TD 20 : Développements limités

▸ Calcul niveau 1

Exercice 20.1 **Des sommes** F

Calculer les développements limités suivants à l'ordre n en 0 :

1. $\cos(x) - \sin(x)$, $n = 4$
2. $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, $n = 3$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x)$, $n = 3$
4. $e^{-x} + \ln(1+x)$, $n = 5$

Exercice 20.2 **Des produits** PD

Calculer les développements limités suivants en 0, à l'ordre n indiqué

1. $\sin(x)\tan(x)$, $n = 3$
2. $\dfrac{e^x}{1-x}$, $n = 3$.
3. $\sin(x)\sqrt{1+x}\ln(1-2x)$, $n = 4$
4. $x^3\sqrt{1+x}$, $n = 5$
5. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, $n = 5$.

Exercice 20.3 **Encore des produits (anticipation des ordres)** AD

Déterminer, avec le moins de calculs possibles, les développements limités suivants en 0 à l'ordre n.

1. $\left(\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right)(\cos x - 1)$, $n = 6$
2. $(1-\cos(2x))(e^{-x} - 1)(x - \sin(x))$, $n = 7$

Exercice 20.4 **Avec des composées** AD

Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre n indiqué.

1. $e^{\sin x}$, $n = 4$
2. $\sqrt{1+\sin(x)}$, $n = 3$
3. $\mathrm{Arctan}(e^x)$, $n = 3$.
4. $e^{\sqrt{1+x}}$, $n = 3$.
5. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $n = 3$.

Exercice 20.5 **Avec des quotients** AD

Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre n

1. $\dfrac{1}{1+e^x}$, $n = 3$
2. $\dfrac{x}{e^x - 1}$, $n = 2$
3. $\mathrm{th}(x)$, $n = 5$
4. $\dfrac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)}$, $n = 3$

Exercice 20.6 **Et ailleurs qu'en zéro ?** AD

Calculer les développements limités suivant en a à l'ordre n.

1. e^x, $a = 1$, $n = 4$
2. $\ln(x)$, $a = e$, $n = 3$
3. $\sin(x)$, $a = \frac{\pi}{4}$, $n = 3$.
4. $\mathrm{Arcsin}(x)^2$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $n = 2$.
5. $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $a = 1$, $n = 3$.

▸ Calcul niveau 2

Exercice 20.7 Calculer les développements limités à l'ordre n indiqué, en 0. AD

1. $\ln(3e^x + e^{-x})$, $n = 3$
2. $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$, $n = 5$
3. $(1+x)^{1/x}$, $n = 3$
4. $\dfrac{\mathrm{Arctan}\, x}{\mathrm{Arcsin}\, x}$, $n = 4$
5. $\mathrm{Arcsin}(\sin^2 x)$, $n = 6$
6. $\dfrac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{x\cos x\sqrt{1-\sin x}}$, $n = 2$

Exercice 20.8 **Développement limité de la tangente** AD

1. Justifier que la tangente possède un développement limité à l'ordre 7 en 0.

2. En utilisant la relation $\tan' = 1+\tan^2$, déterminer ce développement limité.
3. Proposer au moins deux autres méthodes pour obtenir le développement limité de la tangente, et les essayer à l'ordre 5.

Exercice 20.9 Calculer le développement limité d'ordre 3 en 0 de $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$. **D**

Exercice 20.10 **AD**

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+t}$. On notera $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ sa partie régulière.
2. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$.
3. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $N^4 = 0$. Déterminer une racine carrée de $I_n + N$, c'est-à-dire une matrice dont le carré est $I_n + N$.

Exercice 20.11 Déterminer le développement limité à l'ordre 22 au voisinage de 0 de $\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right)$. **AD**

▶ Applications des développements limités

Exercice 20.12 Calculer les les limites suivantes : **AD**

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2^x}{\operatorname{Arctan}(x)-\operatorname{Arctan}(2)}$.

Exercice 20.13 Déterminer des équivalents des suites suivantes : **AD**

1. $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2. $u_n = \dfrac{n \sin\frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} - 1$
3. (★) $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Exercice 20.14 Montrer que $f : \left|\begin{array}{ccc} \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\end{array}\right.$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. **PD**

Exercice 20.15 Soit $\Phi : t \mapsto \begin{cases} \frac{t^2}{e^t-1} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0\end{cases}$. **PD**

On note alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \Phi(t)\,dt$. Montrer que F admet un développement limité d'ordre 3 en 0, que l'on déterminera.

Exercice 20.16 Soit $f : x \mapsto \dfrac{-x^3+5x}{x^2+3}$. **PD**

Sans calculer f', déterminer l'équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}_f$ en 0, et déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

Exercice 20.17 Former un développement asymptotique en 0 de la fonction $x \mapsto (ex)^x$, à la précision $x^2\ln^2(x)$. **PD**

Exercice 20.18 Former un développement asymptotique en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \ln\left(x\tan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$, à la précision $\frac{1}{x^6}$.

Exercice 20.19 Sans calculer directement sa dérivée, prouver que $f : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}$ se prolonge par continuité en 1, et que ce prolongement admet un point critique en 1. **AD**

Déterminer la nature locale de ce point critique.

Exercice 20.20 Déterminer les asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ des fonctions f suivantes, et déterminer leur position par rapport à Γ_f. **AD**

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x)$.

Exercice 20.21 **(Oral X)** **TD**

Soit $f : [0,c] \to [0,c]$ une fonction continue admettant un développement asymptotique de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} x - ax^\alpha + o(x^\alpha)$, avec $a > 0$, $\alpha > 1$.

