

TD 2 : RAPPELS ET COMPLÉMENTS CALCULATOIRES

► Quelques révisions

EXERCICE 2.1 Simplifier au maximum les expressions suivantes, où x et y sont des réels non nuls et $n \in \mathbf{N}$.

F

$$1. (\sqrt{3}\sqrt{2})^4 \quad 2. \frac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3} \quad 3. \left(\frac{3}{4}\right)^{12} \left(\frac{2}{9}\right)^5 \quad 4. \frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n} \quad 5. \frac{\sqrt{75} - 1}{\sqrt{27} + \sqrt{36}}$$

EXERCICE 2.2 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

PD

$$1. 2x = \sqrt{x^2 + 1} \quad 2. 2\sqrt{x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad 3. e^{2x} + 2e^{1+x} = \frac{3}{e^{-2}} \quad 4. \ln(x)^2 - \ln(x) - 10 = \frac{8}{\ln(x)}$$

EXERCICE 2.3 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

PD

$$1. \frac{3x+4}{x^2+1} \geq 5 \quad 2. \frac{x-2}{2x+1} \leq -1. \quad 3. 2x^4 - 9x^2 + 4 < 0 \quad 4. e^{2x} - e^x \leq 2 \quad 5. \frac{x+5}{x^2-1} \geq 1$$

EXERCICE 2.4 Soient a, b, c, d des nombres réels vérifiant $a \leq b$ et $c \leq d$.
Montrer que si $a + c = b + d$, alors nécessairement $a = b$ et $c = d$.

PD

EXERCICE 2.5 Prouver que : 1) pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \frac{2x+1+\cos(2x)}{2-x^2} \leq 4$

AD

$$2) \text{ pour tout } x > 0, \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \frac{16e^{-2}}{3} \quad 3) (\star) \text{ pour tous } x, y \text{ dans } [1, 2], \frac{2}{5} \leq \frac{x+y^2}{x^2+2y-y^2} \leq 6$$

► Inégalités diverses

EXERCICE 2.6 Montrer que pour tout réel x , $x^2 - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x^2) \leq x^2$.

PD

EXERCICE 2.7

AD

- Déterminer le maximum de la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x(1-x)$.
- Soient a, b, c trois réels de $[0, 1]$. Montrer que l'un au moins des nombres $a(1-c)$, $b(1-a)$, $c(1-b)$ est inférieur à $\frac{1}{4}$.

EXERCICE 2.8 Montrer par récurrence que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $1 - nt \leq (1-t)^n \leq \frac{1}{1+nt}$.

AD

EXERCICE 2.9

D

- Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
- En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tous réels strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_n ,

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

On pourra procéder par récurrence sur n .

- À quelle condition cette inégalité est-elle une égalité ?

EXERCICE 2.10

PD

- Montrer que pour tous réels a et b , $(a+b)^2 \geq 4ab$.
- En déduire que pour a et b strictement positifs, $\frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$.
- Montrer que pour x, y, z strictement positifs, $\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leq \frac{x+y+z}{2}$.

EXERCICE 2.11 Soient x, y, z trois réels strictement positifs. Montrer que $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$.

D

À quelle(s) condition(s) cet inégalité est-elle une égalité ?

► Valeur absolue

EXERCICE 2.12 Résoudre les équations suivantes :

PD

1. $x + |x| = \frac{4}{x}$.

2. $x|x| = 3x + 2$.

3. $|x^2 - 3x - 7| = 3$

EXERCICE 2.13 Résoudre l'équation $\ln |x| + \ln |x + 1| = 0$.

PD

EXERCICE 2.14 Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$:

PD

1. $|x + 2| < |x^2 - 4|$

2. $|x + 5| \geq |x^2 - 25|$

3. $\left| \frac{1}{x+1} \right| > 2$

4. $x^2 - 4|x| + 3 > 0$

EXERCICE 2.15 Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \dots + (-1)^{n-2}(n-1)^3 + (-1)^{n-1}n^3| \leq n^4$.

F

EXERCICE 2.16 Soient a, b deux nombres réels. Montrer que $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

AD

► Partie entière

EXERCICE 2.17 Soit $n \in \mathbf{Z}$. Prouver que $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

PD

EXERCICE 2.18 Montrer que pour $n \in \mathbf{N}$, $\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n + 1$.

AD

EXERCICE 2.19 Résoudre l'équation $\left\lfloor \sqrt{x^2 - x + 2} \right\rfloor = 2$ et l'inéquation $\lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor + 1 \leq 2$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

PD

EXERCICE 2.20 Soient x et y deux nombres réels.

PD

1. Prouver que pour $n \in \mathbf{Z}$, $n \leq x \Rightarrow n \leq \lfloor x \rfloor$.
2. Montrer que la fonction partie entière est croissante. Est-ce que si $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$ alors nécessairement $x \leq y$?
3. A-t-on toujours $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$? Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

EXERCICE 2.21 Vrai ou Faux ?

PD

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fautive, et justifier votre réponse (a, b et x sont trois réels).

- | | | |
|---|---|---|
| 1. si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$, alors $ a - b < 1$. | 4. $ a \leq \lfloor a + b \rfloor$. | 7. $\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor$. |
| 2. si $ a - b < 1$ alors $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$. | 5. $a + a = 0 \Leftrightarrow a \leq 0$ | 8. $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \frac{\lfloor x \rfloor}{2}$ |
| 3. si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$. | 6. $ a + b = a \Rightarrow b = 0$. | |

EXERCICE 2.22 Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer les relations suivantes :

AD

1. $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$. On pourra distinguer deux cas, suivant que $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$ ou non.
2. $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

EXERCICE 2.23 Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $n = \lfloor x \rfloor$.

D

1. Exprimer $\lfloor x - 4 \rfloor$ et $\lfloor 2x - 1 \rfloor$ en fonction de n . On pourra si besoin distinguer plusieurs cas.
2. Résoudre l'équation $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor$.

EXERCICE 2.24

D

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe deux entiers naturels a_n et b_n vérifiant $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \right\rfloor$ est un entier impair.

EXERCICE 2.25 (Oral Polytechnique)

TD

On considère une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie de la manière suivante :

$$u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3, u_7 = u_8 = u_9 = u_{10} = 4, \dots$$

Autrement dit, il s'agit d'une suite croissante d'entiers, et telle que pour tout $k \in \mathbf{N}$, exactement k termes de la suite soient égaux à k . En utilisant la fonction partie entière, donner une expression de u_n en fonction de n .

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 2

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.1

- $(\sqrt{3}\sqrt{2})^4 = \left(\left(\sqrt{3}\sqrt{2}\right)^2\right)^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18.$
- $\frac{(xy^2)^3}{(-x)^{-2}y^3} = \frac{x^3y^6}{y^3}(-x)^2 = x^3x^2\frac{y^6}{y^3} = x^5y^3.$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{12}\left(\frac{2}{9}\right)^5 = \left(\frac{3}{2^2}\right)^{12}\left(\frac{2}{3^2}\right)^5 = \frac{3^{12}2^5}{2^{24}3^{10}} = \frac{3^2}{2^{19}}.$
- $\frac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n} = \frac{2^5 \times 8^n \times 8^{-1}}{4^{n+1} - 4^n} = \frac{2^2 \times 8^n}{4^n(4-1)} = \frac{4}{3}\left(\frac{8}{4}\right)^n = \frac{2^{n+2}}{3}.$
- Notons que $75 = 5 \times 15 = 5^2 \times 3$ et $27 = 3^2 \times 3$ donc

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{75}-1}{\sqrt{27}+\sqrt{36}} &= \frac{5\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}+6} \\ &= \frac{1}{3} \frac{5\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+2} = \frac{1}{3} \frac{(5\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-2)}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} \\ &= \frac{1}{3} \frac{17-11\sqrt{3}}{3-4} = \frac{11}{3}\sqrt{3} - \frac{17}{3}.\end{aligned}$$

Astuce

On fait apparaître la quantité conjuguée (au dénominateur, et donc également au numérateur).

