# TD 20 : Espaces vectoriels et applications linéaires

## ▸ Sous-espaces vectoriels

**Exercice 20.1** Le corps $\mathbf{K}$, muni de son addition et sa multiplication, peut être vu comme un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Déterminer tous ses sous-espaces vectoriels. **F**

**Exercice 20.2** Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels (munis de leurs opérations usuelles) ? **F**

1. l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ qui tendent vers 1 en $+\infty$.
2. l'ensemble des suites croissantes
3. l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$
4. l'ensemble des matrices triangulaires à coefficients diagonaux égaux à 1.
5. l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de trace nulle.
6. l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$
7. l'ensemble des polynômes à coefficients réels possédant à la fois 1 et 3 comme racines de multiplicité supérieure ou égale à 2.
8. l'ensemble des fonctions $2\pi$-périodiques
9. l'ensemble des fonctions $f$ dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que $f(0) + 2f(1) = 3f'(2)$
10. l'ensemble des polynômes de degré 2.

**Exercice 20.3** Parmi les parties suivantes de $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels ? **PD**

1. $F_1 = \{(u_n) \in E \mid \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0\}$
2. $F_2 = \left\{(u_n) \in E \mid u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\right\}$
3. $F_3 = \left\{(u_n) \in E \mid u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$
4. $F_4 = \left\{(u_n) \in E \mid \exists k \in \mathbf{R}, u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{k}{n}\right\}$

**Exercice 20.4 Une union de sous-espaces peut être un sous-espace** **PD**
Soit $E$ un espace vectoriel et soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $\forall (i,j) \in I^2, \exists k \in I, F_i \cup F_j \subset F_k$.
Montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

## ▸ Familles de vecteurs

**Exercice 20.5** Dans chacun des cas suivants, préciser si on est en présence ou non d'une famille libre de $E$, et donner une base de l'espace vectoriel engendré par cette famille. **F**

1. $E = \mathbf{R}^3$, $(0,-2,1), (2,-1,-3), (1,1,-2)$
2. $E = \mathbf{C}^2$, $(1,i), (2i,i), (1,1)$
3. $E = \mathbf{R}^3$, $(1,2,-3), (3,2,-2), (-1,2,-4), (-6,-8,11)$
4. $E = \mathbf{R}^3$, $(1,0,-1), (0,1,0), (3,3,-3), (-1,3,1)$
5. $E = \mathbf{R}_n[X]$, $(X+k)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
6. $E = \mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, $f_0 : x \mapsto 2, f_1 : x \mapsto \cos(x)$, $f_2 : x \mapsto \cos^2(x), f_3 : x \mapsto \cos(2x)$.
7. $E = \mathbf{C}_n[X]$, $(X-a)^k(X-b)^{n-k}, 0 \leqslant k \leqslant n$, où $a \neq b$ sont deux complexes.
8. $E = \mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i & -1 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 20.6** Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la famille $(1,1,\alpha), (1,\alpha,1), (\alpha,1,1)$ est liée dans $\mathbf{R}^3$. **AD**

**Exercice 20.7** Donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants : **PD**

1. $\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 | x+y+2z-t=0 \text{ et } x+z+t=0\}$
2. $\{P \in \mathbf{R}_4[X] \mid P(0) = P(4) = 0\}$
3. $\mathrm{Vect}((1,2,-1,0), (1,6,-5,-6), (1,0,1,3))$
4. $\{y \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}) \mid y'' - 2y' + 2y = 0\}$
5. $\left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{C}) \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}$
6. $\{(u_n) \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \mid \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n\}$
7. $\left\{P \in \mathbf{R}_n[X] \,\middle|\, \int_0^1 P(t)\,dt = 0\right\}$

**Exercice 20.8** Pour $k \in \mathbf{N}$, on pose $f_k : x \mapsto e^{kx}$. Montrer que la famille $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$. **AD**

**Exercice 20.9** Soit $E = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Pour $k \in \mathbf{N}$, on note $v^{(k)}$ la suite définie par $v_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ **AD**
Montrer que $(v^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ est une famille libre de $E$. Est-ce une base de $E$ ? Déterminer $\mathrm{Vect}(v^{(k)}, k \in \mathbf{N})$.

**Exercice 20.10** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. **AD**

1. Montrer que $A$ est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

2. Montrer que si une des lignes de $A$ est combinaison linéaire des autres, alors $A$ n'est pas inversible. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 20.11** Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel $E$. On considère $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ des scalaires, et on pose $y=\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $x_k=e_k+y$. Déterminer à quelle condition la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre. **D**

**Exercice 20.12** Soit $E$ un espace vectoriel et $X$ une partie de $E$. **D**
On dit que $X$ est génératrice minimale de $E$ si elle est génératrice, et que pour tout $Y\in\mathscr{P}(E)$, si $Y$ est génératrice de $E$ et que $Y\subset X$, alors $Y=X$. On dit que $X$ est libre maximale si elle est libre et que pour toute partie $Y$ de $E$, si $X\subset Y$ et que $Y$ est libre, alors $X=Y$.
Montrer que $X$ est génératrice minimale si et seulement si elle est libre maximale, si et seulement si c'est une base de $E$.
*Un cas un peu plus facile à écrire que le cas général est celui où $X=\{e_1,\dots,e_n\}$ est fini.*

## ▶ Sommes de sous-espaces vectoriels

**Exercice 20.13** Dans $\mathbf{R}^4$, soit $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbf{R}^4 \mid x+y+z=0 \textbf{ et } y-z+t=0\}$ et soit $G=\operatorname{Vect}\big((1,0,0,1),(0,1,1,0)\big)$. **PD**
Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{R}^4$.

**Exercice 20.14** Soit $F=\{f\in\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ telles que } f(0)=f(1)\}$. **AD**

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2. Soit $g:x\mapsto x$. Montrer que $F$ et $\operatorname{Vect}(g)$ sont supplémentaires dans $\mathscr{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

**Exercice 20.15** Soient $F,G,H$ des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$. **D**
Montrer que $F+(G\cap H)\subset(F+G)\cap(F+H)$, et que si $F\subset G$, alors l'inclusion précédente est une égalité.

**Exercice 20.16** Soit $n\geqslant 1$ fixé. Pour tout $i\in[\![0,n]\!]$, on pose $F_i=\{P\in\mathbf{R}_n[X] \mid \forall j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\},\ P(j)=0\}$. **AD**

1. Montrer que les $F_i$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}_n[X]$. En donner une base.
2. Montrer que la somme $F_0+F_1+F_2+\dots+F_n$ est directe.
3. En déduire que $\mathbf{R}_n[X]=F_0\oplus F_1\oplus F_2\oplus\dots\oplus F_n$.

**Exercice 20.17** Soit $E$ un espace vectoriel, et $F_1,\dots,F_n$ des sous-espaces vectoriels de $E$. **AD**

1. Montrer que $F_1,\dots,F_n$ sont en somme directe si et seulement si $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $\left(\sum_{i=1}^{k-1}F_i\right)\cap F_k=\{0_E\}$.
2. Donner un exemple de trois sous-espaces vectoriels $F_1,F_2,F_3$ tels que $\forall(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$, $i\neq j\Rightarrow F_i\cap F_j=\{0_E\}$ mais où $F_1,F_2,F_3$ ne sont pas en somme directe. Est-ce que si $F_1\cap F_2\cap F_3=\{0_E\}$, alors la somme $F_1+F_2+F_3$ est directe ?

## ▶ Applications linéaires

**Exercice 20.18** Soit $p$ l'application $\mathbf{C}^2\to\mathbf{C}^2$ définie par $p(x,y)=\frac{1}{5}(x+2y,2x+4y)$. **F**

1. Montrer que $p$ est un endomorphisme.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}p$. L'application $p$ est-elle injective ?
3. Déterminer une base de $\operatorname{Im}p$.
4. Montrer que $p\circ p=p$. Les sous-espaces $\operatorname{Ker}p$ et $\operatorname{Im}p$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{C}^2$ ?

**Exercice 20.19** Pour chacune des applications suivantes, déterminer si elle est linéaire de $E$ dans $F$ ou non, et le cas échéant, déterminer une base de son noyau. En cas de présence du symbole ♣, déterminer aussi une base de son image. **F**

1. $E=\mathbf{R}^3$, $F=\mathbf{R}^2$, $f:(x,y,z)\mapsto(2x+y,x+y-3z)$ (♣)
2. $E=F=\mathbf{R}^3$, $f:(x,y,z)\mapsto(2x,0,y+z)$ (♣)
3. $E=F=\mathbf{R}^3$, $f:(x,y,z)\mapsto(x+1,2x-y,z+3y)$ (♣)
4. $E=F=\mathbf{R}[X]$, $f:P\mapsto P(1)+P'+X$
5. $E=F=\mathbf{R}_3[X]$, $f:P\mapsto P(-1)+2XP'$ (♣)
6. $E=F=\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $f:M\mapsto\operatorname{tr}(M)I_2$ (♣)
7. $E=F=\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, $f:M\mapsto M^2+2M^\top$
8. $E=F=\mathbf{R}[X]$, $f:P\mapsto P''$

**Exercice 20.20** Soit $\alpha\in\mathbf{R}$, et soit $f_\alpha\in\mathscr{L}(\mathbf{R}^4,\mathbf{R}^3)$ définie par $(x,y,z,t)\mapsto(x+y+\alpha z+t,x+z+t,y+z)$. **PD**
Déterminer des bases de $\operatorname{Ker}(f_\alpha)$ et $\operatorname{Im}(f_\alpha)$.

**Exercice 20.21** Montrer que l'application $\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}\times\mathbf{K}[X]\\ P & \longmapsto & (P(0),P')\end{array}\right.$ est un isomorphisme. **PD**

**Exercice 20.22** Soient $E, F, G$ trois espaces vectoriels, et soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. PD

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
2. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $p$ est un projecteur de $E$ si et seulement si $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

**Exercice 20.23** Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont stables par $g$. PD

**Exercice 20.24** Soient $f, p$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$, avec $p$ projecteur. Montrer que $f$ et $p$ commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont stables par $f$. AD

**Exercice 20.25** Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ et soient $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer que $f(F) \subset f(G) \Leftrightarrow F + \operatorname{Ker} f \subset G + \operatorname{Ker} f$. AD

**Exercice 20.26** Soit $E$ un espace vectoriel, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Prouver que $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. AD

**Exercice 20.27** Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ non nulle, et soit $u \notin \operatorname{Ker}(\varphi)$. AD
Prouver alors que $E = \operatorname{Ker}(\varphi) \oplus \operatorname{Vect}(u)$.