1. Montrer que pour u_0 assez petit, une suite $(u_n)_n$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0.
2. Déterminer alors un équivalent de u_n. Traiter le cas d'une suite vérifiant $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 20

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.1

1. On a $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$, et donc

$$\cos(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

2. On a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right).$$

Et alors, en changeant[1] x en $-x$, on a

[1] C'est de la composition à droite !

$$\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$$

et donc par somme

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 2 - \frac{x^2}{4} + o\left(x^3\right).$$

3. On a $\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + o\left(x^3\right) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o\left(x^3\right)$.
Et $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5}{16}x^3 + o\left(x^3\right)$.
Donc par somme, $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{3}{2}x - \frac{13}{8}x^2 + \frac{113}{48}x^3 + o\left(x^3\right)$.

4. On a $e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} + o\left(x^5\right)$.
Et donc en sommant avec $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$.
Donc

$$e^{-x} + \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{24} + \frac{23x^5}{120} + o\left(x^5\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.2

1. On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)$ et $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right)$. Et donc

$$\sin(x)\tan(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x + o\left(x^2\right)\right)\left(x + o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2 + o\left(x^3\right).$$

2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$ et $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)$.
Donc par produit,

$$\frac{e^x}{1-x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)\right) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

3. Notons que le développement limité de $\sin(x)$ comme celui de $\ln(1-2x)$ ne contiennent pas de termes constants. Donc il suffit de faire le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2, et les deux autres à l'ordre 3.

$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(1-2x)\sqrt{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(-2x - 2x^2 - \frac{8}{3}x^3 + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} -2x^2 - 3x^3 - \frac{37}{12}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

4. Puisque nous avons déjà un x^3, il suffit de faire le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$.
C'est $1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$, de sorte que

$$x^3\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{8}+o(x^5).$$

5. Puisque le premier terme non nul du développement limité de $\ln(1+x)$ est de degré 1, il suffit d'utiliser un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ et un $DL_5(0)$ de $\ln(1+x)$.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+o(x^5)\right)\left(1-x+x^2-x^3+x^4+o(x^4)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^4+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)x^5+o(x^5)\\ &\underset{x\to 0}{=} x-\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{6}x^3-\frac{25}{12}x^4+\frac{137}{60}x^5+o(x^5).\end{aligned}$$

Question subsidiaire *: au vu des calculs précédents, pensez-vous pouvoir exprimer le développement limité à n'importe quel ordre de* $\ln(1+x)/(1+x)$ *en fonction des nombres harmoniques* $H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *?*

Solution de l'exercice 20.3

Pour faire le moins de calculs possibles, il faut être capable d'anticiper les ordres auxquels réaliser nos développements limités afin de ne pas manipuler plus de termes que nécessaire.

1. Puisque les deux premiers termes du $DL_6(0)$ de $\ln(1+x)$ sont $x-\frac{x^2}{2}$, $\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$ va commencer par un terme en x^3.
Donc il suffit d'obtenir un $DL_3(0)$ de $\cos x-1$.
Et puisque $\cos x-1$ va commencer par un terme en x^2, il suffit d'un $DL_4(0)$ de $\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$.
Donc

$$\begin{aligned}\left(\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\right)(\cos x-1) &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{8}+o(x^6)+o(x^7) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{8}+o(x^6).\end{aligned}$$

2. De même, $1-\cos(2x)$ va commencer par un terme en x^2, et donc il suffit d'un $DL_5(0)$ de $(e^{-x}-1)(x-\sin x)$.
Et puisque $e^{-x}-1$ commence par x, il suffit d'un $DL_3(0)$ de $x-\sin(x)$.
Puisque $x-\sin(x)$ commence par un x^3, il suffit d'un $DL_2(0)$ de $e^{-x}-1$.
Et puisque $(e^{-x}-1)(x-\sin x)$ commence par un x^4, il suffit d'un $DL_3(0)$ de $1-\cos(2x)$.
Ceci étant dit, il n'y a plus qu'à calculer :

$$\begin{aligned}(1-\cos(2x))(e^{-x}-1)(x-\sin x) &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{(2x)^2}{2}+o(x^3)\right)\left(-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} -\frac{x^6}{3}+\frac{x^7}{6}+o(x^7).\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 20.4

1. Puisque $\sin x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $e^{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1+\sin(x)+\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\sin^3(x)}{6}+\frac{\sin^4(x)}{24}+\underbrace{o\left(\sin^4(x)\right)}_{=o(x^4)}$.

Détails
L'égalité des o provient simplement du fait que $\sin^4 x \sim x^4$.

Mais $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$, et donc

$$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{x^4}{3}+o(x^4),\ \sin^3(x) \underset{x\to 0}{=} x^3+o(x^4),\ \sin^4(x) \underset{x\to 0}{=} x^4+o(x^4).$$

Donc

$$e^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{x^4}{3}\right)+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)=1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4).$$

2. De même, $\sqrt{1+\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{\sin x}{2} - \dfrac{\sin^2(x)}{8} + \dfrac{\sin^3 x}{16} + \underbrace{o(\sin^3 x)}_{=o(x^3)}$.

Donc en reprenant les développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 des puissances de sin calculées à la question précédente,

$$\sqrt{1+\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3).$$

3. Une petite subtilité ici : lorsque $x \to 0$, $e^x \to 1$.
Donc il nous faut un développement limité à l'ordre 3 de l'arctangente au voisinage de 1.
La formule de Taylor-Young, qui s'applique puisque l'arctangente est bien $\mathscr{C}^3$, peut nous fournir ce développement limité, en notant que

$$\mathrm{Arctan}''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \text{ et } \mathrm{Arctan}^{(3)}(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Il vient donc

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

Et par composition avec le $DL_3(0)$ de e^x,

$$\mathrm{Arctan}(e^x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).$$

Alternative : on peut faire le changement de variable $h = x-1$, de sorte que $\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(1+h)$, et chercher alors un développement limité en 0 de $f(h) = \mathrm{Arctan}(1+h)$.
Il est toujours possible d'utiliser Taylor, mais on peut également intégrer un $DL_2(0)$ de $f'(h) = \dfrac{1}{1+(1+h)^2}$. On a alors

$$\frac{1}{1+(1+h)^2} = \frac{1}{2+2h+h^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+h+\frac{h^2}{2}} \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + h^2 + o(h^2)\right) \underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + o(h^2).$$

Et donc par intégration,

$$f(h) \underset{h\to 0}{=} \underbrace{f(0)}_{=\frac{\pi}{4}} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{12} + o(h^3).$$

La conclusion est alors la même, en composant par le $DL_3(0)$ de e^x.