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.2

- Notons que $x^2 + 1$ est toujours positif, donc $\sqrt{x^2 + 1}$ est toujours bien défini. Une racine étant toujours positive, toute solution doit vérifier $2x \geq 0$ et donc être positive. Et alors pour $x \geq 0$,

$$2x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow 4x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc l'équation possède une unique solution qui est $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

- L'équation n'a de sens que pour $x > 0$. Et alors, pour $x > 0$, on a, après multiplication par \sqrt{x}

$$2\sqrt{x} + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} - 1 = 0.$$

En posant $X = \sqrt{x}$, on a donc $2X^2 + X - 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc les racines en sont

$$X_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{4} = -1 \text{ et } X_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Puisque $\sqrt{x} = -1$ n'a pas de solution, l'unique solution est $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

- Puisque $e^{1+x} = e^1 e^x$ et $e^{2x} = (e^x)^2$, en posant $X = e^x$, l'équation s'écrit encore

$$X^2 + 2eX - \frac{3}{e^{-2}} = 0.$$

Le discriminant est alors $\Delta = 4e^2 + \frac{12}{e^{-2}} = 4e^2 + 12e^2 = 16e^2 > 0$.

Donc les racines sont $X_1 = \frac{-2e + 4e}{2} = e$ et $X_2 = -3e$.

Puisque $e^x = -3e$ n'a pas de solution¹ et que $e^x = e = e^1 \Leftrightarrow x = 1$, la seule solution de l'équation est 1.

- Notons que l'équation de départ n'a de sens que si $\ln(x)$ est défini et non nul, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 1$.

On a alors, en multipliant par $\ln(x)$,

$$\ln(x)^2 - \ln(x) - 10 = \frac{8}{\ln(x)} \Leftrightarrow (\ln x)^3 - \ln(x)^2 - 10 \ln(x) - 8 = 0.$$

Remarque

La dernière équivalence n'en est une que parce que x est supposé positif.

Dénominateur

\sqrt{x} est défini pour $x \geq 0$, mais si $x = 0$, alors il y a une division par 0, ce qui n'est pas possible !

¹ Une exponentielle est toujours positive.

Donc en posant $X = \ln(x)$, il vient $X^3 - X^2 - 10X - 8 = 0$.

Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 3, cherchons une racine «évidente».

On constate que -2 convient car $(-2)^3 - (-2)^2 - 10 \times (-2) - 8 = -8 - 4 + 20 - 8 = 0$.

Donc le polynôme se factorise par $X - (-2)$:

$$X^3 - X^2 - 10X - 8 = (X + 2)(X^2 - 3X - 4).$$

Les racines de $X^2 - 3X - 4$ sont -1 et 4 .

Or on a $X = \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}$, $\ln(x) = 4 \Leftrightarrow x = e^4$ et $\ln(x) = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$.

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\{e^{-2}, e^{-1}, e^4\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.3

1. Puisque $x^2 + 1$ est toujours positif, on peut sans précautions multiplier les deux membres de l'inégalité par $x^2 + 1$, le sens de l'inégalité ne s'en trouvera pas changé.

On a donc

$$\frac{3x+4}{x^2+1} \geq 5 \Leftrightarrow 3x+4 \geq 5x^2+5 \Leftrightarrow 5x^2-3x+1 \leq 0.$$

Le discriminant de ce polynôme de degré 2 est $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 5 = -11 < 0$.

Donc il ne possède pas de racines, et par conséquent est de signe constant, strictement positif car son coefficient en x^2 est positif.

Donc l'inéquation ne possède pas de solutions.

2. Commençons par remarquer que l'inéquation n'a de sens que si $2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$.

On ne peut alors pas procéder comme à la question précédente, en multipliant par $2x + 1$, car celui-ci n'est pas de signe constant...

En revanche, on a

$$\frac{x-2}{2x+1} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2x+1} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2x+1} \leq 0.$$

Et alors, un tableau de signe permet de conclure facilement

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x-1$	-	-	0	+
$2x+1$	-	0	+	+
$\frac{3x-1}{2x+1}$	+	-	0	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right]$.

3. Posons $X = x^2$ et commençons par résoudre $2X^2 - 9X + 4 < 0$.

Les racines du polynôme $2X^2 - 9X + 4$ sont $\frac{1}{2}$ et 4 , et donc $2X^2 - 9X + 4 < 0$ si et seulement

$$\text{si } X \in \left] \frac{1}{2}, 4 \right[.$$

Il ne reste donc plus qu'à résoudre $\frac{1}{2} < x^2 < 4$.

En prenant la racine carrée, qui préserve les inégalités car elle est croissante sur \mathbf{R}_+ , et même les inégalités strictes car elle est strictement croissante sur \mathbf{R}_+ , on obtient $\frac{1}{\sqrt{2}} < |x| < 2$.

Et donc

$$2x^4 - 9x^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow x \in \left] -2, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right[\cup \left] \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 \right[.$$

4. On a $e^{2x} - e^x \leq 2 \Leftrightarrow (e^x)^2 - e^x - 2 \leq 0$, donc en posant $X = e^x$, on en arrive à $X^2 - X - 2 \leq 0$. Le discriminant du polynôme $X^2 - X - 2$ est $\Delta = 9$, donc les deux racines sont $X_1 = 2$ et $X_2 = -1$.

Ainsi, x est solution de l'inéquation si et seulement si $e^x \in [-1, 2]$.

Une exponentielle étant toujours positive, $e^x \geq -1$ est toujours réalisé, et $e^x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \ln(2)$.

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left] -\infty, \ln(2) \right]$.

Méthode

Une racine dite «évidente» est une racine «petite», généralement dans $\llbracket -2, 2 \rrbracket$.

Intervalle ouvert

On a exclu les racines de cet intervalle, puisqu'on souhaite avoir une inégalité stricte. Or en les racines, le polynôme est égal à 0.

Croissance

On a bien une équivalence car la fonction \ln est **strictement** croissante. Si elle n'était que croissance, on devrait se contenter d'une implication (\Rightarrow).

5. Notons que l'inéquation n'a de sens que pour $x \neq \pm 1$.

$$\text{Pour un tel } x, \text{ on a } \frac{x+5}{x^2-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x+5}{x^2-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+6-x^2}{x^2-1} \geq 0.$$

Pour étudier le signe du trinôme $-x^2 + x + 6$, calculons son discriminant, qui vaut $\Delta = 1 - 4 \times 6 \times (-1) = 25$.

Ses racines sont donc $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{-2} = 3$ et $x_2 = -2$.

Donc $-x^2 + x + 6 \geq 0$ si et seulement si $-2 \leq x \leq 3$.

D'autre part, on a $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ ou $x \leq -1$.

Rappel

Un polynôme de degré 2 est du signe de son coefficient dominant (ici négatif) à l'extérieur des racines et du signe opposé entre les racines.