**Exercice 20.28** Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels deux à deux distincts, et soient $L_0, L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. AD

On note $\pi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i) L_i \end{array} \right.$

1. Montrer que $\pi$ est un projecteur de $\mathbf{R}[X]$, dont on déterminera le noyau et l'image.
2. Montrer que $F = \left\{ Q \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - \lambda_k),\ Q \in \mathbf{R}[X] \right\}$ est un supplémentaire de $\mathbf{R}_n[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$.

**Exercice 20.29** **(Oral X)** D
Soient $p$ et $q$ deux projecteurs d'un espace vectoriel $E$ tels que $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$ et soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que $r$ est un projecteur et trouver son image et son noyau.

# CORRECTION DES EXERCICES DU TD 20

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.1

Nous savons déjà que $\{0\}$ et $\mathbf{K}$ tout entier sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}$. Nous allons en fait prouver qu'il s'agit des seuls.
Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$, non réduit à $\{0\}$.
Alors il existe $x \neq 0$ dans $F$. Et par stabilité de $F$ par multiplication par un scalaire,

$$1 = \underbrace{\frac{1}{x}}_{\in \mathbf{K}} \cdot \underbrace{x}_{\in F} \in F.$$

Et, toujours pas stabilité par la multiplication par un scalaire, pour tout $x \in \mathbf{K}$, $x = x \cdot 1 \in F$.
Donc $\mathbf{K} \subset F$ et puisque par définition, $F \subset \mathbf{K}$, il vient donc $F = \mathbf{K}$.
Ainsi, si $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}$, on a soit $F = \{0\}$ soit $F = \mathbf{K}$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.2

1. Non : la fonction nulle n'en fait pas partie.
2. Non : si une suite $(u_n)$ est croissante strictement, $(-u_n) = (-1) \cdot (u_n)$ n'est plus croissante.

> **Remarque**
> Notons que cette fois, il y avait stabilité par somme (la somme de deux suites croissantes est croissante), mais que c'est la stabilité par la multiplication externe qui n'est pas vérifiée.

3. Oui : la matrice nulle est symétrique. Et si $A, B$ sont symétriques, que $\lambda \in \mathbf{R}$, alors par linéarité de la transposition :
$$(\lambda A + B)^\top = \lambda A^\top + B^\top = \lambda A + B$$
donc $\lambda A + B$ est encore symétrique.
4. Non : la matrice nulle n'en fait pas partie.
5. Oui : la matrice nulle est de trace nulle. Si $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B) = 0$ et si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors par linéarité de la trace,
$$\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) = 0.$$
6. Non : la matrice nulle n'est pas inversible.
7. Oui. Le plus facile est de voir qu'il s'agit des polynômes divisibles par $(X-1)^2(X-3)^2$.
8. Oui.
9. Oui : la fonction nulle satisfait évidemment cette relation. Et si $f, g$ sont deux telles fonctions, que $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda f + g$ est encore dérivable et
$$(\lambda f+g)(0)+2(\lambda f+g)(1) = \lambda(f(0)+2f(1))+g(0)+2g(1) = 3\lambda f'(2)+3g'(2) = 3(\lambda f+g)'(2).$$
10. Non : le polynôme nul n'est pas de degré 2.

> **Remarque**
> De manière générale, les polynômes de degré **égal** à $n$ ne forment pas un sev de $\mathbf{K}[X]$, au contraire de l'ensemble $\mathbf{K}_n[X]$ des polynômes de degré **inférieur ou égal** à $n$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.3

1. $F_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ puisque la suite nulle tend vers 0 et que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. La suite nulle n'est pas dans $F_2$, qui n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$.

> **Rappel**
> Seules les suites égales à 0 à partir d'un certain rang sont équivalentes à 0, ce qui n'est pas le cas de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. La suite nulle est dominée par $\frac{1}{n}$, et si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n}\right)$.
Donc $F_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$.
4. Prenons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$, qui sont toutes deux dans $F_4$ car $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$.
Alors $u_n + v_n = \frac{1}{n^2}$ qui n'est équivalente à aucun $\frac{k}{n}$.
En effet, si $k \neq 0$, $\dfrac{u_n + v_n}{\frac{k}{n}} = \frac{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et pour $k = 0$, $\frac{1}{n^2} \nsim 0$ car $(u_n + v_n)$ n'est jamais nul.
Donc $F_4$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$.

## Solution de l'exercice 20.4

Souvenons nous que nous avons prouvé que l'union de **deux** sous-groupes $F, G$ de $(E, +)$ est un sous-groupe de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset H$.
On en déduit immédiatement que l'union de deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
En effet, si $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors c'est notamment un sous-groupe de $(E, +)$, et donc $F \subset G$ ou $G \subset F$.
Et la réciproque est évidente.

Le but de l'exercice est de prouver que pour davantage que deux sous-espaces vectoriels, une union de sous-espaces vectoriels peut tout de même être un sous-espace vectoriel sous certaines conditions.

Notons $H = \bigcup_{i \in I} F_i$.
Le vecteur nul de $E$ étant dans chacun des $F_i$, il est dans leur union $H$.
Soient $(x, y) \in H^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors il existe $(i, j) \in I^2$ tels que $x \in F_i$ et $y \in F_j$.
Par hypothèse, il existe $k \in I$ tel que $F_i \cup F_j \subset F_k$. Considérons un tel $k$, de sorte que $x \in F_k$ et $y \in F_k$.
Puisque $F_k$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on a donc $\lambda x + y \in F_k \subset H$.
Et donc $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

## Solution de l'exercice 20.5

**1.** Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que

$$\lambda_1 \cdot \underbrace{(0, -2, 1)}_{=e_1} + \lambda_2 \cdot \underbrace{(2, -1, -3)}_{=e_2} + \lambda_3 \cdot \underbrace{(1, 1, -2)}_{=e_3} = (0, 0, 0).$$

Alors, il vient

$$\begin{cases} 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Donc la famille $(0, -2, 1), (2, -1, -3), (1, 1, -2)$ est libre.
Étant par définition une famille génératrice de l'espace qu'elle engendre[1], c'en est une base.
**Pour aller plus loin :** une question légitime est la suivante «quel est l'espace engendré par ses trois vecteurs ?».
Avec un peu d'intuition géométrique, on se dit assez vite qu'une famille de trois vecteurs de l'espace, non coplanaires (puisque c'est ça que signifie la liberté) doit former une base de $\mathbf{R}^3$, et donc engendrer $\mathbf{R}^3$ tout entier. Nous aurons bientôt des résultats concernant la dimension permettant de l'affirmer, mais nous sommes en fait déjà en mesure de le prouver.
En effet, il s'agit donc de prouver que pour tout $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que

$$\lambda_1(0, -2, 1) + \lambda_2(2, -1, -3) + \lambda_3(1, 1, -2) = (x, y, z).$$

Autrement dit de prouver que le système $\begin{cases} 2\lambda_2 + \lambda_3 = x \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 = z \end{cases}$ possède au moins une solution.
Mais ce système ressemble furieusement à celui que nous venons de résoudre, seul le second membre a changé.

Écrivons ce système sous forme matricielle $A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Nous venons de prouver que $A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a pour unique solution $0_{3,1}$. C'est là une caractérisation du fait que $A$ est inversible !
Et puisque $A$ est inversible, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, $AX = Y$ possède une unique solution. Si bien que $(x, y, z)$ est combinaison linéaire de nos trois vecteurs. Et donc l'espace engendré par ces trois vecteurs est bien $\mathbf{R}^3$ tout entier.

**Méthode**
Pour prouver qu'une famille est libre, on revient toujours à la définition. C'est-à-dire qu'on considère une famille de scalaires telle que la combinaison linéaire soit nulle, et on prouve que ces scalaires sont tous nuls.
Notons au passage que si lors des calculs on trouve une solution avec des scalaires non tous nuls, alors la famille est liée.

[1] C'est-à-dire $\mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$.

**2.** Soit on remarque directement qu'une combinaison linéaire des trois vecteurs, à coefficients non nuls, est nulle, comme par exemple

$$\underbrace{(1,i)}_{=e_1}+(1+i)\cdot\underbrace{(2i,i)}_{=e_2}+(1-2i)\cdot\underbrace{(1,1)}_{=e_3}=0_{\mathbf{C}^2}=(0,0).$$

Et alors la famille est liée.

Mais si on ne voit pas[2] une telle combinaison linéaire, alors il suffit de faire un calcul : soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbf{C}^3$. Alors

$$\lambda_1\cdot(1,i)+\lambda_2\cdot(2i,i)+\lambda_3\cdot(1,1)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+2i\lambda_2+\lambda_3=0\\ i\lambda_1+i\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}.$$

[2] Soit qu'il n'en existe pas, soit qu'elle ne «saute pas aux yeux».

Après calculs[3], on trouve que les solutions du système sont les $\lambda_1\,(1,1+i,1-2i)\,,\ \lambda_1\in\mathbf{C}$.
Notons que ceci peut encore s'écrire $\text{Vect}((1,1+i,1-2i))$.
Bref, il existe des solutions non nulles, donc la famille n'est pas libre.
Et en prenant $\lambda_1=1$, on retrouve la combinaison linéaire donnée plus haut.

[3] Appliquer la méthode du pivot, on peut par exemple commencer par $L_1-L_3$.

La relation donnée ci-dessus nous permet par exemple d'exprimer $e_1$ comme une combinaison linéaire de $e_2$ et $e_3$.
Ainsi, $e_1\in\text{Vect}(e_2,e_3)$, de sorte que $\text{Vect}(e_1,e_2,e_3)=\text{Vect}(e_2,e_3)$.
Puisque la famille $(e_2,e_3)$ est libre, car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, c'est une base de $\text{Vect}(e_1,e_e,e_3)$.