4. $e^{\sqrt{1+x}} = e \times e^{\sqrt{1+x}-1} \underset{x\to 0}{=} e\left(1 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{48}x^3 + o(x^3)\right)$.

5. $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{1}{16}x^3 + o(x^3)$.
Et donc

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)}.$$

Notons $u = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{x^3}{32}$, de sorte que $u^2 \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x^3}{32} + o(x^3)$ et $u^3 \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^3}{64} + o(x^3)$.
Et donc

$$\sqrt{1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} + o(x^3)} = \sqrt{1+u}$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + o(x^3)$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{64}-\frac{x^2}{128}+\frac{x^3}{256}+\frac{x^3}{1024}+o(x^3)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{8}-\frac{5x^2}{128}+\frac{21}{256}x^3+o(x^3).$$

Et donc enfin,

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{2}+\sqrt{2}\frac{x}{8}-\sqrt{2}\frac{5x^2}{128}+\sqrt{2}\frac{21}{256}x^3+o(x^3).$$

Solution de l'exercice 20.5

1. On a $1+e^x \underset{x\to 0}{=} 2+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$.
Et par conséquent,

$$\frac{1}{1+e^x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+o(x^3)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)^2-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)\right)^3\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{8}+o(x^3)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+\frac{x^3}{48}+o(x^3)$$

2. Notons tout de suite que le premier terme non nul de e^x-1 va être x, qui va se simplifier avec le numérateur.
Il est donc judicieux de partir d'un développement limité de e^x-1 à l'ordre 3,

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)^2+o(x^2)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2).$$

3. On a $\operatorname{th}(x)=\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$. Il nous faut donc un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ et un $DL_5(0)$ de $\operatorname{sh}(x)$.

$$\frac{1}{\operatorname{ch}x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+o(x^4)} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+o(x^4).$$

Et $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o(x^5)$.

Donc par produit, $\operatorname{th}(x) \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^5)$.

Alternative : on peut aussi noter que la dérivée de th est $\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$, et donc calculer un $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\operatorname{ch}^2}$ et l'intégrer.

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{12}+\frac{x^4}{4}+o(x^4)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+x^2+\frac{x^4}{3}+o(x^4)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 - \frac{x^4}{3} + x^4 + o(x^4)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Et donc $\text{th}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\text{th}(0)} = 0 + x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

4. Encore une fois, essayons d'être prévoyants pour ne faire ni pas assez, ni trop de calculs.
Le numérateur va commencer par un terme en x^2, quand le numérateur va commencer par un terme en x.
Comme nous allons devoir simplifier par x, il faut donc commencer nos développements limités à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - 1 - x}{\ln(1+x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)} \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)\left(1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^2 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)^3 + \right. \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} + \frac{5}{12}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).
\end{aligned}$$

Optimal ?
Peut-être avez vous remarqué que le terme en x^3 du second facteur ne nous a en fait pas servi (car le terme qui provenait du numérateur commençait toujours par x). Autrement dit, il suffit de faire un DL_2 du dénominateur. Avec un peu d'entraînement, vous pourrez peut-être le repérer et économiser un peu de temps sur les calculs.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.6

1. Notons $h = x - 1$. Alors

$$e^x \underset{x\to 1}{=} e^{h+1} \underset{x\to 1}{=} ee^h \underset{x\to 1}{=} e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} + o(h^4)\right).$$

2. Notons $h = x - e$. Alors

$$\ln(x) = \ln(e+h) = 1 + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) \underset{x\to e}{=} 1 + \frac{h}{e} - \frac{h^2}{2e^2} + \frac{h^3}{3e^3} + o(h^3).$$

3. Posons $h = x - \frac{\pi}{4}$, de sorte que

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin(h) + \cos(h)\right).$$

Puisque $h \to 0$, on a donc, utilisant les DL de sin et cos en 0 :

$$\sin(x) \underset{x\to\pi/4}{=} \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right).$$

4. Notons $h = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$. Alors par la formule de Taylor-Young, on obtient

$$\text{Arcsin}(x) \underset{x\to 1/\sqrt{2}}{=} \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}h + h^2 + o(h^2).$$

Détails
Les deux premières dérivées de l'arcsinus sont $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Et donc par produit,

$$\text{Arcsin}(x)^2 \underset{x\to 1/\sqrt{2}}{=} \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{\sqrt{2}}h + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)h^2 + o(h^2).$$

5. Posons $h = x - 1$. Alors

$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{\ln(1+h)}{\sqrt{1+h}} \underset{h\to 0}{=} \frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)}$$

Astuce
Le numérateur commence par h, donc on n'a besoin que d'un $DL_2(0)$ du dénominateur.

$$\underset{h\to 0}{=} \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)\right)\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{8} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)\right)$$
$$\underset{h\to 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4} + \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{4} + o(h^3)$$
$$\underset{h\to 0}{=} h - h^2 + \frac{23}{24}h^3 + o(h^3).$$

Et donc
$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{x\to 1}{=} (x-1) - (x-1)^2 + \frac{23}{24}(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$