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$
$-x^2 + x + 6$	-	0	+	+	0	-
$x^2 - 1$	+	+	0	-	0	+
$\frac{-x^2+x+6}{x^2-1}$	-	0	+	-	+	0

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $[-2, -1[\cup]1, 3]$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.4

Si l'une des deux inégalités $a \leq b$ et $c \leq d$ était une inégalité stricte², alors la somme des deux inégalités serait une inégalité stricte (quand bien même l'autre inégalité serait une égalité !).

Autrement dit, on aurait $a + c < b + d$, ce qui n'est pas le cas.

On en déduit que $a = b$ et $c = d$.

² C'est-à-dire si on avait $a \neq b$ ou $c \neq d$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.5

1. Nous savons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

Et donc $0 \leq 2x \leq 2x + 1 + \cos(2x) \leq 2x + 2 \leq 4$.

D'autre part, $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $1 \leq 2 - x^2 \leq 2$.

En passant à l'inverse, on a donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2 - x^2} \leq 1$.

Et donc en multipliant les deux inégalités³ ainsi obtenues,

$$0 \leq \frac{2x + 1 + \cos(2x)}{2 - x^2} \leq 4.$$

2. Notons φ la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par $\varphi(t) = t^2 e^{-t}$, de sorte que $x e^{-\sqrt{x}} = \varphi(\sqrt{x})$.

Alors φ est dérivable, de dérivée $\varphi' : t \mapsto t(2-t)e^{-t}$.

Il est alors aisé d'en dresser le tableau de variations, et de constater que φ possède un maximum en $t = 2$, égal à $\varphi(2) = 4e^{-2}$.

Donc déjà, pour $x > 0$, $x e^{-\sqrt{x}} \leq 4e^{-2}$.

De même, soit $\psi : t \mapsto t^2 - t + 1$. Il s'agit alors d'une fonction polynomiale de degré 2, dont on sait que le minimum est atteint⁴ en $\frac{1}{2}$, et vaut $\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Et donc pour tout $x > 0$, $\ln(x)^2 - \ln(x) + 1 = \psi(\ln(x)) \geq \frac{3}{4}$.

En passant à l'inverse, on a donc $\frac{1}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \frac{4}{3}$.

Il ne reste alors qu'à multiplier les inégalités pour conclure : pour $x > 0$, $\frac{x e^{-\sqrt{x}}}{\ln(x)^2 - \ln(x) + 1} \leq \frac{16e^{-2}}{3}$.

Classique

Le raisonnement que nous venons de tenir s'appelle un raisonnement par l'absurde : on suppose que la conclusion est fautive, et on en déduit une contradiction (ici que $a + c \neq b + d$). Nécessairement, cela impose que la conclusion est vraie.

³ Toutes formées de nombres positifs.

⁴ Inutile de dériver : vous connaissez une formule donnant l'abscisse du sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$: c'est $-\frac{b}{2a}$.

3. Essayons d'adopter une approche similaire à celle employée à la question précédente : $1 \leq y^2 \leq 4$ et donc $3 \leq 2x + y^2 \leq 6$.

De même, $1 \leq x^2 \leq 4$, $2 \leq 2y \leq 4$ et $-4 \leq -y^2 \leq -1$.

On en déduit que $-1 \leq x^2 + 2y - y^2 \leq 7$.

On réalise alors que notre minoration est trop « brutale », puisqu'on souhaiterait n'avoir que des nombres positifs à la fin.

Essayons d'être plus subtils en étudiant la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(y) = 2y - y^2$. Sa dérivée est $f'(y) = 2 - 2y = 2(1 - y) \leq 0$. Donc f est décroissante sur $[1, 2]$ et admet

donc un maximum en 1, qui vaut $f(1) = 1$ et un minimum en 2 qui vaut $f(2) = 0$.
Donc pour tout $y \in [1, 2]$, $0 \leq 2y - y^2 \leq 1$.

On en déduit que $1 \leq x^2 + 2y - y^2 \leq 5$ et donc $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x^2 + 2y - y^2} \leq 1$.

Enfin, en multipliant par l'encadrement du numérateur précédemment obtenu,

$$\frac{2}{5} \leq \frac{x + y^2}{x^2 + 2y - y^2} \leq 6.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.6

Puisque toutes les quantités qui interviennent dans l'énoncé dépendent toutes de x^2 , nous allons plutôt prouver que pour tout $X \in \mathbf{R}_+$, $X - \frac{X^2}{2} \leq \ln(1 + X) \leq X$.

En effet, une fois ces inégalités prouvées, pour $x \in \mathbf{R}$, en posant $X = x^2 \geq 0$, il viendra alors

$$X - \frac{X^2}{2} \leq \ln(1 + X) \leq X \Leftrightarrow x^2 - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1 + x^2) \leq x^2.$$

Prouvons donc séparément les deux inégalités $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x)$ et $\ln(1 + x) \leq x$.

Pour la première définissons une fonction f sur \mathbf{R}_+ en posant $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$.

Alors f est dérivable et $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - (1+x) + x(1+x)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$.

Et donc pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$, de sorte que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

Puisque de plus, $f(0) = 0$, on en déduit que pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$$

Pour prouver l'autre inégalité, définissons une fonction g sur \mathbf{R}_+ par $g(x) = \ln(1 + x) - x$.

Alors g est dérivable et $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$.

On en déduit que g est décroissante sur \mathbf{R}_+ , et puisque $g(0) = 0$, il vient donc, pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) - x \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) \leq x.$$

En résumé, on a bien, pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x$.

Alternative : si on n'avait pas vu que tout dépend de x^2 , on peut aussi tout simplement étudier les fonctions $x \mapsto \ln(1 + x^2) - x^2$ et $x \mapsto \ln(1 + x^2) - x + \frac{x^2}{2}$ sur \mathbf{R} tout entier. Les calculs de dérivées et études de variations ne coûtent guère plus cher, et on constate que ces fonctions admettent respectivement un maximum et un minimum en 0, et que ces deux extrema sont nuls, ce qui conduit comme ci-dessus aux inégalités désirées.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.7

1. Il s'agit d'une fonction polynôme de degré 2, de coefficient en x^2 négatif : elle admet donc un maximum en $x = \frac{1}{2}$, et ce maximum vaut $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

2. Commençons par noter que puisque $a \geq 0$ et $1 - c \geq 0$, alors $a(1 - c) \geq 0$. Et de même pour $b(1 - a)$ et $c(1 - b)$.

On a alors

$$a(1 - c) \times b(1 - a) \times c(1 - b) = a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c).$$

Or d'après la question précédente, les trois nombres $a(1 - a)$, $b(1 - b)$ et $c(1 - c)$ sont inférieurs à $\frac{1}{4}$.

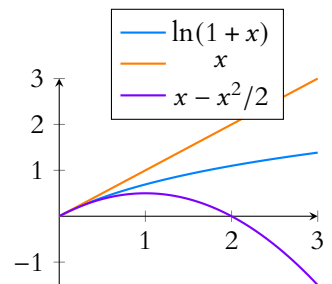
Et donc, puisqu'ils sont positifs, leur produit est inférieur à $\frac{1}{4^3}$.

Supposons par l'absurde que les trois nombres $a(1 - c)$, $b(1 - a)$ et $c(1 - b)$ soient supérieurs strictement à $\frac{1}{4}$.

Remarque

Cet encadrement est à comparer avec celui obtenu précédemment :

$$-2 \leq 2y - y^2 \leq 3.$$

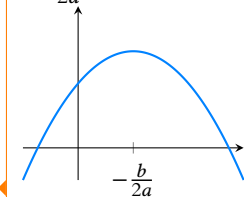


Rappel

Une fonction de la forme

$$ax^2 + bx + c, \quad a < 0$$

admet un maximum en $x = \frac{-b}{2a}$.