**Détails**
Il s'agit là d'une propriété du cours : un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne sert à rien dans un Vect.

**Danger !**
Prouver la liberté à l'aide d'un argument de non colinéarité (ou ce qui revient au même, de non proportionnalité) n'est valable que pour une famille de **deux** vecteurs. Il n'y a pas d'analogue pour les familles plus grandes.

**3.** Puisque $(-1,3,1)=-(1,0,-1)+3(0,1,0)$, la famille n'est pas libre.
Puisque de plus $(3,3,-3)=3(1,0,-1)+3(0,1,0)$, les deux derniers vecteurs peuvent être supprimés de la famille sans changer l'espace engendré. Et la famille de deux vecteurs qui reste est alors libre puisque formée de deux vecteurs non colinéaires.

**4.** Notons $e_1,e_2,e_3,e_4$ nos vecteurs. Pour la liberté, soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ des réels. Alors

$$\lambda_1(1,2,-3)+\lambda_2(3,2,-2)+\lambda_3(3,-1,2,-4)+\lambda_4(-6,-8,11)=(0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+3\lambda_3-\lambda_3-6\lambda_4=0\\ 2\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3-8\lambda_4=0\\ -3\lambda_1-2\lambda_2-4\lambda_3+11\lambda_4=0\end{cases}$$

Après résolution[4], on trouve que l'ensemble des solutions de ce système est

$$\{(-2\lambda_3+3\lambda_4,\lambda_3+\lambda_4,\lambda_3,\lambda_4),(\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbf{R}^2\}.$$

[4] Via la méthode du pivot. Notons tout de suite que 4 inconnues pour 3 équations, il va nous falloir passer par des inconnues secondaires.

Donc déjà le fait qu'il existe des solutions non triviales[5] nous apprend que la famille n'est pas libre.
Par ailleurs, nous connaissons de telles solutions : $(-2,1,1,0)$ et $(3,1,0,1)$ sont solutions.
La première signifie qu'on a la relation de dépendance linéaire $2e_1+e_2+e_3=0_{\mathbf{R}^3}$, la seconde que $3e_3+e_2+e_4=0_{\mathbf{R}^3}$.
Donc $e_3=-2e_1+e_2\in\text{Vect}(e_1,e_2,e_4)$, si bien que $\text{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)=\text{Vect}(e_1,e_2,e_4)$.
De même, $e_4=-3e_3-e_2\in\text{Vect}(e_1,e_2)$. Et donc $\text{Vect}(e_1,e_2,e_4)=\text{Vect}(e_1,e_2)$.
Enfin, $(e_1,e_2)$ est libre, car formée de deux vecteurs non colinéaires. C'est donc une base de $\text{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4)$.

[5] Différentes de $(0,0,\dots,0)$.

**5.** Il s'agit d'une famille de polynômes de degrés deux à eux distincts, elle est donc libre.
Et donc forme une base de l'espace qu'elle engendre.

**6.** On a $f_3=2f_2-\frac{1}{2}f_0$, donc la famille n'est pas libre.
En revanche, on a donc $\text{Vect}(f_0,f_1,f_2,f_3)=\text{Vect}(f_0,f_1,f_2)$.
Prouvons que $(f_0,f_1,f_2)$ est libre.
Soient donc $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ des réels tels que $\lambda_0f_0+\lambda_1f_1+\lambda_2f_2=0_E$.
Alors pour tout $x\in\mathbf{R}$, $2\lambda_0+\lambda_1\cos(x)+\lambda_2\cos^2(x)=0$.

La fonction cos réalisant une surjection de $\mathbf{R}$ sur $[-1,1]$, on a donc, pour tout $t\in[-1,1]$, $2\lambda_0+\lambda_1t+\lambda_2t^2=0$.
Donc le polynôme $2\lambda_0+\lambda_1X+\lambda_2X^2$ possède une infinité de racines, et donc est nul.
Ainsi $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2$, si bien que $(f_0,f_1,f_2)$ est libre, et donc est une base de $\text{Vect}(f_0,f_1,f_2)=\text{Vect}(f_0,f_1,f_2,f_3)$.

**7.** Cette fois il s'agit d'une famille de polynômes qui sont tous de même degré[6], donc on ne peut s'en tirer aussi facilement qu'à la question 5.
Soient donc $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} = 0.$$

En évaluant cette relation en $a$, il vient $\lambda_0 (a-b)^n = 0$, et puisque $a \neq b$, $\lambda_0 = 0$.
Il ne reste donc que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} = 0$, ce qui après simplification[7] par $X-a$, il reste

$$\lambda_1 (X-b)^{n-1} + \lambda_2 (X-a)(X-b)^{n-2} + \cdots + \lambda_n (X-a)^{n-1} = 0_{\mathbf{C}[X]}.$$

De nouveau en évaluant en $a$, il vient $\lambda_1 = 0$. De proche en proche, on prouve alors que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Et donc il s'agit d'une famille libre.

**8.** En nommant $E_1, E_2, E_3$ nos trois matrices, elles sont liées par la relation[8] $E_3 = (1+i)E_1 + iE_2$.
Et donc $\mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3) = \mathrm{Vect}(E_1, E_2)$, de sorte que $(E_1, E_2)$ est une base de $\mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3)$.

[6] Rappelons que ça n'empêche pas la famille d'être libre.

[7] $\mathbf{C}[X]$ est un anneau intègre, donc tout élément est régulier (pour le produit).

[8] Résoudre un système pour la trouver.

## Solution de l'exercice 20.6

On cherche donc pour quelles valeurs de $\alpha$ le système $\mathscr{S}_\alpha$ : $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \alpha\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$, d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbf{R}^3$ possède une solution différente de $(0,0,0)$.
Commençons alors la résolution avec $\alpha \in \mathbf{R}$ quelconque :

$$(\mathscr{S}_\alpha) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \alpha L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0 \\ (\alpha-1)\lambda_2 + (1-\alpha)\lambda_3 = 0 \\ (1-\alpha)\lambda_2 + (1-\alpha^2)\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

▶ **Si** $\alpha = 1$, alors les deux dernières équations deviennent $0 = 0$ et donc le système possède une infinité de solutions.
▶ **Supposons donc** $\alpha \neq 1$. Alors $L_2$ est équivalente à $\lambda_2 = \lambda_3$, et $L_3$ devient, après division par $1-\alpha$ : $\lambda_2 + (1+\alpha)\lambda_3 = 0$. En substituant $\lambda_3$ par $\lambda_2$ on a donc $(2+\alpha)\lambda_2 = 0$.
Si $\alpha \neq -2$, alors cette équation n'a que $\lambda_2 = 0$ comme solution. Et donc $\lambda_3 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$.
En revanche, pour $\alpha = -2$, alors $(1,1,1)$ est solution du système, donc la famille n'est pas libre.

Au final, la famille $(1,1,\alpha), (1,\alpha,1), (\alpha,1,1)$ est liée si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$.
Il n'est d'ailleurs pas difficile de vérifier que dans ces deux cas, la famille est liée :

$$(1,1,1) + (-1)\cdot(1,1,1) + 0\cdot(1,1,1) = 0_{\mathbf{R}^3} \text{ et } (1,1,-2) + (1,-2,1) + (-2,1,1) = 0_{\mathbf{R}^3}.$$

## Solution de l'exercice 20.7

Notons à chaque fois $F$ l'espace en question.

**1.** Soit $(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \in F \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z-t = 0 \\ x+z+t = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2t - z \\ x = -z - t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (-z-t, 2t-z, z, t) = z(-1,-1,1,0) + t(-1,2,0,1) \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,z) \in \mathrm{Vect}((-1,-1,1,0),(-1,2,0,1)).\end{aligned}$$

Donc $(-1,-1,1,0), (-1,2,0,1)$ est une famille génératrice de $F$.
Elle est libre car formée de deux vecteurs non colinéaires . C'est donc une base de $F$.

⚠ Attention !
Ce critère de liberté est très pratique, mais il ne vaut que pour les familles de deux vecteurs, il n'y a pas d'analogue facile pour les familles de trois vecteurs ou plus.

**2.** Soit $P \in \mathbf{R}_4[X]$. Alors $P \in F$ si et seulement si il est divisible par $X(X-4)$, soit encore si et seulement si il existe $a,b,c \in \mathbf{R}$ tels que $P = X(X-4)(aX^2+bX+c)$.
Autrement dit,

$$F = \left\{X(X-4)(aX^2+bX+c),\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\right\}$$

$$= \{aX^3(X-4) + bX^2(X-4) + cX(X-4),\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3\}$$
$$= \mathrm{Vect}\left(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4)\right).$$

Donc $(X(X-4), X^2(X-4), X^3(X-4))$ est une famille génératrice de $F$. Elle est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc c'est une base de $F$.

**3.** Nous avons directement une famille génératrice de $F$.
Elle n'est pas libre car le second vecteur est combinaison linéaire des deux autres : $(1,6,-5,-6) = 3(1,2,-1,0) - 2(1,0,1,3)$.
Donc $\mathrm{Vect}((1,2,-1,0),(1,6,-5,-6),(1,0,1,3)) = \mathrm{Vect}((1,2,-1,0),(1,0,1,3))$.
Cette famille de deux vecteurs est libre, car ils sont non colinéaires, et donc c'est une base de $F$.

**Méthode**
Rappelons que lorsqu'une famille est liée, enlever un vecteur qui est combinaison linéaire des autres ne change pas l'espace engendré.
Et donc en particulier, enlever un tel vecteur à une famille génératrice fournit encore une famille génératrice.

**4.** Nous savons résoudre cette équation différentielle, et $f \in F$ si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que
$$f : x \mapsto \lambda e^x \cos x + \mu e^x \sin x.$$
Donc en notant $f_1 : x \mapsto e^x \cos x$ et $f_2 : x \mapsto e^x \sin x$, on a $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.
Il reste à vérifier que $(f_1, f_2)$ est libre : soient $\lambda_1, \lambda_2$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0$.
Alors en évaluant en 0, on a $\lambda_1 = 0$ et donc $\lambda_2 f_2 = 0$ si bien que $\lambda_2 = 0$.
Donc $(f_1, f_2)$ est libre : c'est une base de $F$.