Solution de l'exercice 20.7

1. Au voisinage de 0, on a
$$3e^x + e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 3 + 3x + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to 0}{=} 4 + 2x + 2x^2 + \frac{x^3}{6}.$$
Donc $\ln(3e^x + e^{-x}) \underset{x\to 0}{=} \ln(4) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)\right)$.
En utilisant alors le $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$, on arrive à
$$\ln(4) + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{x^3}{8} + o(x^3).$$

2. $\sqrt{1-x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} + o(x^6)$.
Donc $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} + o(x^6)} \underset{x\to 0}{=} \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{16} + o(x^4)}$.
On reprendre alors $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$, avec $u = \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{16}$, et on obtient après calculs,
$$\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} \frac{|x|}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{x^2}{8} + \frac{7}{128}x^4 + o(x^4)\right).$$

3. Par définition, $(x+1)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$. Mais
$$\frac{1}{x}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3).$$

Méthode
On va jusqu'à l'ordre 4 pour le $\ln(1+x)$, puisque la division par x va nous faire perdre un ordre.

Et donc
$$(1+x)^{1/x} = e \times \exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)$$
$$= e\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + o(x^3)\right).$$

4. Commençons par noter que nous savons que les fonctions Arcsin et Arctan sont toutes deux équivalentes à x en 0.
Et que donc pour calculer un développement limité du quotient, nous allons commencer par diviser par x pour pouvoir utiliser le DL de $\frac{1}{1+u}$.
Donc il va nous falloir des $DL_5(0)$ de Arctan et Arcsin.
Rappelons que le développement limité de Arctan s'obtient en intégrant celui de $\frac{1}{1+x^2}$.
Pour avoir Arctan à l'ordre 5, il suffit d'avoir celui de $\frac{1}{1+x^2}$ à l'ordre 4.
Or, $\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$, et donc
$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

Donc en intégrant,

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\operatorname{Arctan}(0)}_{=0} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5).$$

De même, on obtient le $DL_5(0)$ de Arcsin en intégrant le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Mais $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)$ et donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

Et donc

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{\operatorname{Arcsin}(0)}_{=0} + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5).$$

Reste alors à calculer le quotient :

$$\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{\operatorname{Arcsin}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)}{x + \frac{x^3}{6} + + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)}$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o(x^4)}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)}.$$

Commençons par calculer le DL de $\dfrac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)}$. La méthode est classique : composer avec le $DL_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4)$.

Il vient donc

$$\frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)} = 1 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right) + \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right)^2$$
$$\underbrace{- \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right)^3 - \left(\frac{x^2}{6} + \frac{3}{40}x^4 + o(x^4)\right)^4}_{=o(x^4)} + o(x^4)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{17}{360}x^4 + o(x^4)$$

Et donc en multipliant ensuite par $1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} + o(x^4)$, on obtient

$$\frac{\operatorname{Arctan} x}{\operatorname{Arcsin}(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4).$$

Remarque
Notons que nous sommes en fait en train de calculer le $DL_4(0)$ de $\frac{x}{\operatorname{Arcsin}(x)}$.

Remarque
Si l'on voit tout de suite que les deux derniers termes ne vont faire apparaître que des degrés supérieurs à 4, il n'est pas utile de les calculer.

5. La question précédente rappelle comment obtenir le développement limité de l'arcsinus.
Avant de nous lancer dans des calculs, remarquons que le terme de plus bas degré de $\sin^2 x$ est de degré 2.
Et donc que pour obtenir un développement limité à l'ordre 6 de $\operatorname{Arcsin}(\sin^2(x))$, il suffit de composer un $DL_3(0)$ de Arcsin avec le $DL_6(0)$ de $\sin^2(x)$.
On a donc $\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^6)$, et donc

$$\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + o(x^6).$$

Et $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, de sorte que par composition,

$$\operatorname{Arcsin}(\sin^2(x)) \underset{x\to 0}{=} \sin^2(x) + \frac{1}{6}(\sin^2 x)^3 + \underbrace{o(\sin^3(x))}_{=o(x^6)} \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{19}{90}x^6 + o(x^6).$$

Autrement dit
Pour $k \geqslant 4$,
$$(\sin^2 x)^k \underset{x\to 0}{=} o(x^6).$$

6. Commençons par nous intéresser au dénominateur : on a $x\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x$, de sorte que le terme non nul de plus petit degré dans un développement limité de $x\cos(x)\sqrt{1-\sin x}$ sera de degré 1.
Donc pour calculer un développement limité du quotient, il nous faudra commencer par diviser par x pour composer avec le DL de $\frac{1}{1+u}$.
Nous avons donc besoin d'un $DL_3(0)$ du numérateur et du dénominateur.
On a

$$\ln(1+e^x)-\ln(2) = \ln(2+e^x-1)-\ln(2) = \ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}+o(x^3).$$

Puis $x\cos(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{2}+o(x^3)$.
Et donc

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+e^x)-\ln(2)}{x\cos x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{2}+\frac{x}{8}+o(x^2)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x^2}{4}+o(x^2).\end{aligned}$$

Détails
On a ici composé avec le DL de $\frac{1}{1-x}$.