Alors leur produit $a(1-a)b(1-b)c(1-c)$ est supérieur strictement à $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, ce qui est absurde.

Donc nécessairement, l'un **au moins**⁵ des trois réels $a(1-c)$, $b(1-a)$, $c(1-b)$ est inférieur à $\frac{1}{4}$.

⁵ Il se peut tout à fait que deux d'entre eux, voire les trois soient inférieurs à $\frac{1}{4}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.8

Comme indiqué, procédons par récurrence sur n .

Soit donc $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $\forall t \in [0, 1], 1 - nt \leq (1 - t)^n \leq \frac{1}{1 + nt}$ ».

Initialisation. Soit $t \in [0, 1]$. On a évidemment $1 - t \leq (1 - t)^1$ et

$$1 - t \leq \frac{1}{1 + t} \Leftrightarrow (1 - t)(1 + t) \leq 1 \Leftrightarrow 1 - t^2 \leq 1 \Leftrightarrow t^2 \geq 0$$

ce qui est évidemment vrai.

Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons à présent que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, et soit $t \in [0, 1]$.

On a donc $(1 - t)^n \geq 1 - nt$, ce qui après multiplication par $1 - t$ donne $(1 - t)^{n+1} \geq (1 - t)(1 - nt)$. Mais

$$(1 - t)(1 - nt) = 1 - (n + 1)t + \underbrace{nt^2}_{\geq 0} \geq 1 - (n + 1)t.$$

Et donc $(1 - t)^{n+1} \geq 1 - (n + 1)t$.

D'autre part, par hypothèse de récurrence, $(1 - t)^n \leq \frac{1}{1 + nt}$ et $1 - t \leq \frac{1}{1 + t}$.

Donc en multipliant ces deux inégalités⁶,

$$(1 - t)^{n+1} \leq \frac{1}{1 + nt} \frac{1}{1 + t} \leq \frac{1}{1 + (n + 1)t + t^2} \leq \frac{1}{1 + (n + 1)t}.$$

La proposition est donc vérifiée au rang $n + 1$, et donc par le principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$ et quel que soit $t \in [0, 1]$,

$$1 - nt \leq (1 - t)^n \leq \frac{1}{1 + nt}.$$

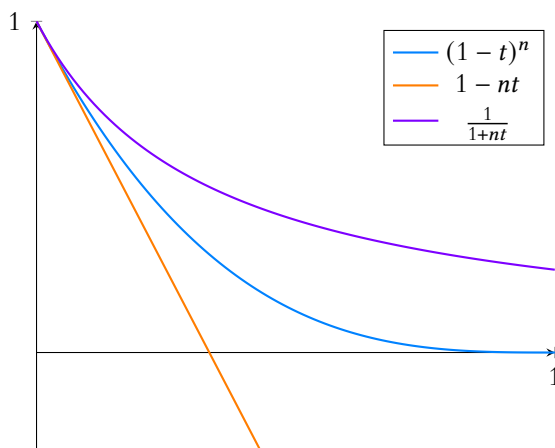


FIGURE 2.1 – Ici, $n = 3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.9

- La solution la plus simple est probablement une étude de fonction : la fonction $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ atteint son minimum en $x = 1$.

Une autre solution est la suivante : pour $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0.$$

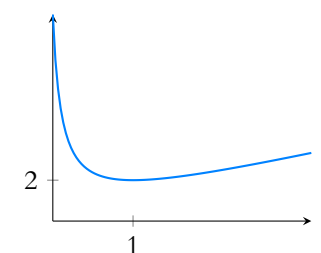


FIGURE 2.2– $x \mapsto x + \frac{1}{x}$

2. Comme indiqué, procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, en notant $\mathcal{P}(n)$ la propriété :
 «pour tous réels strictement positifs a_1, \dots, a_n , $(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$ ».

Pour $n = 1$, si $a_1 \in \mathbf{R}_+^*$, alors $a_1 \times \frac{1}{a_1} = 1 = 1^2$.

Supposons donc la propriété vraie au rang n , et soient a_1, \dots, a_{n+1} des réels strictement positifs.

Alors

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_{n+1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}} \right) &= (a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) + a_{n+1} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) + (a_1 + \dots + a_n) \frac{1}{a_{n+1}} + a_{n+1} \frac{1}{a_{n+1}} \\ &\geq n^2 + \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_1} + \frac{a_1}{a_{n+1}}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_2} + \frac{a_2}{a_{n+1}}}_{\geq 2} + \dots + \underbrace{\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}}}_{\geq 2} + 1 \\ &\geq n^2 + 1 + 2n \\ &\geq (n+1)^2. \end{aligned}$$

Donc par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

3. Dans la première question, il est aisé de constater⁷ que $x + \frac{1}{x} = 2$ si et seulement si $x = 1$.
 Prouvons alors que pour tout n , quels que soient les réels strictement positifs a_1, \dots, a_n , on a $(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = n^2$ si et seulement si tous les a_i sont égaux.

⁷ Quelle que soit la méthode employée parmi les deux proposées.

Si tous les a_i sont égaux, alors $a_1 + \dots + a_n = na_1$ et $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{n}{a_1}$, si bien que

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) = n^2.$$

Inversement, supposons que $n \geq 2$ et que deux des a_i soient distincts. Quitte à les renumérotter, on peut supposer que ce sont a_{n-1} et a_n .

On a alors $\frac{a_{n-1}}{a_n} \neq 1$, si bien que $\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} > 2$.

Mais par la question précédente, $(a_1 + \dots + a_{n-1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) \geq (n-1)^2$.

Et donc

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) &= (a_1 + \dots + a_{n-1}) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + a_n \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + (a_1 + \dots + a_{n-1}) \frac{1}{a_n} + a_n \frac{1}{a_n} \\ &\geq (n-1)^2 + 1 + \underbrace{\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_1}{a_n}}_{\geq 2} + \underbrace{\frac{a_n}{a_2} + \frac{a_2}{a_n}}_{\geq 2} + \dots + \underbrace{\frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n}}_{> 2} \\ &= (n-1)^2 + 1 + 2(n-1) \\ &= n^2. \end{aligned}$$

L'une des inégalités que l'on somme étant stricte, la somme est stricte.

Donc dans ce cas, l'inégalité est stricte, si bien que l'inégalité de départ est une égalité si et seulement si tous les a_i sont égaux.

Remarques : ► une récurrence n'est pas forcément nécessaire : si on développe «brutalement» le produit $(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$, on obtient une somme de n^2 termes, dont n sont égaux à 1.

Les autres, au nombre de $n^2 - n$, peuvent être groupés deux par deux : $\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \geq 2$. Et donc au final

$$(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n + \frac{n^2 - n}{2} \cdot 2 = n^2.$$

8 ► si vous vous souvenez de l'inégalité de Cauchy-Scwarz rencontrée dans le DM1, vous constaterez alors que

$$\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \right) \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{a_k}} \right)^2 \right)$$

ce qui est précisément l'inégalité cherchée. En revanche, cette méthode ne permet pas de répondre à la question 3, du moins pas tant que nous n'avons pas décrit le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.10

1. On a

$$(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

Puisque cette dernière inégalité est trivialement vérifiée⁸, on a bien $(a+b)^2 \geq 4ab$.

