[0,\eta]$. Mais par définition de η, 0 est le seul tel point fixe.

[7] C'est la limite d'une suite à valeurs dans $[0,\eta]$.

2. Nous allons essayer de trouver une valeur de β pour laquelle $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ converge vers un réel non nul ℓ.
L'idée étant que si c'est le cas, nous pourrons appliquer le théorème de Cesàro qui nous dira que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^\beta-u_k^\beta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ de sorte que } u_n^\beta\sim n\ell.$$

Remarque
Il s'agit d'une somme télescopique.

On a donc

$$\begin{aligned}
f(x)^\beta - x^\beta &\underset{x\to 0}{=} (x-ax^\alpha+o(x^\alpha))^\beta - x^\beta\\
&\underset{x\to 0}{=} x^\beta\left[\left(1-ax^{\alpha-1}+o\left(\left(x^{\alpha-1}\right)\right)-1\right]\\
&\underset{x\to 0}{=} x^\beta\left(-a\beta x^{\alpha-1}+o(x^{\alpha-1})\right) \underset{x\to 0}{\sim} -a\beta x^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

Choisissons donc $\beta=1-\alpha$, de sorte que $f(x)^\beta - f(x)^\beta \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a(\alpha-1)$.
Et donc puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a bien

$$u_n^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} na(\alpha-1) \text{ et donc } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (a(\alpha-1)n)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Dans le cas d'une suite qui vérifie $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on a

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

donc ici $a = \frac{1}{6}$ et $\alpha = 3$.
On obtient donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{n}}$.