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}} = (1-\sin(x))^{-1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}\sin(x)+\frac{3}{8}\sin^2(x)+o(\sin^2(x))\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

Et donc enfin, par produit,

$$\frac{\ln(1+e^x)-\ln(2)}{x\cos(x)\sqrt{1-\sin(x)}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}x^2+o(x^2).$$

Solution de l'exercice 20.8

1. La fonction tan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, donc possède des développements limités de tout ordre.
Notons dès à présent que la tangente étant impaire, il est inutile de chercher des termes de degré pair.
2. Nous connaissons déjà le terme de degré 1 du DL, c'est x.
Donc notons $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+o(x^7)$ le développement limité cherché.
Alors $1+\tan^2 \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+2a_3x^4+(a_3^2+2a_5)x^6+o(x^6)$.
Mais $\tan' = 1+\tan^2$, donc en intégrant ce développement limité, ce qui fait apparaître la constante $\tan(0)=0$, il vient

$$x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+o(x^7) = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2a_3}{5}x^5+\frac{a_3^2+2a_5}{7}x^7+o(x^7).$$

Par identification des parties régulières, on en vient à

$$c_3 = \frac{1}{3},\ c_5 = \frac{2}{15},\ c_7 = \frac{17}{315}.$$

3. Une autre option serait de noter que $\tan' = \frac{1}{\cos^2}$.
Or, $\frac{1}{\cos^2 x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)^2}$.
Or un calcul nous donne $\frac{1}{\cos^2(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4)$.

Ne reste alors qu'à intégrer.

Une autre méthode est de revenir à la définition, en posant $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, et en calculant un développement limité de ce quotient.
Enfin, une option encore différente serait de noter que tan étant impaire, elle admet un développement limité de la forme $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$.
Donc $\tan(x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + 2a_3x^4 + o(x^5)$, puis $\tan(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + 3a_3x^5 + o(x^5)$, et

$$\tan(x)^5 \underset{x\to 0}{=} x^5 + o(x^5).$$

Mais par ailleurs, $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + o(x^5)$ et $\operatorname{Arctan}(\tan x) = x$.
Donc par composition de développements limités,

$$x \underset{x\to 0}{=} \tan(x) - \frac{\tan(x)^3}{3} + \frac{\tan(x)^5}{5} + o(x^5)$$

soit encore

$$x \underset{x\to 0}{=} x + \left(a_3 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(a_5 - \frac{3a_3}{3} + \frac{1}{5}\right) + o(x^5).$$

Et donc par identification des coefficients, $a_3 = \dfrac{1}{3}$ et $a_5 - a_3 + \dfrac{1}{5} = 0 \Leftrightarrow a_5 = \dfrac{2}{15}$.
Lorsque vous avez le choix, vous privilégierez la première des trois méthodes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.9

Il faut être assez soigneux sur les ordres. En effet, on a $\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)\right)$.
Pour pallier à la division par x^2, il va nous falloir un $DL_5(0)$ de $\ln\dfrac{\tan x}{x}$, ce qui nécessitera donc un $DL_6(0)$ de $\tan(x)$.

On a[2] $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o\left(x^6\right)$.

[2] Cf l'exercice précédent.

Donc $\dfrac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o\left(x^5\right)$.
Donc $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o\left(x^5\right)\right)$.
Posons alors $u = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{2}{15}x^4 + o(x^5)$, de sorte que

$$u^2 = \frac{x^4}{9} + o(x^5),\ u^3 = u^4 = u^5 = o(x^5).$$

Et donc $\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{u^4}{4} + \dfrac{u^5}{5} + o(u^5) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{7}{90}x^4 + o(x^5)$.
Donc $\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\tan x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{90}x^2 + o\left(x^3\right)$.
En composant par l'exponentielle,

$$\exp\left(\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\tan x}{x}\right)\right) \underset{x\to 0}{=} e^{1/3}e^{\frac{7}{90}x^2+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} e^{1/3}\left(1 + \frac{7}{90}x^2 + o(x^3)\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.10

1. C'est du cours, c'est $(1+t)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$.
   On a donc $\sqrt{1+t} \underset{t\to 0}{=} 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}t^3 + o(t^3)$.
2. Remarquons que $P = (a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)^2$ est un polynôme[3].
   Notons alors $P = X^4Q + R$ sa division euclidienne par X^4.
   En pratique, R est la troncature à l'ordre 3 de P : on n'a gardé que les termes de degré inférieur ou égal à 3.
   Alors, au voisinage de 0, $t^4Q(t)$ est équivalent à son terme de plus bas degré, qui est de

[3] De degré 6 mais peu importe.

degré supérieur ou égal à 4, et donc est négligeable devant t^3.

D'autre part, par produit de développements limités, le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $1+t$ est le carré de celui de $\sqrt{1+t}$, c'est-à-dire R.
Donc $1+t \underset{t\to 0}{=} R(t)+o(t^3)$ est le $DL_3(0)$ de $1+t$.
Mais par ailleurs, on a évidemment $1+t \underset{t\to 0}{=} 1+t+o(t^3)$.
Donc par unicité du développement limité, $R(t)=1+t$, et donc

$$1+X = R(X) = (a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3)^2 - X^4Q(X).$$

3. Par la question précédente, on a

$$I_n+N = (a_0I_n+a_1N+a_2N^2+a_3N^3)^2 + \underbrace{N^4}_{=0}Q(N) = (a_0I_n+a_1N+a_2N^2+a_3N^3)^2.$$

Et donc une racine carrée de I_n+N est $a_0I_n+a_1N+a_2N^2+a_3N^3$.

Solution de l'exercice 20.11

Il y a bien entendu une astuce. Il s'agit de reconnaître que l'expression dans la parenthèse est la partie régulière du développement limité d'ordre 20 au voisinage de 0 de $\ln(1+x)$.

On a donc $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{20}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + o\left(x^{20}\right)$.