2. Puisque $(a+b)^2 \geq 4ab$, alors

$$\frac{(a+b)(a+b)}{4} \geq ab \Leftrightarrow \frac{a+b}{4} \geq \frac{ab}{a+b}.$$

3. En appliquant trois fois le résultat de la question précédente,

$$\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}, \quad \frac{xz}{x+z} \leq \frac{x+z}{4}, \quad \frac{yz}{y+z} \leq \frac{y+z}{4}.$$

En sommant ces trois inégalités, il vient

$$\frac{xy}{x+y} + \frac{xz}{x+z} + \frac{yz}{y+z} \leq \frac{x+y}{4} + \frac{x+z}{4} + \frac{y+z}{4} \leq \frac{2x+2y+2z}{4} \leq \frac{x+y+z}{2}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.11

Soit x, y et z trois réels strictement positifs.

Remarquons que $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \frac{y}{z}$ et donc $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2}$.

Et de même en permutant les rôles de x, y et z . Il vient alors

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} &\geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \\ \Leftrightarrow 2\frac{x^2}{y^2} + 2\frac{y^2}{z^2} + 2\frac{z^2}{x^2} &\geq 2\frac{x}{z} + 2\frac{y}{x} + 2\frac{z}{y} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{z} + \frac{y^2}{z^2}\right) &+ \left(\frac{y^2}{z^2} - 2\frac{y}{x} + \frac{z^2}{x^2}\right) + \left(\frac{z^2}{x^2} - 2\frac{z}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 &+ \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est triviale⁹.

De plus, il y a égalité dans l'inégalité de départ si et seulement si

$$\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z} - \frac{z}{x}\right)^2 + \left(\frac{z}{x} - \frac{x}{y}\right)^2 = 0.$$

Or une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, donc si et seulement si

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}, \quad \frac{y}{z} = \frac{z}{x}, \quad \frac{z}{x} = \frac{x}{y}.$$

Soit encore si et seulement si $x^2 = yz$, $y^2 = xz$ et $z^2 = xy$.

Il vient alors $z = \frac{x^2}{y}$, donc en substituant dans $y^2 = xz$, il vient $y^2 = \frac{x^3}{y} \Leftrightarrow x^3 = y^3$. Et

donc $x = y$.

On prouve de même que $y = z$, et donc $x = y = z$.

Inversement, il est clair que si $x = y = z$, alors l'inégalité de départ est une égalité.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.12

⁸ Un carré est toujours positif.

Signe

Notons que le sens des inégalités n'est pas changé car $a+b > 0$.

⁹ Une somme de carrés est toujours positive.

1. Notons que le membre de droite de l'équation n'est défini que si $x \neq 0$, on résout donc l'équation sur \mathbf{R}^* .

Si $x > 0$, alors $|x| = x$, de sorte que l'équation s'écrit encore $2x = \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Et si $x < 0$, alors $|x| = -x$, de sorte que $x + |x| = x + (-x) = 0$, et donc l'équation ne possède pas de solution dans \mathbf{R}_* .

Ainsi, l'équation $x + |x| = \frac{4}{x}$ possède $\sqrt{2}$ comme unique solution.

2. Distinguons les cas $x \geq 0$ et $x < 0$.

Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$, et donc $x|x| = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$.

Le polynôme $x^2 - 3x + 2$ possède un discriminant égal à $\Delta = 3^2 - 4(-2) = 17$, et a donc pour racines $x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} < 0$ et $x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} > 0$.

Donc la seule solution dans \mathbf{R}_+ de $x|x| = 3x + 2$ est $\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$.

Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et donc

$$x|x| = 3x + 2 \Leftrightarrow -x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Or le polynôme $x^2 + 3x + 2$ possède un discriminant égal à $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1$, de sorte qu'il possède pour racines $x_3 = \frac{-3 - 1}{2} = -2$ et $x_4 = \frac{-3 + 1}{2} = -1$.

Ces deux solutions sont bien des nombres négatifs.

Et donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-2, -1, \frac{3 + \sqrt{17}}{2}\right\}$.

3. On a $|x^2 - 3x - 7| = 3$ si et seulement si $x^2 - 3x - 7$ vaut soit 3 soit -3.

Or $x^2 - 3x - 7 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$, dont les solutions sont -2 et 5.

De même, $x^2 - 3x - 7 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$, équation dont les solutions sont -1 et 4. Donc l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\{-2, -1, 4, 5\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.13

Commençons par noter que tous les termes de cette équation sont bien définis si et

seulement si $\begin{cases} |x| \neq 0 \\ |x+1| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

On a alors, pour $x \notin \{0, -1\}$,

$$\ln|x| + \ln|x+1| = 0 \Leftrightarrow \ln|x(x+1)| = 0 \Leftrightarrow |x(x+1)| = 1.$$

Soit encore $x(x+1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$ ou $x(x+1) = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$.

La première équation possède un discriminant égal à 5 et possède $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ comme solutions.

La seconde équation possède un discriminant strictement négatif, et donc n'a pas de solutions.

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation de départ est $\left\{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right\}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.14

1. Notons que $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$, et donc $|x^2 - 4| = |x+2| \cdot |x-2|$.

Et donc il vient

$$|x+2| < |x^2 - 4| \Leftrightarrow |x+2| < |x+2| \cdot |x-2| \Leftrightarrow 0 < |x+2| (|x-2| - 1).$$

Il est clair que $x = -2$ n'est pas solution car alors $|x+2| = 0$.

Et pour $x \neq -2$, $|x+2| > 0$, de sorte que

$$0 < |x+2| (|x-2| - 1) \Leftrightarrow |x-2| - 1 > 0 \Leftrightarrow |x-2| > 1.$$

Or, $|x-2| > 1 \Leftrightarrow x-2 > 1$ ou $x-2 < -1$.

Soit encore $x > 3$ ou $x < 1$.

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -\infty, -2[\cup] -2, 1[\cup] 3, +\infty[$.

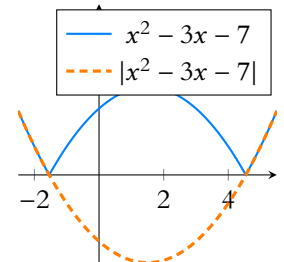
Signe

L'équation $x^2 = 2$ possède également $x = -\sqrt{2}$ comme solution, mais puisque nous travaillons avec $x > 0$, cette solution n'est pas pertinente ici.

Méthode

Afin de manipuler les valeurs absolues, le plus simple est souvent (mais pas toujours) de revenir à la définition :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Bien que ce ne soit pas nécessaire pour répondre à la question, je laisse ces deux graphiques ici et vous laisse comprendre en quoi ils se ressemblent et pourquoi.

2. Notons que $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$ et donc $|x^2 - 25| = |x + 5| \cdot |x - 5|$.
Et donc l'inéquation s'écrit encore $|x + 5| \geq |x + 5| \cdot |x - 5|$.
Pour $x \neq -5$ l'inéquation est donc équivalente à $|x - 5| \leq 1$
Soit encore $-1 \leq x - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6$.
Enfin, -5 est solution de l'inéquation, donc l'ensemble des solutions est $\{-5\} \cup [4, 6]$.
3. Notons que pour $x = -1$, l'inéquation n'a pas de sens¹⁰.
Voici deux méthodes de résolution qui, si elles conduisent au même résultat¹¹ ne nécessitent pas la même quantité de calcul. Avant de se lancer, mieux vaut donc réfléchir aux outils dont on dispose et choisir ceux qui nous semblent le plus pertinents.