**5.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Alors $M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} M$ si et seulement si
$$\begin{pmatrix} a & ib \\ c & id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ic & id \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c = 0.$$
Donc si et seulement si $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aE_{1,1} + dE_{2,2}$.
Donc $(E_{1,1}, E_{2,2})$ est une famille génératrice de $F$, elle est évidemment libre[9], donc c'est une base de $F$.

**Autrement dit**
L'ensemble cherché est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

[9] Car formée de deux matrices non colinéaires, mais aussi car il s'agit d'une sous-famille de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, qui est libre comme toute base.

**6.** Nous savons que toute suite de $F$ est de la forme $u_n = 3^n(\lambda n + \mu) = \lambda 3^n n + \mu 3^n$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$. Donc $F = \mathrm{Vect}(v, w)$ où $v_n = 3^n n$ et $w_n = 3^n$.
Il est alors aisé de vérifie que $(v, w)$ est une famille libre de $F$, et donc en est une base.

**7.** Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbf{R}_n[X]$.
Alors $P \in F \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} = 0$. Soit encore si et seulement si $a_0 = -\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i+1}$.
Donc $P \in F \Leftrightarrow P = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(X^i - \frac{1}{i+1}\right) \Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\left(X - \frac{1}{2}, X^2 - \frac{1}{3}, \dots, X^n - \frac{1}{n+1}\right)$.
Donc $F = \mathrm{Vect}\left(X - \frac{1}{2}, X^2 - \frac{1}{3}, \dots, X^n - \frac{1}{n+1}\right)$.
Cette famille est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc c'est une base de $F$.

## Solution de l'exercice 20.8

Puisqu'il s'agit d'une famille infinie, il faut prouver que toute sous-famille finie est libre.
Prouvons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre, ce qui suffira car toute sous-famille finie de la famille de départ est incluse dans une telle famille.

**Rappel**
Une sous-famille d'une famille libre est libre.

Soient donc $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i = 0$.
Alors, par multiplication par $e^{-nx}$, pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$\lambda_0 e^{-nx} + \lambda_1 e^{-(n-1)x} + \cdots + \lambda_{n-1} e^{-x} + \lambda_n = 0.$$
En faisant tendre $x$ vers $+\infty$, il ne reste que $\lambda_n = 0$.
Donc $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f_i = 0$. Divisons alors de nouveau par $f_{n-1}$, puis effectuons un passage à la limite.
On obtient alors $\lambda_{n-1} = 0$.

De proche en proche[10]
Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, de sorte que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre, et donc $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est libre.

**Alternative** : avec les mêmes notations que ci-dessus, notons $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k X^k \in \mathbf{R}[X]$.

Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(e^x) = 0$. Et puisque l'exponentielle réalise une surjection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$, alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $P(t) = 0$.
Donc le polynôme $P$ possède une infinité de racines, si bien que c'est le polynôme nul, et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
**Alternative (bis)** : supposons par l'absurde que les $\lambda_i$ ne soient pas tous nuls, et soit $k = \max\{i \in [\![0, n]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$.

On a alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lambda_k e^{kx} = -\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i e^{ix}$.

Mais $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i e^{ix} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(e^{kx}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\lambda_k e^{kx}\right)$, ce qui est absurde.
Et donc tous les $\lambda_i$ sont nuls.

[10] Encore une fois : une récurrence serait tout indiquée, en prouvant $\mathcal{P}(n)$ : «la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre ».

## Solution de l'exercice 20.9

Notons que nous sommes en présence d'une famille infinie de suites. Elle est donc libre si et seulement si toute sous-famille finie est libre.
Or, une sous-famille finie de $(v^{(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ est une sous-famille de $(v^{(k)})_{0\leqslant k\leqslant n}$ pour un certain $n \in \mathbf{N}$.
Il suffit donc de prouver que toutes ces familles sont libres.

Soit donc $n \in \mathbf{N}$, et soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k v^{(k)} = 0_{\mathbf{R}^{\mathbf{N}}}$.

**Intuition**
Notons que cette combinaison linéaire n'est autre que la suite
$$(\lambda_0, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots).$$

En particulier, pour $i \in [\![0, n]\!]$, on a

$$0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k v^{(k)}\right)_i = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k v_i^{(k)} = \lambda_i.$$

Donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, et donc la famille $(v^{(0)}, \dots, v^{(n)})$ est libre.

Les $v^{(k)}$ sont toutes presque nulles[11]. Donc toute combinaison linéaire des $v^{(k)}$, qui est combinaison linéaire (d'un nombre fini) des $v^{(k)}$ est presque nulle.
En particulier, la suite constante égale à 1 n'est pas une combinaison linéaire des $v^{(k)}$, qui ne forment donc pas une base de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
Mieux : nous venons de prouver que $\mathrm{Vect}(v^{(k)}) \subset \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, l'ensemble des suites presque nulles.
Inversement, si $(u_n)$ est une suite presque nulle, alors elle est nulle à partir d'un certain rang. Notons par exemple $N \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant N$, $u_n = 0$.

Alors $u = \sum_{k=0}^{N} u_k v^{(k)} \in \mathrm{Vect}(v^{(k)}, k \in \mathbf{N})$.
Et donc l'espace engendré par les $v^{(k)}$ est l'ensemble $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ des suites presque nulles[12].

[11] Au sens du cours : tous les termes, sauf un nombre fini, sont nuls.

[12] Ou ce qui revient au même, des suites nulles à partir d'un certain rang.

## Solution de l'exercice 20.10

1. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $A$, qui sont donc des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.

   Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i = 0_{n,1}$.

   On sait alors que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i = A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$.

   Donc si $A$ est inversible, on a $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0_{n,1}$, si bien que $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = 0_{n,1}$, soit encore $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

**Rappel**
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $A$ est inversible si et seulement si
$$AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}.$$

Donc si $A$ est inversible, $(C_1, \dots, C_n)$ est libre.

Et inversement, si $(C_1, \dots, C_n)$ est libre, alors pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, si $AX = 0_{n,1}$, alors $\sum_{i=1}^{n} x_i C_i = 0_{n,1}$, et donc par liberté de $(C_1, \dots, C_n)$, $x_1 = \dots = x_n = 0$, si bien que $X = 0_{n,1}$.
Donc $A$ est inversible.

**Conséquence :** si vous voyez qu'une colonne de $A$ est une combinaison linéaire des autres, alors $A$ n'est pas inversible.
Par exemple, $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible puisque $C_1 + 2C_2 = C_3$.

**2.** Notons $L_1, \dots, L_n$ les lignes de $A$. Alors $L_1^T, \dots, L_n^T$ sont les colonnes de $A^T$.
Et pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$, on a

$$\lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n = 0_{1,n} \Leftrightarrow (\lambda_1 L_1 + \dots + \lambda_n L_n)^T = 0_{n,1} \Leftrightarrow \lambda_1 L_1^T + \dots + \lambda_n L_n^T = 0_{n,1}.$$

Donc s'il existe ue combinaison linéaire nulle des $L_i$ dont les coefficients ne sont pas tous nuls, alors il existe une combinaison linéaire des $C_i$ qui est nulle et dont tous les coefficients ne sont pas nuls.
Ainsi, $(L_1^T, \dots, L_n^T)$ est liée, donc $A^T$ n'est pas inversible.
Or $A$ est inversible si et seulement si $A^T$ l'est, donc $A$ n'est pas inversible.

Notons que toutes les implications qui précèdent sont des équivalences : un des $L_i$ est une combinaison linéaire des autres si et seulement si $(L_1, \dots, L_n)$ est liée.
Donc si et seulement si $(L_1^T, \dots, L_n^T)$ est liée. Soit si et seulement si $A^T$ n'est pas inversible, donc si et seulement si $A$ n'est pas inversible.

En particulier, si l'une des colonnes de $A$ est combinaison linéaire des autres, alors $A$ n'est pas inversible, et donc la famille de ses lignes est liée, donc l'une de ses lignes est combinaison linéaire des autres. Et vice-versa !

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.11

Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n$, et supposons que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (e_i + y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \left( \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) y = \sum_{i=1}^{n} \left( \lambda_i + \left( \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) \alpha_i \right) e_i.$$

Et donc par liberté de $(e_1, \dots, e_n)$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i + \left( \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right) \alpha_i = 0.$$

Notons $S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$, de sorte que la relation ci-dessus s'écrit simplement $\lambda_i + S\alpha_i = 0$.
En sommant ces relations lorsque $i$ varie de 1 à $n$, il vient alors

$$S + S \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \Leftrightarrow S \left( 1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) = 0.$$

▶ **Si** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq -1$, alors $S = 0$, et donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i + S\alpha_i = 0 \Leftrightarrow \lambda_i = 0$.

Ainsi, on a prouvé que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$, et donc $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

▸ **Si** $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -1$, posons alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = \alpha_i$, de sorte que $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = -1$.
On a alors $\lambda_i + S\alpha_i = \alpha_i - \alpha_i = 0$.

Et donc grâce aux équivalences précédemment prouvées, il vient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

Puisque les $\alpha_i$ ne sont pas tous nuls[13], nous venons donc de prouver que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée.

[13] Faute de quoi leur somme serait nulle.

## Solution de l'exercice 20.12

Commençons par prouver que si $X$ est une base de $E$, alors elle est à la fois libre maximale et génératrice minimale.
Supposons donc que $X$ est une base de $E$. Elle est alors libre par définition. Soit donc $Y \in \mathscr{P}(E)$ une partie libre contenant $X$.
Supposons par l'absurde que $Y \neq X$, et soit alors $y \in Y \setminus X$.
Puisque $X$ est génératrice de $E$, il existe $n \in \mathbf{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in X$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i$.
Quitte à regrouper les termes faisant apparaître le même $x_i$, on peut supposer $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts. Et alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - y = 0_E$$

de sorte que $(x_1, \dots, x_n, y)$ n'est pas libre. Mais puisqu'il s'agit d'une famille finie formée de vecteurs deux à deux distincts de $Y$, ceci contredit la liberté de $Y$.
Ainsi, $Y = X$, et donc $X$ est libre maximale.