Et donc

$$\begin{aligned}
\exp\left(\sum_{k=1}^{20}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k\right) &\underset{x\to 0}{=} \exp\left(\ln(1+x) - \frac{x^{21}}{21}+\frac{x^{22}}{22}+o\left(x^{22}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} e^{\ln(1+x)}\exp\left(-\frac{x^{21}}{21}+\frac{x^{22}}{22}+o\left(x^{22}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} (1+x)\left(1-\frac{x^{21}}{21}+\frac{x^{22}}{22}+o\left(x^{22}\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} (1+x)-\frac{x^{21}}{21}+\frac{x^{22}}{22}-\frac{x^{22}}{21}+o\left(x^{22}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1+x-\frac{1}{21}x^{21}-\frac{1}{462}x^{22}+o\left(x^{22}\right).
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 20.12

1. On a $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} = \exp\left(\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)$.
Un développement limité à l'ordre 2 des termes dans la parenthèse nous donne

$$\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{3}+o(1).$$

Et donc par composition par l'exponentielle, la limite cherchée est $e^{-1/3}$.

> ⚠ Attention !
> Il n'est pas nécessaire ici de faire un développement limité de l'exponentielle.

2. On a $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3}e^{-x} = \exp\left[x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-x\right)$.
On $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
Donc $x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-x \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{2x}+o(x)$.

On en déduit que $x^3\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3}e^{-x} = 1$.

3. Le début est similaire à ce que nous aurions fait sans les développements limités : on factorise par le terme prépondérant (qui ici se trouve être x dans chacun des deux termes) :

$$\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt{x^2+x} = x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Posons alors $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
On a donc

$$\sqrt[3]{1+X^2+X^3} - \sqrt{1+X^2} \underset{X\to 0}{=} 1 + \frac{1}{3}X^2 + o(X^2) - 1 - \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)$$
$$\underset{X\to 0}{=} -\frac{1}{6}X^2 + o(X^2).$$

Et donc $\sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+x} \underset{x\to+\infty}{=} -\frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Remarque

Nous n'avons finalement utilisé que les développements limités à l'ordre 1. Donc nous aurions déjà été capables de calculer cette limite avant ce chapitre.

4. Posons $h = x - 2$, de sorte que $h \xrightarrow[x\to 2]{} 0$.
Alors $2^x = e^{x\ln 2} = e^{(h+2)\ln(2)} = \underbrace{e^{2\ln 2}}_{=4} e^{h\ln(2)}$.

Soit encore $2^x \underset{x\to 2}{=} 4\left(1 + h\ln(2) + o(h)\right)$.
Par ailleurs, $x^2 = (2+h)^2 = 4 + 4h + h^2 \underset{h\to 0}{=} 4 + 4h + o(h)$.
Et donc $x^2 - 2^x \underset{h\to 0}{=} 4(1-\ln 2)h + o(h)$.
C'est-à-dire $x^2 - 2^x \underset{x\to 0}{\sim} 4(1-\ln(2))(x-2)$.
Par ailleurs, par Taylor-Young à l'ordre 1 en 2,

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 2}{=} \operatorname{Arctan}(2) + \frac{1}{5}(x-2) + o(x-2).$$

Donc $\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(2) \underset{x\to 2}{\sim} \frac{1}{5}(x-2)$. Et donc par quotient[4]

[4] D'équivalents.

$$\frac{x^2 - 2^x}{\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(2)} \underset{x\to 2}{\sim} 20(1-\ln(2)) \xrightarrow[x\to 2]{} 20(1-\ln(2)).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.13

1. Commençons par factoriser par $\sqrt{n}$: $u_n = \sqrt{n}\left(2 - \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$. Et alors en utilisant le développement limité de $\sqrt{1+x}$ en 0,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(2 - \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2}o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{4n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4n\sqrt{n}}.$$

2. On a donc $n\sin\frac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} n\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{6n^9} + o\left(\frac{1}{n^9}\right)\right)$ et de même

$$e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

de sorte que

$$\frac{n\sin\frac{1}{n^3}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1 - \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)}{1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \left(1 - \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Et donc en retranchant 1, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.

3. On a $\sqrt[n+1]{n+1} = e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)}$ et de même $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n}$.
Mais par croissances comparées, $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et donc

$$e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + o\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right).$$

Sur le même principe,

$$e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

> **Remarque**
> Puisque $\ln(n+1) \sim \ln(n)$ on a
> $$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}.$$
> Et donc nous pouvons regrouper les deux o en un seul.

Mais

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{n\ln(n+1) - (n+1)\ln n}{n(n+1)} = \frac{-\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.$$

Il vient donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Malheureusement, puisque $\frac{\ln n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$, ceci ne suffit pas à trouver un équivalent, seulement à dire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$...

Poussons donc le développement limité un ordre plus loin :

$$e^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln(n+1)}{n+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).$$

Et de même,

$$e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\frac{\ln(n)^2}{n^2} + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n+1}{n+1} + \frac{\ln n}{n}\right)\right) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} \left(-\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)(1+o(1)) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Caramba, encore raté ! $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$.

Toutefois, on semble s'approcher, mais sans avoir très envie de faire apparaître les termes d'ordre 3 dans le développement limité.

Rusons un peu et notons que

$$e^x \underset{x\to0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \underset{x\to0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3).$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
u_n &\underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n+1}{n+1} + \frac{\ln n}{n}\right)\right) + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3\right)\\
&\underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n^2}.
\end{aligned}$$

> **Détails**
> La clé, c'est que cette fois, on a
> $$\left(\frac{\ln n}{n}\right)^3 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).$$

Solution de l'exercice 20.14

On a

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)} \underset{x\to0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x}{6} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc déjà f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

Étudions la dérivabilité en 0 de ce prolongement : pour $x > 0$,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6}.$$

Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$.

Par ailleurs, il est évident que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car différence de deux fonctions qui le sont, et alors pour $x > 0$,

$$f'(x) == -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}.$$

Cette dérivée est évidemment continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
Enfin, pour $x > 0$,

$$f'(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) - \left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}{x^4+o(x^4)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^3)}{x^4+o(x^4)}$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{6} = f'(0).$$

Et donc f' est continue en 0, et donc est continue sur $\mathbf{R}_+$.
Donc f se prolonge bien une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque
Nous avons ici du calculer 3 limites. Nous verrons bientôt un théorème (dit de la limite de la dérivée) qui nous permettra de n'en calculer que 2 pour prouver le même résultat.