► **1^{ère} méthode** : pour $x \neq -1$, on a $\left| \frac{1}{x+1} \right| > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > 2$ ou $\frac{1}{x+1} < -2$.

$$\text{Or, } \frac{1}{x+1} > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-1-2x}{x+1} > 0.$$

Un tableau de signe nous permet alors de conclure :

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-1 - 2x$		+	+	-
$x + 1$	-	0	+	+
$\frac{-1-2x}{x+1}$	-	0	+	-

$$\text{Et de même, on a } \frac{1}{x+1} < -2 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} < 0.$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$+\infty$
$2x + 3$	-	0	+	+
$x + 1$	-	-	0	+
$\frac{2x+3}{x+1}$	+	0	-	+

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left] -\frac{3}{2}, -1 \right[\cup \left] -1, -\frac{1}{2} \right[$.

► **2^{ème} méthode** : pour $x \neq -1$, $|x + 1| > 0$ et donc

$$\left| \frac{1}{x+1} \right| > 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > |x+1| \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x+1 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}.$$

Puisque -1 avait été d'office exclu de l'ensemble des solutions, on trouve donc comme ensemble de solutions $\left] -\frac{3}{2}, -1 \right[\cup \left] -1, -\frac{1}{2} \right[$.

4. Il serait possible de distinguer les cas $x \geq 0$ et $x < 0$, et de résoudre dans les deux cas une inéquation du second degré.
Mais notons plutôt que $x^2 = |x|^2$, et donc en posant $X = |x|$, l'inéquation de départ s'écrit $X^2 - 4X + 3 > 0$.
Mais le polynôme $X^2 - 4X + 3$ possède un discriminant égal à 4 et possède donc pour racines 1 et 3. Ainsi $X^2 - 4X + 3 > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$.
Puisque d'autre part, $|x| \geq 0$, on a donc

$$x^2 - 4|x| + 3 > 0 \Leftrightarrow |x| \in [0, 1[\cup]3, +\infty[\Leftrightarrow x \in]-\infty, -3[\cup]-1, 1[\cup]3, +\infty[.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 \leq k^3 \leq n^3$. Et donc en particulier, $|k^3| = k^3 \leq n^3$.
Et donc par l'inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} |1^2 - 2^3 + 3^3 + \dots + (-1)^{n-1} n^3| &\leq |1^3| + |-2^3| + \dots + |(-1)^{n-1} n^3| \\ &\leq 1^3 + \dots + n^3 \\ &\leq n^3 + \dots + n^3 = n \times n^3 = n^4. \end{aligned}$$

⚠ Attention !

Si on souhaite diviser par $|x+5|$, il faut d'abord s'assurer que celui-ci n'est pas nul !

¹⁰ Division par zéro.

¹¹ Encore heureux !

Rappel

Un polynôme du second degré possédant deux racines est du signe du coefficient de degré 2 à l'extérieur des racines et du signe opposé en dehors des racines.

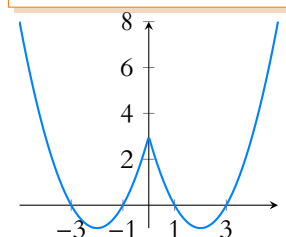


FIGURE 2.3– La fonction $x \mapsto x^2 - 4|x| + 3$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.16

Première méthode : brutale. Commençons par noter que

$$\frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} = \frac{|a|(1+|b|) + |b|(1+|a|)}{(1+|a|)(1+|b|)} = \frac{|a| + |b| + 2|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|}.$$

Et donc il vient

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \\ \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leq \frac{|a|+|b|+2|ab|}{1+|a|+|b|+|ab|} \\ \Leftrightarrow |a+b|(1+|a|+|b|+|ab|) &\leq (1+|a+b|)(|a|+|b|+2|ab|) \\ \Leftrightarrow |a+b|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+|ab|\cdot|a+b| &\leq |a|+|b|+2|ab|+|a|\cdot|a+b|+|b|\cdot|a+b|+2|ab|\cdot|a+b| \\ \Leftrightarrow |a+b| &\leq |a|+|b|+|ab|\cdot|a+b|+2|ab|. \end{aligned}$$

Signes !

Notons que ce que nous venons de faire est bien licite car nous avons multiplié par des nombres **positifs**, ce qui préserve le sens de l'inégalité.

Mais par l'inégalité triangulaire, $|a+b| \leq |a|+|b|$, de sorte que la dernière inégalité ci-dessus est vérifiée.

Et donc¹² l'inégalité de départ est vraie : $\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$.

¹² Car on a raisonné par équivalences !

Seconde méthode : plus astucieuse, mais plus douce

La fonction $g : t \mapsto \frac{t}{1+t}$ est dérivable sur \mathbf{R}_+ , de dérivée égale à $g' : t \mapsto \frac{1}{(1+t)^2}$, et donc est croissante.

Mais puisque $|a+b| \leq |a|+|b|$, on a donc

$$g(|a+b|) \leq g(|a|+|b|) \Leftrightarrow \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}.$$

On en déduit donc que

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.17

Si n est pair, alors $\frac{n}{2}$ est un entier, donc nécessairement égal à sa propre partie entière.

En revanche, si n est impair, alors $n-1$ est pair, et donc $\frac{n-1}{2}$ est un entier.

On a alors $\frac{n-1}{2} \leq \frac{n}{2} < \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} + 1$.

Et donc nécessairement, par définition de la partie entière de $\frac{n}{2}$, on a $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.18

Soit $n \in \mathbf{N}$. Il s'agit donc de prouver que $4n+1 \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+2$. Or

$$\begin{aligned} 4n+1 \leq (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 < 4n+2 &\Leftrightarrow 4n+1 \leq n+2\sqrt{n(n+1)}+n+1 < 4n+2 \\ &\Leftrightarrow 2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \end{aligned}$$

Puisque $n \leq n+1$, alors $n^2 \leq n(n+1)$ et donc $n \leq \sqrt{n(n+1)}$, de sorte qu'on a bien $2n \leq 2\sqrt{n(n+1)}$.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 &\Leftrightarrow 4n(n+1) < (2n+1)^2 \\ &\Leftrightarrow 4n^2+4n < 4n^2+4n+1. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant trivialement vérifiée, on a donc bien $2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$, et donc

$$\left\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \right\rfloor = 4n+1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.19

Commençons par noter que le discriminant de $x^2 - x + 2$ est $-7 < 0$, de sorte que $x^2 - x + 2$ est de signe constant, positif.

Ceci nous garantit que l'équation a bien un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x^2 - x + 2} \right| = 2 &\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{x^2 - x + 2} < 3 \\ &\Leftrightarrow 4 \leq x^2 - x + 2 < 9 \end{aligned}$$

On alors $4 \leq x^2 - x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0$.

Un calcul de discriminant nous informe alors que cette inéquation est vérifiée si et seulement si $x \leq -1$ ou $x \geq 2$.

De même, on a $x^2 - x + 2 < 9 \Leftrightarrow x^2 - x - 7 < 0$, ce qui est le cas si et seulement si

$$\frac{1 - \sqrt{29}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{29}}{2}.$$

Puisque $\sqrt{29} > 3$, $\frac{1 - \sqrt{29}}{2} < -1$, et de même $\frac{1 + \sqrt{29}}{2} > 2$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation est $\left] \frac{1 - \sqrt{29}}{2}, -1 \right] \cup \left[2, \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \right[$.

Pour l'inéquation proposée, notons qu'on a

$$\begin{aligned} \left| \lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor + 1 \right| \leq 2 &\Leftrightarrow -2 \leq \lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor + 1 \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq \lfloor x^2 - 4x - 3 \rfloor \leq 1 \\ &\Leftrightarrow -3 \leq x^2 - 4x - 3 < 2. \end{aligned}$$

Or on a $x^2 - 4x - 3 < 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 < 0$.