De même, $X$ est génératrice de $E$ par définition. Considérons donc une partie $Y$ de $E$, contenue dans $X$ et génératrice de $E$.
Supposons par l'absurde que $Y \neq X$, et soit $x \in X \setminus Y$. Alors, puisque $Y$ est génératrice de $E$, il existe $n \in \mathbf{N}$, $y_1, \dots, y_n \in Y$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$.

De nouveau, on peut supposer les $y_i$ deux à deux distincts, et alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i - x = 0_E$, si bien que $(y_1, \dots, y_n, x)$ n'est pas libre, et pourtant formée de vecteurs de $X$ deux à deux distincts.
Ceci contredit la liberté de $X$.
Et donc $Y = X$, si bien que $Y$ est génératrice minimale.

Supposons à présent que $X$ est libre maximale, et prouvons qu'elle est automatiquement génératrice de $E$, de sorte que $X$ est une base de $E$.
Soit donc $x \in E$. Supposons par l'absurde que $x \notin \mathrm{Vect}(X)$. Nous allons alors prouver que $X \cup \{x\}$ est encore une famille libre. Puisqu'elle contient strictement $X$, ceci contredira le fait que $X$ soit libre maximale.
Soit donc $n \in \mathbf{N}$, et soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs deux à deux distincts de $X \cup \{x\}$.
Si tous les $x_i$ sont différents de $x$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs deux à deux distincts de $X$, donc libre par liberté de $X$.
Si en revanche l'un des $x_i$ est égal à $x$, quitte à renuméroter, supposons qu'il s'agit de $x_n$.

Soient alors $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

Si $\lambda_n \neq 0$, alors $x = x_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n} x_i \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}(X)$, ce qui est absurde.

Donc $\lambda_n = 0$, et donc $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i = 0_E$.

Mais $(x_1, \dots, x_{n-1})$ est une famille formée de vecteurs distincts de $X$, donc libre par liberté de $X$.
Et donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$.
Ainsi, $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, si bien que[14] $X \cup \{x\}$ est libre. Et donc $X$ n'est pas libre maximale.

[14] C'est vrai pour toute famille finie de vecteurs deux à deux distincts de $X \cup \{x\}$.

Nous venons donc de prouver que pour tout $x \in E$, $x \in \mathrm{Vect}(X)$, si bien que $X$ est génératrice de $E$, et donc est une base de $E$.

Enfin, supposons $X$ génératrice minimale et prouvons qu'il s'agit d'une base de $E$.
Si $X$ n'est pas libre, alors il existe un vecteur de $X$ qui est combinaison linéaire d'autres vecteurs de $X$. Autrement dit tel que $x \in \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$. Et alors $E = \mathrm{Vect}(X) = \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$ si bien que $X \setminus \{x\}$ est une famille génératrice de $E$ strictement incluse dans $X$ ce qui contredit le fait que $X$ soit génératrice minimale.
Donc une famille génératrice minimale est une base de $E$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.13

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Alors

$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z+t=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-z \\ t=z-y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,t) = (-y-z, y, z, z-y) = y(-1,1,0,-1)+z(-1,0,1,1) \\ &\Leftrightarrow (x,y,z,t) \in \mathrm{Vect}\left((-1,1,0,-1),(-1,0,1,1)\right).\end{aligned}$$

Méthode
Pour déterminer l'ensemble des solutions d'un tel système (2 équations, 4 inconnues), il faut choisir deux inconnues secondaires en fonction desquelles on exprime les deux autres. Il y a plusieurs choix possibles, et aucun n'est meilleur que les autres.

Donc $F = \mathrm{Vect}\left((-1,1,0,-1),(-1,0,1,1)\right)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$, et nous en avons une famille génératrice.
***Remarque*** *: il aurait bien entendu été possible de prouver que $F$ est un sous-espace vectoriel à l'aide de la caractérisation des sous-espaces vectoriels (stabilité par combinaisons linéaires).*

Et puisque $G$ est déjà sous forme d'un Vect, c'est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

Pour prouver qu'ils sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$, nous allons prouver que tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ s'écrit de manière unique comme un élément de $F$ plus un élément de $G$.
Soit donc $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, et soient $u \in F$ et $v \in G$. Alors il existe des réels $a, b, \lambda, \mu$ tels que

$$u = a(-1,1,0,-1) + b(-1,0,1,1) \text{ et } v = \lambda(1,0,0,1) + \mu(0,1,1,0).$$

Et alors $(x,y,z,t) = u+v = (-a-b+\lambda, a+\mu, b+\mu, -a+b+\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b+\lambda = x \\ a+\mu = y \\ b+\mu = z \\ -a+b+\lambda = t \end{cases}$.

Après résolution de ce système d'inconnues $(a, b, \lambda, \mu)$, on obtient comme unique solution $a = y - z + \frac{t-x}{2}, b = \frac{t-x}{2}, \lambda = t + y - z, \mu = z + \frac{x-t}{2}$.
Donc tout vecteur de $\mathbf{R}^4$ s'écrit d'une unique manière comme un élément de $F$ plus un élément de $G$.
Et donc $\mathbf{R}^4 = F \oplus G$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.14

1. Prouvons que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.
Par définition, $F \subset \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et la fonction nulle est dans $F$, puisqu'elle vaut 0 en $x = 0$ et en $x = 1$.
Soient $f$ et $g$ deux éléments de $F$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\lambda f + g$ est continue et

$$(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda f(1) + g(1) = (\lambda f + g)(1).$$

Ainsi, $\lambda f + g \in F$, et donc $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

2. Nous allons prouver que toute fonction continue s'écrit de manière unique comme un élément de $F$ plus un élément de $\mathrm{Vect}(g)$.

Procédons par analyse-synthèse : soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et supposons que $f = f_1 + f_2$, avec $f_1 \in F$ et $f_2 \in \mathrm{Vect}(g)$.
Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f_1 = \lambda g$.
On a alors $f(0) = f_1(0) + \lambda \cdot 0 = f_1(0)$ et $f(1) = f_1(1) + \lambda = f_1(0) + \lambda$.
Et donc $f(1) = f(0) + \lambda \Leftrightarrow \lambda = f(1) - f(0)$.

On en déduit que $f_1 = f - f_2 = f - (f(0) - f(1)) \cdot g$.

Inversement, posons $f_2 = (f(1) - f(0)) \cdot g$ et $f_1 = f - f_2$.
Alors il est évident que $f_2 \in \text{Vect}(g)$, et $f_1 \in F$ car $f_1$ est continue car différence de fonctions continues, et

$$f_1(0) = f(0) - (f(1) - f(0)) \underbrace{g(0)}_{=0} = f(0) \text{ et } f_1(1) = f(1) - (f(1) - f(0)) \underbrace{g(1)}_{=1} = f(0) = f_1(0).$$

Enfin, on a bien

$$f_1 + f_2 = f - f_2 + f_2 = f.$$

Ainsi, $f$ s'écrit de manière unique comme une fonction de $F$ plus une fonction de $\text{Vect}(g)$, et donc $\mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = F \oplus \text{Vect}(g)$.

**Explications**
Nous venons de prouver que si $f$ était somme d'un élément $f_1$ de $F$ et d'un élément $f_2$ de $\text{Vect}(g)$, alors il n'y avait qu'une seule décomposition possible.
Autrement dit, que $f$ s'écrit **d'au plus** une manière comme un élément de $F$ et un élément de $\text{Vect}(g)$.
Il reste à vérifier l'existence d'une telle décomposition.

## Solution de l'exercice 20.15

Soit $x \in F + (G \cap H)$. Alors il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G \cap H$ tel que $x = x_1 + x_2$.
Mais alors $x \in F + G$ car $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$, et de même, $x \in F + H$.
Donc on a bien $x \in (F + G) \cap (F + H)$.

**Alternative :** on sait que $F + G$ et $F + H$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, donc leur intersection est encore un sous-espace vectoriel de $E$.
De plus, $F$ est inclus à la fois dans $F+G$ et dans $F+H$, donc il est inclus dans leur intersection.
Et de même, $G \cap H$ est inclus dans $G$, donc dans $F + G$, et dans $H$, donc dans $F + H$. Et donc dans $(F + G) \cap (F + H)$.
Donc $(F+G) \cap (F+H)$ est un sous-espace vectoriel de $E$, qui contient les deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G \cap H$, donc il contient $F + (G \cap H)$.

**Rappel**
$F+G$ est inclus dans tout sous-espace vectoriel qui contient à la fois $F$ et $G$.

Si $F \subset G$, on a $F + G = G$, puisqu'il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de $E$ qui contient à la fois $F$ et $G$.
Soit $x \in (F + G) \cap (F + H) = G \cap (F + H)$.
Alors $x \in G$, et $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in H$. Mais alors $v = x - u \in G$. Donc $v \in G \cap H$.
Et donc $x = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G \cap H$, donc $x \in F + (G \cap H)$.
On en déduit donc que $(F + G) \cap (F + H) \subset F + (G \cap H)$, d'où l'égalité.

## Solution de l'exercice 20.16

1. Un polynôme $P \in \mathbf{R}_n[X]$ est dans $F_j$ si et seulement si tous les $i \in [\![0, n]\!] \setminus \{j\}$ en sont racines, c'est-à-dire si et seulement si il est divisible par $P_i = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (X - i)$.
Mais puisque $P_i$ est de degré $n$, le quotient de $P$ par $P_i$ est nécessairement de degré 1, c'est-à-dire une constante.
Et donc $F_i = \text{Vect}(P_i)$ : ce qui prouve à la fois qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, et qui en donne une base : c'est la famille formée du seul polynôme (non nul[15]) $P_i$.

[15] Une famille formée d'un seul vecteur **non nul** est libre.