Alternative : on a

$$f(x) = \frac{\sin x - x}{x\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^2+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x}{6}+o(x)}{1+o(x)} \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{6}+o(x).$$

Ainsi, nous avons là le développement limité en 0 à l'ordre 1 de f.
Si on prolonge f en posant $f(0) = 0$ (ce qui est légitime puisque le terme constant du DL ci-dessus est nul), alors f possède un développement limité d'ordre 1 en 0, donc est non seulement continue, mais elle est en plus dérivable, avec $f'(0) = -\dfrac{1}{6}$.
Et alors pour prouver la continuité de f' en 0, il faut, comme ci-dessus, calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

Solution de l'exercice 20.15

On a $\dfrac{t^2}{e^t-1} \underset{t\to 0}{=} t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$.
En particulier, $\dfrac{t^2}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, et donc Φ est continue en 0, et donc possède bien au moins une primitive sur $\mathbf{R}_+$. Ce qui justifie la définition de F.
Et alors, par intégration de développements limités[5] :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

[5] La constante d'intégration est ici nulle puisque nous cherchons la primitive qui s'annule en 0.

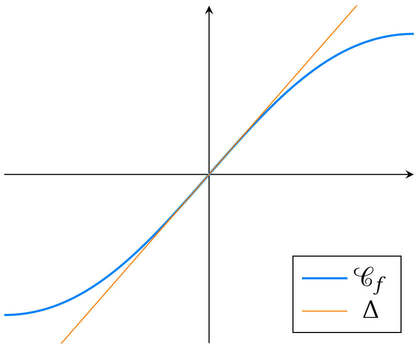
Solution de l'exercice 20.16

Notons que

$$f(x) = \frac{1}{3}\frac{-x^3+5x}{1+\frac{x^2}{3}} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{3}(5x-x^3)\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{5x}{3} - \frac{8x^3}{9} + o\left(x^3\right).$$

Donc en particulier, le développement limité d'ordre 1 en 0 de $f(x)$ est $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{5x}{3} + o(x)$, si bien que l'équation de la tangente en 0 est $y = \dfrac{5x}{3}$.
Par ailleurs, $f(x) - \dfrac{5x}{3} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{8x^3}{9}$.
Et deux fonctions équivalentes en 0 sont de même signe sur un voisinage de 0.
Donc si V est un tel voisinage de 0, $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de Δ sur $V \cap \mathbf{R}_-$ et en dessous sur $V \cap \mathbf{R}_+$.
Autrement dit, $\mathscr{C}_f$ traverse Δ en 0.

Remarque
En revanche, sans davantage de calculs, il n'est pas possible de déterminer V, l'information que nous avons est juste locale.
Pour en savoir plus, il faudrait étudier le signe de $x \mapsto f(x) - \frac{5}{3}x$ (ce qui se fait ici très bien).



Solution de l'exercice 20.17

Souvenons nous que $(ex)^x = e^x e^{x\ln(x)}$.
Mais lorsque $x \to 0$, $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $e^{x\ln(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x\ln(x) + \dfrac{x^2\ln^2(x)}{2} + o\left(x^2\ln^2(x)\right)$.
Puisque d'autre part, $e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, il vient, par produit

$$\begin{aligned}(ex)^x &\underset{x\to 0}{=} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 + x\ln(x) + \frac{x^2\ln^2(x)}{2} + o(x^2\ln^2(x))\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x\ln(x) + x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + \underbrace{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{1}{2}x^3\ln^2(x) + \frac{1}{4}x^4\ln^2(x) + o(x^2)}_{=o(x^2\ln^2(x))}\\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x\ln(x) + x^2\ln(x) + \frac{1}{2}x^2\ln^2(x) + o(x^2\ln^2(x)).\end{aligned}$$

Rédaction

Une bonne habitude dans les développements asymptotiques est, comme dans les développements limités, d'ordonner les termes de sorte que chacun soit négligeable devant le précédent.

Solution de l'exercice 20.18

Il s'agit de remarquer que $\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et d'utiliser alors le développement limité de la tangente en 0 (voir l'exercice 8) :

$$\tan\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + \frac{2}{15}\frac{1}{x^5} + \frac{17}{315}\frac{1}{x^7} + o\left(\frac{1}{x^7}\right).$$

Il s'agit ensuite de multiplier par x puis de composer avec le développement limité à l'ordre 6 de $\ln(1+x)$.

$$\ln\left(x\tan\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{3x^2} + \frac{7}{90x^4} + \frac{62}{2835x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

Solution de l'exercice 20.19

A priori, une option serait de montrer que f se prolonge par continuité, puis montrer que ce prolongement par continuité est $\mathscr{C}^2$, par exemple à l'aide du théorème de prolongement $\mathscr{C}^2$, pour espérer obtenir un développement limité à l'ordre 2 de f, qui pourrait[6] nous aider à déterminer la nature du point critique.
Toutefois, pour appliquer le théorème de prolongement $\mathscr{C}^2$, il nous faut calculer les deux premières dérivées de f (ce que l'énoncé nous demande explicitement de ne pas faire), et prouver qu'elles ont toutes deux une limite finie en 1.

[6] Si son terme de degré 2 est non nul.