Le polynôme $x^2 - 4x - 5$ possède un discriminant égal à $\Delta_1 = 16 + 20 = 36$. Ses racines

sont donc $x_1 = \frac{4 + \sqrt{36}}{2} = 5$ et $x_2 = \frac{4 - \sqrt{36}}{2} = -1$.

Et donc $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow x \in] -1, 5[$.

De même, on a $x^2 - 4x - 3 \geq -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x \geq 0 \Leftrightarrow x \in] -\infty, 0] \cup [4, +\infty[$.

Ainsi, les deux conditions $-3 \leq x^2 - 4x - 3 < 2$ sont vérifiées simultanément si et seulement si $x \in] -1, 0] \cup [4, 5[$. Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $] -1, 0] \cup [4, 5[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.20

- Soit n un entier tel que $n \leq x$. Alors $n \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Puisque n et $\lfloor x \rfloor$ sont des entiers, alors¹³ $n \leq \lfloor x \rfloor$.
- Soient a, b deux réels tels que $a \leq b$, alors on a $\lfloor a \rfloor \leq a \leq b$, et donc par la question précédente, $\lfloor a \rfloor \leq \lfloor b \rfloor$. Et donc la fonction partie entière est croissante.

En revanche, l'implication¹⁴ $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor \Rightarrow x \leq y$ est fautive : par exemple, on a $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor 0 \right\rfloor$,

mais on n'a pas $\frac{1}{2} \leq 0$.

Autrement dit, la fonction partie entière n'est pas strictement croissante.

Notons que si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, alors on a

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor \Rightarrow x < y.$$

- La réponse est non, puisque $\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 + 0 \neq 1 = \left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

En revanche, on a toujours¹⁵

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

En particulier, puisque $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$, avec $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \in \mathbf{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.

Signe

Un polynôme de degré 2 qui ne possède pas de racine (réelle) ne peut changer de signe, et donc est de signe constant.

C'est le signe du coefficient en x^2 qui détermine ce signe.

Danger !

Si pour $n \in \mathbf{Z}$, on a clairement

$$\lfloor x \rfloor \geq n \Leftrightarrow x \geq n,$$

il faut se méfier davantage des inégalités dans l'autre sens :

$$\lfloor x \rfloor \leq n \Leftrightarrow x < n + 1.$$

¹³ Si a et b sont deux entiers, alors $a < b \Leftrightarrow a \leq b - 1$, puisqu'il n'y a pas d'entiers strictement compris entre b et $b - 1$.

¹⁴ Qui est la réciproque de celle qui définit la croissance de la fonction partie entière.

¹⁵ En sommant les inégalités définissant $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$.

Et $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.

Puisque $\lfloor xy \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$ sont des entiers, on en déduit que $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Alternative : procédons par disjonction de cas.

► Si $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Alors $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, et donc $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

► Si $x + y \geq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$, alors

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$$

si bien que $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Dans tous les cas, on a bien

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.21

1. **Vrai.** En effet, si $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor = n$, alors $n \leq a < n + 1$ et $n \leq b < n + 1$.

Donc $-1 - n < -b \leq -n$ et alors en sommant les inégalités,

$$-1 < a - b < 1 \Rightarrow |a - b| < 1.$$

2. **Faux.** Par exemple si $a = \frac{1}{2}$ et $b = 1$, alors $|a - b| = \frac{1}{2}$ mais $\lfloor a \rfloor = 0$ et $\lfloor b \rfloor = 1$.

3. **Faux.** On a $-2 \leq 1$ et $(-2)^2 > 1^2$.

4. **Faux.** Si $a = 2$ et $b = -1$, alors $|a| = 2$ et $|a + b| = 1$.

5. **Vrai.** Si $a \leq 0$, alors $|a| = -a$, de sorte que $a + |a| = 0$.

En revanche, si $a > 0$, alors $|a| = a$ de sorte que $a + |a| = 2a \neq 0$.

Et donc on a bien¹⁶ $a + |a| = 0 \Leftrightarrow a \leq 0$.

6. **Faux.** Si $a \neq 0$ et $b = -2a$, alors $|a + b| = |-a| = |a|$ alors que $b \neq 0$.

7. **Faux.** Si $x = -\frac{1}{2}$, alors $|\lfloor x \rfloor| = |-1| = 1$, alors que $\lfloor |x| \rfloor = 0$.

On notera en revanche que la formule est vraie si $x \geq 0$, mais aussi si x est un entier naturel¹⁷

8. **Faux.** Par exemple si $x = 1$, $\lfloor x \rfloor = 1$, donc $\frac{\lfloor x \rfloor}{2} = \frac{1}{2}$, qui ne peut pas être une partie entière puisque ce n'est pas un entier.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.22

1. ► Commençons par traiter le cas où $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire le cas où la partie «après la virgule¹⁸» de x est inférieure à 0,5.

Alors on a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ et donc $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$.

Par conséquent, $\lfloor x \rfloor \leq x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + 1$.

Et $\lfloor x \rfloor$ étant entier, c'est donc¹⁹ la partie entière de $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

Ainsi, $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor$.

Or, $2\lfloor x \rfloor \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 1$, de sorte que $2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

On a donc bien $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.

- Traitons à présent le cas où $x - \lfloor x \rfloor \geq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire où $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Alors $\lfloor x \rfloor + 1 \leq x + \frac{1}{2} < \lfloor x \rfloor + \frac{3}{2} < \lfloor x \rfloor + 2$.

Puisque $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier, c'est donc la partie entière de $x + \frac{1}{2}$.

Et donc $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.

D'autre part, on a $2\lfloor x \rfloor + 1 \leq 2x < 2\lfloor x \rfloor + 2$, donc $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$.

Ceci prouve qu'on a bien la relation annoncée : pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 2x \rfloor.$$

¹⁶ Car on a traité tous les cas : a est soit négatif ou nul, soit strictement positif.

¹⁷ Positif ou négatif.

¹⁸ Appelée partie fractionnaire.

¹⁹ C'est la définition de la partie entière !

Remarque

Cette relation $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$ n'est pas valable pour tout $x \in \mathbf{R}$, elle ne vaut que si la partie fractionnaire de x est inférieure strictement à 0,5. Par exemple elle est fautive pour $x = 0,5$ ou $x = 0,75$.

2. On a $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Et donc après multiplication par $n > 0$,

$$n\lfloor x \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n.$$

Par conséquent, $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx < n\lfloor x \rfloor + n$. En divisant par n , il reste

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Par définition d'une partie entière, on a donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.23

1. Puisque $-4 \in \mathbf{Z}$, $\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 4 = n - 4$.

De même, on a $2n - 1 \leq 2x - 1 < 2(n + 1) - 1 \Leftrightarrow 2n - 1 \leq 2x - 1 < 2n + 1$.

► Si $x \in \left[n, n + \frac{1}{2} \right]$, alors $2n \leq 2x < 2n + 1$ et donc $2n - 1 \leq 2x - 1 < 2n$, de sorte que $\lfloor 2x - 1 \rfloor = 2n - 1$.