2. Soient $Q_0, \dots, Q_n \in F_0 \times \cdots \times F_n$ tels que $0 = Q_0 + \cdots + Q_n$.
Alors, pour $i \in [\![0, n]\!]$, en évaluant cette relation en $X = i$, il vient

$$Q_0(i) + Q_1(i) + \cdots + Q_n(i) = 0 \Leftrightarrow Q_i(i) = 0.$$

Mais alors $Q_i$, qui est de degré au plus $n$ possède $0, 1, \dots, n$ comme racines, et donc possède $n + 1$ racines distinctes. C'est donc le polynôme nul : $Q_i = 0$.
Et donc la seule façon d'écrire le polynôme nul comme somme d'éléments des $F_i$ est $0 = 0 + \cdots + 0$.
Donc la somme $F_0 + \cdots + F_n$ est directe.

3. Puisque nous savons déjà que la somme est directe, il ne reste qu'à prouver qu'elle est égale à $\mathbf{R}_n[X]$ tout entier, c'est-à-dire que tout polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ est somme d'éléments des $F_i$.
Soit donc $P \in \mathbf{R}_n[X]$, et supposons qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$.
Alors en évaluant en $j \in [\![0, n]\!]$, il vient $P(j) = \lambda_j P_j(j)$, soit encore $\lambda_j = \dfrac{P(j)}{P_j(j)}$.

Inversement, $Q = \sum_{i=0}^{n} \frac{P(i)}{P_i(i)} P_i$ est un polynôme de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $Q(j) = P(j)$.
Donc $P - Q$ possède au moins $n+1$ racines, il est donc nul : donc $P = Q$ est bien dans $\sum_{i=0}^{n} F_i$.
Et donc $\mathbf{R}_n[X] = F_0 + \cdots + F_n = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n$.

> **Question subsidiaire**
> Avez-vous remarqué que les polynômes qu'on a notés $P_i$ sont quasiment des polynômes de Lagrange (ceux associés aux scalaires $(0,1,\dots,n)$ ? Ils n'en diffèrent que par une constante multiplicative.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.17

1. Supposons que les $F_i$ sont en somme directe. Soit alors $k \in [\![2,n]\!]$, et soit $x \in \left(\sum_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap F_k$.

   Alors il existe $e_1, \dots, e_{k-1}$, avec $e_i \in F_i$ tels que $x = \sum_{i=1}^{k-1} e_i$.

   Mais alors $0_E = \sum_{i=1}^{k-1} \underbrace{e_i}_{\in F_i} + \underbrace{(-x)}_{\in F_k}$, et donc $e_1 = \cdots = e_{k-1} = -x = 0_E$, et en particulier $x = 0_E$.

   Donc $\left(\sum_{i=1}^{k-1} F_i\right) \cap F_k = \{0_E\}$.

   Inversement, supposons la condition de l'énoncé vérifiée, et soient $(e_1, \dots, e_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tels que $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0_E$.

   Alors $\underbrace{e_n}_{\in F_n} = \underbrace{-\sum_{i=1}^{n-1} e_i}_{\in \sum_{i=1}^{n-1} F_i} \in \left(\sum_{i=1}^{n-1} F_i\right) \cap F_n$.

   Donc $e_n = 0_E$ et $\sum_{i=1}^{n-1} e_i = 0_E$.

   Puis $e_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n-2} e_i \in \left(\sum_{i=1}^{n-2} F_i\right) \cap F_{n-1}$.

   Donc $e_{n-1} = 0_E$ et $\sum_{i=1}^{n-2} e_i = 0_E$.

   De proche en proche on prouve que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i = 0_E$, et donc que $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.

2. Dans $\mathbf{R}^2$, prenons $F_1 = \mathrm{Vect}(1,0)$, $F_2 = \mathrm{Vect}(0,1)$ et $F_3 = \mathrm{Vect}(1,1)$.
   Alors, il n'est pas dur de constater que $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour $i \neq j$.
   Pourtant, $F_1, F_2$ et $F_3$ ne sont pas en somme directe car $(0,0) = (1,0) + (0,1) - (1,1)$.
   A fortiori, l'intersection des trois sous-espaces est réduite au vecteur nul, et la somme n'est toujours pas directe...

> **Détails**
> Plus généralement, si $u$ et $v$ ne sont pas colinéaires, alors
> $$\mathrm{Vect}(u) \cap \mathrm{Vect}(v) = \{0_E\}.$$

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.18

1. $p$ est clairement définie de $\mathbf{C}^2$ dans lui-même, donc il reste à prouver que $p$ est linéaire.
   Soient $(x,y), (x',y') \in \mathbf{C}^2$, et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors

$$p(\lambda(x,y)+(x',y')) = p(\lambda x+x', \lambda y+y') = \frac{1}{5}(\lambda x+x'+2(\lambda y+y'), 2(\lambda x+x')+4(\lambda y+y')) = \lambda\frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) + \frac{1}{5}(x'+2y', 2x'+4y') = \lambda p(x,y) + p(x',y').$$

   Ainsi $p$ est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbf{C}^2$.

2. Par définition,

$$\mathrm{Ker} p = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : p(x,y) = (0,0)\} = \left\{(x,y) \in \mathbf{C}^2 : \begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+4y=0 \end{cases}\right\} = \{(-2y,y), y \in \mathbf{C}\} = \mathrm{Vect}(-2,1).$$

   On en déduit qu'une base de $\mathrm{Ker} p$ est donnée par $(-2,1)$. En particulier, $\mathrm{Ker} p$ est de dimension 1, et donc $p$ n'est pas injective.

3. D'après le théorème du rang, $\operatorname{Im} p$ est de dimension 1, donc est engendré par n'importe lequel de ses vecteur non nuls.
Par exemple, $p(5,0) = (1,2) \in \operatorname{Im} p$, donc une base de $\operatorname{Im} p$ est formée par $(1,2)$.
4. Soit $(x,y) \in \mathbf{C}^2$. On a

$$\begin{aligned} p(p(x,y)) &= p\left(\frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y)\right) \\ &= \frac{1}{5}p(x+2y, 2x+4y) = \frac{1}{25}(x+2y+2(2x+4y), 2(x+2y)+4(2x+4y)) \\ &= \frac{1}{25}(5x+10y, 10x+20y) = \frac{1}{5}(x+2y, 2x+4y) = p(x,y). \end{aligned}$$

Nous avons donc bien $p \circ p = p$.
$p$ est donc un projecteur, de sorte que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont supplémentaires dans $\mathbf{C}^2$.

**Alternative**
Nous pourrions également retrouver ce résultat en prouvant par exemple que la juxtaposition d'une base de $\operatorname{Ker} p$ et d'une base de $\operatorname{Im} p$ est une base de $\mathbf{C}^2$.

## Solution de l'exercice 20.19

1. Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in \mathbf{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f\big(\lambda(x,y,z)+(x',y',z')\big) &= f(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z') \\ &= \big(2(\lambda x+x')+\lambda y+y', \lambda x+x'+\lambda y+y'-3(\lambda z+z')\big) \\ &= \big(\lambda(2x+y)+(2x'+y'), \lambda(x+y-3z)+(x'+y'-3z')\big) \\ &= \lambda(2x+y, x+y-3z)+(2x'+y', x'+y'-3z') \\ &= \lambda f(x,y,z)+f(x',y',z'). \end{aligned}$$

Donc $f$ est bien linéaire.

Soit $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f &\Leftrightarrow f(x,y,z) = 0_{\mathbf{R}^2} = (0,0) \\ &\Leftrightarrow (2x+y, x+y-3z) = (0,0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ -y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=-y \\ y=-3z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}z \\ y=-3z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y,z) = \left(\frac{3}{2}z, -3z, z\right) = z\left(\frac{3}{2}, -3, 1\right) \in \operatorname{Vect}\left(\left(\frac{3}{2}, -3, 1\right)\right). \end{aligned}$$

Donc la famille formée du seul vecteur $\left(\frac{3}{2}, -3, 1\right)$ est génératrice de $\operatorname{Ker} f$, étant formée d'un seul vecteur non nul elle est libre donc c'est une base.

**Remarque**
À ce stade, on a dit que $\operatorname{Ker} f$ est l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases}$$

la recherche d'une base se fait donc de manière similaire à ce qui a été fait dans l'exercice 7.

Par ailleurs, nous savons que $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ et donc en est génératrice.
Donc $f(1,0,0) = (2,1), f(0,1,0) = (1,1), f(0,0,1) = (0,-3)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
La question est donc de savoir si elle est libre ou non.
Or ici on a $(2,1) = 2(1,1) - \frac{1}{3}(0,-3)$.
Donc $(2,1) \in \operatorname{Vect}((1,1),(0,-3))$. On en déduit que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((2,1),(1,1),(0,-3)) = \operatorname{Vect}((1,1),(0,-3)).$$

Donc la famille $(1,1), (0,-3)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, puisqu'elle est formée de deux vecteurs non colinéaires, elle est libre et donc est une base de $\operatorname{Im} f$.

**Méthode**
Encore une fois : si vous trouvez (comme je le fais ici) une combinaison linéaire de ces trois vecteurs qui est nulle, profitez-en. Et sinon, partez de la définition de la liberté, avec trois scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que la combinaison linéaire

$$\lambda_1(2,1)+\lambda_2(1,1)+\lambda_3(0,-3)$$

soit nulle et résolvez le système qui apparaît alors.
Si $(0,0,0)$ en est l'unique solution, alors la famille est libre.
Sinon vous trouverez une solution non triviale qui vous donnera une relation de dépendance linéaire entre les trois vecteurs.

2. On vérifie que $f$ est bien linéaire.
Pour $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, on a

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow (2x, 0, y+z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, y, -y) = y(0, 1, -1)$$
$$\Leftrightarrow (x, y, z) \in \mathrm{Vect}(0, 1, -1).$$

Donc la famille formée du seul vecteur $(0, 1, -1)$ est génératrice de $\operatorname{Ker} f$, étant formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre donc en est une base.