Faisons tout d'un coup en cherchant un développement limité de f au voisinage de 1.
Pour cela, procédons au changement de variable habituel $x = 1+h$, avec $h \to 0$. Alors

$$\begin{aligned}f(1+h) &\underset{h\to 1}{=} \frac{(1+h)\ln(1+h)}{(1+h)^2-1} = \frac{(1+h)\ln(1+h)}{2h+h^2}\\ &\underset{h\to 1}{=} (1+h)\frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{2h+h^2}\\ &\underset{h\to 1}{=} (1+h)\frac{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)}{2+h}\end{aligned}$$

Méthode

On a repéré que le dénominateur commence par h, donc qu'il faudra diviser par h, et donc on cherche directement un développement limité à l'ordre 3 du numérateur.

$$\underset{h\to 1}{=} (1+h)\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{3}+o(h^2)\right)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}$$
$$\underset{h\to 1}{=} \left(1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{6}+o(h^2)\right)\frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+o(h^2)\right)$$
$$\underset{h\to 1}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{12}h^2+o(h^2).$$

Autrement dit, $f(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{2}-\frac{1}{12}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right)$.

En particulier, $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1)=\frac{1}{2}$.
Par ailleurs f possède un développement limité d'ordre 1 en 1, qui est $f(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{2}+0\times(x-1)+o(x-1)$.
Donc f (prolongée par continuité) est dérivable en 1, et $f'(1)=0$.
Voici donc qui prouve l'existence du point critique.
Enfin, $f(x)-f(1) \underset{x\to 1}{=} -\frac{1}{12}(x-1)^2+o\left((x-1)^2\right) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{1}{12}(x-1)^2$.

Donc au voisinage de 1, $f(x)-\frac{1}{2}$ est du signe de $-\frac{1}{12}(x-1)^2$, c'est-à-dire négatif.
Autrement dit, il existe un voisinage V de 1 tel que $\forall x\in V,\ f(x)-f(1)\leqslant 0 \Leftrightarrow f(x)\leqslant f(1)$.
Donc f possède un maximum local en 1.

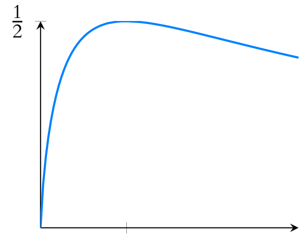


FIGURE 20.1– La fonction f.

SOLUTION DE L'EXERCICE 20.20

1. On a $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = x\sqrt{\frac{x}{1-x}} = x\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$.

Mais $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Et donc $\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{1+\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}+o(1)$.

Donc $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc la droite d'équation $y=x+\frac{1}{2}$ est asymptote oblique à Γ_f au voisinage de $+\infty$.
Pour déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote, il nous faut pousser le développement limité un ordre plus loin : pour simplifier les notations, posons $X=\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a

$$\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = \sqrt{\frac{1}{1-X}} \underset{X\to 0}{=} \sqrt{1+X+X^2+o(X^2)} \underset{X\to 0}{=} 1+\frac{1}{2}(X+X^2)-\frac{1}{8}X^2+o(X^2).$$

Soit encore $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc en particulier, $f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{8x}$.

Puisque cet équivalent est positif, au voisinage de $+\infty$, $f(x)-(x+\frac{1}{2})$ est aussi positif, et donc Γ_f est située au dessus de son asymptote oblique.

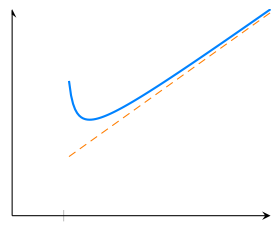


FIGURE 20.2– Γ_f et son asymptote

2. On a $\frac{x^2}{x+1} = \frac{x}{1+\frac{1}{x}}$, et donc au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{x^2}{x+1} \underset{x\to+\infty}{=} x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x-1\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Par ailleurs, on a $\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$, de sorte qu'au voisinage de $+\infty$,

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Et par produit, il vient donc

$$\frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1 + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

En particulier, on en déduit que $\frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc la droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
Et d'autre part, $\frac{x^2}{x+1}\operatorname{Arctan}(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{1}{x}$ est du signe de x au voisinage de $+\infty$, et donc Γ_f est située au dessus de son asymptote.

Solution de l'exercice 20.21

1. Puisque f est continue, $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
Par ailleurs, $f(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -ax^\alpha$, qui est négatif au voisinage de 0.
Donc il existe $\eta \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $\forall x \in [0,\eta]$, $f(x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) < x$.
Et donc pour $u_0 \in [0,\eta]$, (u_n) est décroissante et à valeurs positives donc elle converge vers un point fixe de f, qui est encore[7] dans $[0,\eta]$. Mais par définition de η, 0 est le seul tel point fixe.

[7] C'est la limite d'une suite à valeurs dans $[0,\eta]$.

2. Nous allons essayer de trouver une valeur de β pour laquelle $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ converge vers un réel non nul ℓ.
L'idée étant que si c'est le cas, nous pourrons appliquer le théorème de Césaro qui nous dira que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^\beta - u_k^\beta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \Leftrightarrow u_n^\beta \sim n\ell.$$

Remarque Il s'agit d'une somme télescopique.

On a donc

$$\begin{aligned} f(x)^\beta - x^\beta &\underset{x\to 0}{=} (x - ax^\alpha + o(x^\alpha))^\beta - x^\beta \\ &\underset{x\to 0}{=} x^\beta\left[\left(1 - ax^{\alpha-1} + o\left(\left(x^{\alpha-1}\right)\right) - 1\right]\right. \\ &\underset{x\to 0}{=} x^\beta\left(-a\beta x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -a\beta x^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Choisissons donc $\beta = 1-\alpha$, de sorte que $f(x)^\beta - f(x)^\beta \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a(\alpha-1)$.
Et donc puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a bien

$$u_n^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} na(\alpha-1) \Leftrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (a(\alpha-1)n)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Dans le cas d'une suite qui vérifie $u_{n+1} = \sin(u_n)$, on a

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

donc ici $a = \frac{1}{6}$ et $\alpha = 3$.
On obtient donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{n}}$.