► En revanche, si $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n + 1 \right]$, alors

$$2n + 1 \leq 2x < 2n + 2 \Leftrightarrow 2n \leq 2x - 1 < 2n + 1 \Rightarrow \lfloor 2x - 1 \rfloor = 2n.$$

2. ► Si $x \in \left[n, n + \frac{1}{2} \right]$, alors d'après ce qui précède, on a

$$\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor \Leftrightarrow n - 4 = 2n - 1 \Leftrightarrow n = -3.$$

Donc les réels x tels que $x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}$ et qui sont solutions de l'équation sont ceux tels que

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor = -3 \\ x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < -2 \\ x < -3 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x < -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-3, -\frac{5}{2} \right].$$

► Si $x \in \left[n + \frac{1}{2}, n + 1 \right]$, alors

$$\lfloor x - 4 \rfloor = \lfloor 2x - 1 \rfloor \Leftrightarrow n - 4 = 2n \Leftrightarrow n = -4.$$

Comme précédemment, ceci prouve que les réels x tels que $x - \lfloor x \rfloor \geq \frac{1}{2}$ et qui sont solutions de l'équation sont ceux tels que

$$\begin{cases} -4 \leq x < -3 \\ x \geq -4 + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq x < -3 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{2}, -3 \right].$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$ est

$$\left[-\frac{7}{2}, -3 \right] \cup \left[-3, -\frac{5}{2} \right] = \left[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2} \right].$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.24

1. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: «il existe deux entiers naturels a_n et b_n vérifiant $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$ ».

Pour $n = 1$, il suffit de prendre $a_n = 2$ et $b_n = 1$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, et soient a_n et b_n deux entiers naturels tels que $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ et $3b_n^2 = a_n^2 - 1$. Alors

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^{n+1} &= (2 + \sqrt{3})^n (2 + \sqrt{3}) = (a_n + b_n\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) \\ &= 2a_n + 3b_n + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Donc si on pose $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$, nous avons là évidemment deux entiers naturels, tels que $(2 + \sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$.

Et de plus, on a alors

$$3b_{n+1}^2 = 3(a_n + 2b_n)^2 = 3a_n^2 + 12a_nb_n + 12b_n^2 = 3a_n^2 + 12a_nb_n + 4(a_n^2 - 1) = 7a_n^2 + 12a_nb_n - 4$$

Détails

La première inégalité vient du fait que $\lfloor nx \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à nx . Or $n\lfloor x \rfloor$ est un tel entier, donc est inférieur à $\lfloor nx \rfloor$.

Remarque

Notons que la condition revient à demander

$$0 \leq x - \lfloor x \rfloor < \frac{1}{2}.$$

Il s'agit donc des deux mêmes cas qu'à la question 1 de l'exercice précédent.

et

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 1 &= (2a_n + 3b_n)^2 - 1 = 4a_n^2 + 12a_nb_n + 9b_n^2 - 1 \\ &= 4a_n^2 + 12a_nb_n + 3(a_n^2 - 1) - 1 = 7a_n^2 + 12a_nb_n - 4 \end{aligned}$$

et donc $3b_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 - 1$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2. Puisque $3b_n^2 = a_n^2 - 1$, on a donc $\sqrt{3}b_n = \sqrt{a_n^2 - 1}$.

En particulier, $\sqrt{3}b_n < a_n$.

Par ailleurs, $(a_n - 1)^2 = a_n^2 + 1 - 2a_n \leq a_n^2 - 1$

Et donc $3b_n^2 \geq (a_n - 1)^2$ et donc $\sqrt{3}b_n \geq a_n - 1$.

Nous venons donc de prouver que $a_n - 1 \leq \sqrt{3}b_n < a_n$, et donc que $\lfloor \sqrt{3}b_n \rfloor = a_n - 1$. Et

donc $\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \rfloor = \lfloor a_n + \sqrt{3}b_n \rfloor = a_n + \lfloor \sqrt{3}b_n \rfloor = a_n + a_n - 1 = 2a_n - 1$, qui est donc un entier impair.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2.25

Si $u_n = k$ cela signifie que u_1, u_2, \dots, u_{n-1} ont pris au moins toutes les valeurs $1, 2, \dots, k-1$, les derniers termes avant u_n pouvant éventuellement être égaux à k .

Or, pour prendre toutes les valeurs $1, 2, \dots, k-1$, il a fallu au moins $1 + 2 + \dots + (k-1)$ termes, de sorte que $n \geq 1 + 2 + \dots + k - 1$.

Souvenons-nous alors d'une formule rencontrée en première : pour k entier naturel,

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

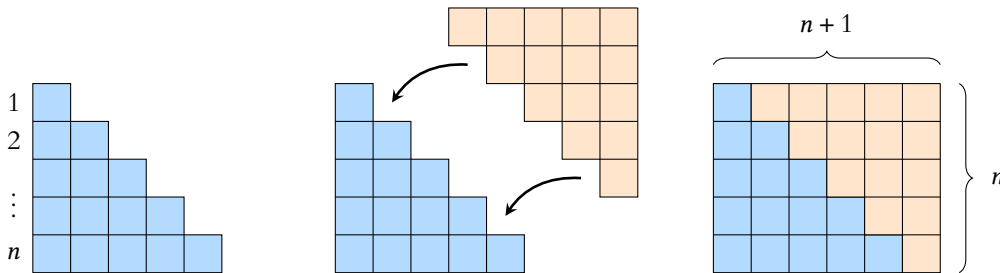
La preuve que vous en avez sûrement donnée au lycée est assez simple : si on note S cette somme, alors on a à la fois $S = 1 + 2 + \dots + n - 1 + n$ et $S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$.

En sommant ces deux relations, il vient

$$2S = \underbrace{1+n}_{=n+1} + \underbrace{2+(n-1)}_{=n+1} + \dots + \underbrace{n-1+2}_{=n+1} + \underbrace{n+1}_{=n+1} = n(n+1).$$

Et donc $S = \frac{n(n+1)}{2}$.

Encore plus simple est la preuve²⁰ géométrique suivante :



Cette formule nous donne donc en particulier $1 + 2 + \dots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$.

Ceci signifie que le premier terme de la suite qui porte le numéro k est le terme d'indice $\frac{(k-1)k}{2} + 1$ et que le dernier portant le numéro k est le terme d'indice

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ainsi, on a $u_n = k \Leftrightarrow \frac{(k-1)k}{2} + 1 \leq n < \frac{k(k+1)}{2} + 1$.

Or, $\frac{k(k+1)}{2} + 1 > n \Leftrightarrow k(k+1) + 2 > 2n \Leftrightarrow k^2 + k + 2 - 2n > 0$.

À n fixé, il s'agit ici d'une expression polynomiale en k , dont le discriminant est $8n - 7$, et

dont les racines sont $k_1 = \frac{-1 - \sqrt{8n-7}}{2}$ et $k_2 = \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2}$.

Et donc $k^2 + k + 2 - 2n > 0$ si et seulement si $k > \frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2}$.

Détails

La seconde inégalité vient du fait que $a_n \geq 1$, ce qui se prouve aisément par récurrence en notant que $a_1 = 2$ et que pour tout p , $a_{p+1} = 2a_p + 3b_p$.

²⁰ Un dessin n'est pas une preuve ! Mais ce dessin suffit à lui tout seul à expliquer pourquoi on a envie de faire les calculs ci-dessus, ce dont je vous laisse vous convaincre.

Remarque

Nous avons délibérément ignoré k_1 car il est négatif, et nous ne nous intéressons ici qu'aux k positifs.

De même, on a $\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leq n \Leftrightarrow k^2 - k + 2 - 2n \leq 0$ si et seulement si $k \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}$.

Or, $\frac{-1 + \sqrt{8n-7}}{2} = \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} - 1$.

Et donc $u_n = k$ si et seulement si $k \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}$ et $k + 1 > \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2}$.

Puisque k est entier, nous reconnaissons là la définition d'une partie entière :

$$u_n = \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor.$$