Comme précédemment, $f(1, 0, 0) = (2, 0, 0), f(0, 1, 0) = (0, 0, 1), f(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Les deux derniers vecteurs étant égaux, on peut en supprimer un, de sorte que $(2, 0, 0), (0, 0, 1)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Cette famille est évidemment libre, donc est une base de $\operatorname{Im} f$.

**3.** On a $f(0, 0, 0) = (1, 0, 0) \neq 0_{\mathbf{R}^3}$, donc $f$ n'est pas linéaire.

**4.** On a $f(0_{\mathbf{R}[X]}) = X \neq 0_{\mathbf{R}[X]}$, donc $f$ n'est pas linéaire.

**5.** Soient $P, Q \in \mathbf{R}_3[X]$, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(-1)+2X(\lambda P+Q)' = \lambda(P(-1)+2XP')+Q(-1)+2XQ' = \lambda f(P)+f(Q).$$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbf{R}_3[X]$. Alors

$$P \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow (-a + b - c + d) + 2(3aX^3 + 2bX^2 + cX) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6a = 0 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \\ -a + b - c + d = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbf{R}[X]}\}$, de sorte que $f$ est injective.
Une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ est

$$f(1) = 1, f(X) = -1 + 2X, f(X^2) = 1 + 4X^2, f(X^3) = -1 + 6X^3.$$

Puisqu'il s'agit de polynômes de degrés deux à deux distincts, ils forment une famille libre de $\mathbf{R}_3[X]$, et donc une base de $\operatorname{Im} f$.

**Base de $\{0_E\}$ ?**
Dans ce cas, pas la peine de chercher une base de $\{0_E\}$, il n'y en a pas.

**Remarque**
Avec un peu plus de travail, on pourrait prouver que $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}_3[X]$, et donc que $f$ est bijective.

**6.** Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors par linéarité de la trace,

$$f(\lambda M + N) = \operatorname{tr}(\lambda M + N)I_2 = (\lambda \operatorname{tr}(M) + \operatorname{tr}(N))I_2 = \lambda f(M) + f(N).$$

Donc $f$ est linéaire.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Alors

$$M \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{tr}(M) = 0 \Leftrightarrow a+d = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\operatorname{Ker} f$.
Il s'agit d'une famille libre car car si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont trois réels tels que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0_2$$

alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Donc il s'agit d'une base de $\operatorname{Ker} f$.

**⚠ Attention !**
Pour plus de deux vecteurs, plus question d'évoquer un argument du type «ces matrices ne sont pas proportionnelles !

Pour l'image, on peut noter que $\operatorname{Im} f \subset \mathrm{Vect}(I_2)$. Et puisque $I_2 = f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \in \operatorname{Im} f$, alors $\mathrm{Vect}(I_2) \subset \operatorname{Im} f$, de sorte que $\operatorname{Im} f = \mathrm{Vect}(I_2)$.
Donc la famille formée de la seule matrice $I_2$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$, et donc[16] est une base de $\operatorname{Im} f$.

[16] Formée d'un seul vecteur non nul, elle est libre.

**7.** La présence du carré doit nous laisser penser que $f$ n'est pas linéaire. Reste à le prouver, et pour une fois on ne peut pas s'en tirer en calculant l'image de la matrice nulle, qui ici est bien nulle.
Notons plutôt que $f(I_n) = 3I_n$, $f(2I_n) = 8I_n \neq f(I_n) + f(I_n)$. Donc $f$ n'est pas linéaire.

**8.** $f$ est bien linéaire, car carré[17] de l'endomorphisme $P \mapsto P'$ de $\mathbf{R}[X]$.
Et nous savons que pour $P \in \mathbf{R}[X]$, $P'' = 0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow \deg P \leqslant 1 \Leftrightarrow P \in \mathbf{R}_1[X]$.
Donc $\operatorname{Ker} f = \mathbf{R}_1[X]$, qui a pour base $(1, X)$.

[17] Au sens de la composition, qui est la seconde loi de l'anneau $\mathscr{L}(E)$.

Bien que ce ne soit pas demandé, il est facile de se convaincre que $f$ est surjective. Par exemple car si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{X^{k+2}}{(k+1)(k+2)}$ est un polynôme tel que $Q'' = P \Leftrightarrow f(Q) = P$.
Donc $\operatorname{Im} f = \mathbf{R}[X]$, qui a pour base la base canonique $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$.
On peut aussi utiliser la base canonique de $\mathbf{R}[X]$, de sorte que

$$(f(1), f(X), f(X^2), \dots, f(X^k), \dots) = (0, 0, 2, 6X, 12X^2, \dots, k(k-1)X^{k-2}, \dots)$$

est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$.
Une fois qu'on enlève les deux premiers qui sont nuls, on obtient une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts, qui est donc libre, et par conséquent est une base de $\operatorname{Im} f$.

## Solution de l'exercice 20.20

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$. Alors $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f_\alpha$ si et seulement si $f_\alpha(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$, soit encore si et seulement si

$$\begin{cases} x + y + \alpha z + t & = 0 \\ x + z + t & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t & = 0 \\ x + y + \alpha z + t & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z + t & = 0 \\ y + z & = 0 \\ (\alpha - 2)z & = 0 \end{cases}$$

► Si $\alpha \neq 2$, alors de la dernière équation on déduit $z = 0$. Et donc $y = 0$, et donc $x = -t$.
Donc $(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f_\alpha \Leftrightarrow (x, y, z, t) = (-t, 0, 0, t) = t(-1, 0, 0, 1) \in \operatorname{Vect}(-1, 0, 0, 1)$.
Donc une base de $\operatorname{Ker} f_\alpha$ est la famille formée du seul vecteur $(-1, 0, 0, 1)$.

De plus, on sait alors l'image de la base canonique[18] de $\mathbf{R}^4$ par $f_\alpha$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f_\alpha$. C'est la famille

[18] Ou de n'importe quelle autre famille génératrice de $\mathbf{R}^4$.

$$\big(f_\alpha(1,0,0,0), f_\alpha(0,1,0,0), f_\alpha(0,0,1,0), f_\alpha(0,0,0,1)\big) = \big((1,1,0), (1,0,1), (\alpha,1,1), (1,1,0)\big).$$

Le premier et le dernier vecteur étant égaux, il ne sert à rien de les garder les deux.
Reste donc à vérifier que la famille $((1,1,0), (1,0,1), (\alpha,1,1))$ est libre.
Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels tels que

$$\lambda_1(1,1,0) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(\alpha,1,1) = (0,0,0).$$

Alors $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha - 2)\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 \end{cases}$.
Puisque $\alpha - 2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, si bien que la famille est libre, et donc est une base de $\operatorname{Im} f_\alpha$.

► Si $\alpha = 2$, alors le système obtenu précédemment pour $\operatorname{Ker} f_\alpha$ devient

$$\begin{cases} x + z + t & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - t \\ y = -z \end{cases}$$

Et donc

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f_\alpha &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = (-z - t, -z, z, t) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t) = z(-1, 1, 1, 0) + t(-1, 0, 0, 1) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z, t) \in \operatorname{Vect}((-1, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)). \end{aligned}$$

Cette famille de deux vecteurs non colinéaires est libre, et donc est une base de $\operatorname{Ker} f_2$.

Et comme précédemment, la famille $(1,1,0), (1,0,1), (2,1,1)$ est génératrice de $\operatorname{Im} f_2$.
Cette fois elle n'est pas libre puisque $(2,1,1) = (1,1,0) + (1,0,1)$.
Donc $\operatorname{Im} f_2 = \operatorname{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$, et cette fois, il s'agit d'une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc d'une famille libre, et donc d'une base de $\operatorname{Im} f_2$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.21

Commençons par la linéarité : soient $P, Q \in \mathbf{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{K}$. Alors

$$\varphi(\lambda P+Q) = ((\lambda P+Q)(0), (\lambda P+Q)') = (\lambda P(0)+Q(0), \lambda P'+Q') = \lambda(P(0), P')+(Q(0), Q') = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q).$$

Donc $\varphi$ est bien linéaire.
Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $\varphi(P) = 0$, c'est-à-dire $P(0) = 0$ et $P' = 0$.
Puisque $P' = 0$, $P$ est constant, et puisque $P(0) = 0$, $P$ est le polynôme nul.
Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{\mathbf{K}[X]}\}$, de sorte que $\varphi$ est injective.
Soit à présent $(\lambda, Q) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}[X]$, avec $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{K}[X]$, et soit $P = \lambda + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{X^{k+1}}{k+1}$.
Alors $P(0) = \lambda$ et $P' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = Q$, de sorte que $\varphi(P) = (\lambda, Q)$.
Donc $\varphi$ est surjective, et donc est un isomorphisme.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.22

1. Supposons que $g \circ f = 0$, et soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Et donc $g(y) = g(f(x)) = 0_G$. Et alors, $y \in \operatorname{Ker} g$, de sorte que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

   Inversement, supposons que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.
Soit alors $x \in E$. Par définition, $f(x) \in \operatorname{Im} f$, et donc $f(x) \in \operatorname{Ker} g$, de sorte que $g(f(x)) = 0_G$.
Et donc $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$.
2. Si $p$ est un projecteur, nous avons déjà prouvé en cours que $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

   Inversement, si $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$, alors par la question 1,

$$(p - \mathrm{id}_E) \circ p = 0 \Leftrightarrow p \circ p - p = 0 \Leftrightarrow p \circ p = p$$

   donc $p$ est un projecteur.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.23

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et alors

$$g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f.$$

Donc $\operatorname{Im} f$ est stable par $g$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$. Alors $f(x) = 0_E$, et donc $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$, de sorte que $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.
Et donc $\operatorname{Ker} f$ est stable par $g$.

**Méthode**
Un tel exercice n'a rien de difficile, mais il faut être très méthodique, et maîtriser parfaitement ses définitions. Par exemple, comment prouver que $\operatorname{Ker} f$ est stable par $g$ ? Cela signifie que si $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $g(x) \in \operatorname{Ker} f$.
Mais que veut dire ce dernier point ? Que $g(f(x)) = 0_E$. Il est donc naturel de calculer $g(f(x))$.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.24

Il est classique[19] que si $f$ et $p$ commutent, alors $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par $f$.
Inversement, supposons que ces deux espaces soient stables par $f$. Alors puisque $p$ est un projecteur, on a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.
Soit $x \in E$. De manière unique, $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} p$.
Alors $f \circ p(x) = f(p(x_1)) = f(x_1)$ et $p \circ f(x) = p(f(x_1)) + p(f(x_2))$.
Mais $\operatorname{Ker} p$ est stable par $f$, de sorte que $f(x_2) \in \operatorname{Ker} p$, et donc $p(f(x_2)) = 0$.
De même, $\operatorname{Im} p$ est stable, donc $f(x_1) \in \operatorname{Im} p$. Et nous savons que pour tout élément $y$ dans $\operatorname{Im} p$, $p(y) = y$. Donc $p \circ f(x) = p(f(x_1)) = f(x_1)$.
Ainsi, $\forall x \in E$, $p \circ f(x) = f \circ p(x)$, donc $p \circ f = f \circ p$ : $f$ et $p$ commutent.

[19] Voir l'exercice précédent.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.25

Procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $f(F) \subset f(G)$.

Soit alors $x \in F$. Alors $f(x) \in f(F)$, et donc $f(x) \in f(G)$, si bien qu'il existe $y \in G$ tel que $f(x) = f(y)$. Et donc $f(x-y) = 0_E$, de sorte que $x - y \in \operatorname{Ker} f$. Et donc $x = y + (x-y) \in G + \operatorname{Ker} f$.
Ainsi, $G + \operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $E$ qui contient $F$, et qui contient évidemment $\operatorname{Ker} f$. Donc il contient leur somme : $F + \operatorname{Ker} f \subset G + \operatorname{Ker} f$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons à présent que $F + \operatorname{Ker} f \subset G + \operatorname{Ker} f$.
Soit alors $y \in f(F)$, et soit $x \in F$ tel que $y = f(x)$.
Alors $x \in F + \operatorname{Ker} f \subset G + \operatorname{Ker} f$, si bien qu'il existe $u \in G$ et $v \in \operatorname{Ker} f$ tels que $x = u + v$.
Et alors $y = f(x) = f(u) + f(v) = f(u) \in f(G)$.
Ainsi, $f(F) \subset f(G)$.

## Solution de l'exercice 20.26

Supposons que $\operatorname{Ker}(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$, et soit alors $x \in \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$.
On a donc $f(x) = 0_E$, et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.
Mais alors $f^2(y) = f(x) = 0_E$, de sorte que $x \in \operatorname{Ker} f^2$.
Par conséquent, $y \in \operatorname{Ker} f$, et donc $x = f(y) = 0_E$.
On en déduit que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f \subset \{0_E\}$, et l'inclusion réciproque étant toujours vraie[20], on a bien l'égalité $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

[20] Tout sous-espace vectoriel de $E$ contient $0_E$.

Inversement, supposons que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Pour commencer, si $f(x) = 0_E$, alors $f^2(x) = 0_E$, de sorte que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(f^2)$.
Inversement, soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2)$, et soit $y = f(x)$.
Alors $y \in \operatorname{Im}(f)$ par définition de l'image, et puisque $f(y) = f^2(x) = 0_E$, de sorte que $y \in \operatorname{Ker}(f)$.
Donc $y \in \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Et ainsi, $y = f(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker}(f)$.
Ceci prouve que $\operatorname{Ker}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f)$, d'où l'égalité.

**Remarque**
Cette inclusion est vraie pour tout endomorphisme, sans hypothèse supplémentaire.

## Solution de l'exercice 20.27

Procédons par analyse-synthèse pour prouver que tout vecteur de $E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\operatorname{Ker} \varphi$ et d'un élément de $\operatorname{Vect}(u)$.
Soit $x \in E$, et supposons que $x = y + z$, avec $y \in \operatorname{Ker} \varphi$ et $z \in \operatorname{Vect}(u)$.
Alors il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $z = \lambda \cdot u$.
En appliquant $\varphi$, il vient $\varphi(x) = \underbrace{\varphi(y)}_{=0} + \lambda \underbrace{\varphi(u)}_{\neq 0}$, égalité qui a lieu dans $\mathbf{K}$.

Et donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}$.

Et alors nécessairement, $y = x - z = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u$.

Donc si une telle décomposition existe, elle est unique.

Inversement, posons $y = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u$ et $z = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} \cdot u$.
Alors $z \in \operatorname{Vect}(u)$ puisqu'il s'agit d'un multiple de $u$.

Et $\varphi(y) = \varphi\left(x - \underbrace{\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)}}_{\in \mathbf{K}} u\right) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(u)} \varphi(u) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$.

Donc $y$ est bien dans $\operatorname{Ker} \varphi$.
Et bien entendu, on a $x = y + z$, de sorte que $x$ s'écrit d'au moins une manière comme somme d'un élément de $\operatorname{Ker} \varphi$ et d'un élément de $\operatorname{Vect}(u)$.
Et donc $x$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de $\operatorname{Ker} \varphi$ et d'un élément de $\operatorname{Vect}(u)$ : $E = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Vect}(u)$.

## Solution de l'exercice 20.28

1. Commençons par prouver que $\pi$ est linéaire.
Soient donc $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbf{R}$. Alors

$$\pi(\alpha P + Q) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha P + Q)(\lambda_i) L_i = \sum_{i=0}^{n} (\alpha P(\lambda_i) + Q(\lambda_i)) L_i$$

Linéarité de l'évaluation.

$$= \alpha \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i)L_i + \sum_{i=0}^{n} Q(\lambda_i)L_i = \alpha\pi(P) + \pi(Q).$$

Puisque les $L_i$ sont tous de degré $n$, il est évident que $\pi$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_n[X]$.
Mais par ailleurs, pour $P \in \mathbf{R}_n[X]$, on a, d'après un résultat du cours sur les polynômes de Lagrange,

$$\pi(P) = \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i)L_i = P.$$

Donc pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\pi(P) \in \mathbf{R}_n[X]$ et donc $\pi(\pi(P)) = \pi(P)$, de sorte que $\pi^2 = \pi$.
Donc $\pi$ est un projecteur.

Nous avons déjà prouvé que son image est incluse dans $\mathbf{R}_n[X]$, et puisque l'image d'un projecteur est exactement l'ensemble de ses points fixes, nous venons donc de prouver que $\mathbf{R}_n[X] \subset \operatorname{Im}\pi$.
Donc $\operatorname{Im}\pi = \mathbf{R}_n[X]$.

Enfin, $(L_0, \dots, L_n)$ étant une base de $\mathbf{R}_n[X]$, il s'agit en particulier d'une famille libre, et donc pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on a

$$P \in \operatorname{Ker}\pi \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} P(\lambda_i)L_i = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(\lambda_i) = 0.$$

Donc $\operatorname{Ker}\pi$ est l'ensemble des polynômes qui possèdent tous les $\lambda_i$ comme racines.

**2.** Puisque $\pi$ est un projecteur, nous savons que $\operatorname{Im}\pi$ et $\operatorname{Ker}\pi$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}[X]$.
Nous avons déjà prouvé que $\operatorname{Im}\pi = \mathbf{R}_n[X]$, et un polynôme possède les $\lambda_i$ comme racines si et seulement si il est divisible par $\prod_{i=0}^{n}(X - \lambda_i)$, donc $\operatorname{Ker}\pi = \left\{ Q\prod_{i=0}^{n}(X - \lambda_i),\ Q \in \mathbf{R}[X] \right\}$.
Ce qui prouve bien le résultat demandé.

## SOLUTION DE L'EXERCICE 20.29

Détails
C'est la question 1 de l'exercice 21.

Commençons par noter que puisque $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$, $q \circ p = 0$.
Le fait que $r$ soit linéaire est évident, prouvons qu'il s'agit bien d'un projecteur, c'est-à-dire que $r \circ r = r$.
On a

$$\begin{aligned} r^2 &= p^2 + q^2 - (p \circ q)^2 + p \circ q + q \circ p - p^2 \circ q - q \circ p \circ q - p \circ q \circ p - p \circ q^2 \\ &= p + q - \underbrace{p \circ q \circ p \circ q}_{=0} + p \circ q + \underbrace{q \circ p}_{=0} - p \circ q - \underbrace{q \circ p \circ q}_{=0} - \underbrace{p \circ q \circ p}_{=0} - p \circ q \\ &= p + q - p \circ q = r. \end{aligned}$$

Donc $r$ est un projecteur de $E$.
On a $p \circ r = p^2 + p \circ q - p^2 \circ q = p + p \circ q - p \circ q = p$.
Donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p$, puisque si $r(x) = 0_E$, $p(x) = p(r(x)) = p(0_E) = 0_E$.
De même, $q \circ r = q$, et donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} q$.
Et donc $\operatorname{Ker} r \subset \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
Inversement, si $x \in \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$, alors $p(x) = q(x) = 0_E$, donc $q(x) = 0_E$.
Donc $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} r$, et donc il y a égalité.

Il est clair que $\operatorname{Im} r \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ puisque $q(x) = \underbrace{p(x) - p(q(x))}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{q(x)}_{\in \operatorname{Im} q}$.
Inversement, si $x \in \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$, alors $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Im} p$ et $x_2 \in \operatorname{Im} q$.
Mais alors $q(x) = q(x_1) + q(x_2) = x_2$, puisque $q \circ p = 0$.
Donc

$$\begin{aligned} r(x) &= p(x) + q(x) - (p \circ q)(x) = p(x_1) + p(x_2) + q(x_1) + q(x_2) - p(x_2) \\ &= x_1 + p(x_2) + x_2 - p(x_2) = x. \end{aligned}$$

Rappel

L'image d'un projecteur est l'ensemble de ses points fixes.

Et donc $x \in \operatorname{Im} r$.
Donc $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.
Notons qu'il est possible d'aller un peu plus loin et de prouver que cette somme est directe.
En effet, si $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, alors, puisque $x \in \operatorname{Im} q$, $q(x) = x$. Mais puisque $x \in \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$, $q(x) = 0_E$.
Donc $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0_E\}$, et donc $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.