TD 19 : Comparaison des suites et des fonctions

▶ Comparaison des suites

Exercice 19.1 Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} k!$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$ PD

Exercice 19.2 Soit (u_n) une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. AD

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. En déduire un équivalent simple de (u_n).

Exercice 19.3 Classer les suites suivantes de sorte que chacune soit négligeable devant la suivante : PD

- $\frac{1}{n}$
- $\frac{\ln n}{n}$
- $n\ln(n)$
- $\frac{2}{\sqrt{n}}$
- n^2+1
- n^3+n
- $e^n\sqrt{n}$
- $e^{-n}n^2$
- $\frac{n!}{n^4}$
- $\frac{1}{n\ln n}$

Exercice 19.4 Simplifier autant que possible les expressions suivantes : PD

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{n}} - o\left(e^{-n}\right) - \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
2. $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.
3. $w_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + n^2 + o(n\sqrt{n}) + n\ln(n)\sqrt{n} + o\left(n^2\ln(\ln n)\right)$.

Exercice 19.5 Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n}^n + n^{\sqrt{n}} + n^{n/2}$. PD

Exercice 19.6 Déterminer les limites des suites suivantes : PD

1. $u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$
2. $u_n = \frac{2^n \sin n}{n^4 + \frac{e^n}{n}}$
3. $u_n = \sqrt[n]{n}$
4. $u_n = \frac{n! + \sqrt{n}}{3^n + 4^n}$
5. $u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n}-1}{n+1}\right)\right)^{n^2-n}$
6. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right)}$
7. $u_n = \frac{\mathrm{ch}(\mathrm{sh}(n))}{\mathrm{sh}(\mathrm{ch}(2n))}$

Exercice 19.7 Déterminer les limites des suites suivantes : AD

1. $u_n = \frac{n\sin n}{1+n^2}$
2. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$
3. $u_n = n^2\left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1}\right)$
4. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
5. $u_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2+2} + \ln(n)}$

Exercice 19.8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers $+\infty$ et telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. PD
Montrer qu'il existe une suite (w_n) telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Exercice 19.9 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2}$.

Exercice 19.10 Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites à termes strictement positifs, et telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, avec $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$. Que dire de (v_n) ? F

Exercice 19.11 Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses : PD

1. Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) est bornée.
2. Si (u_n) converge et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge.
3. Si (u_n) converge vers 0 et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge vers 0.

4. Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$, alors (v_n) converge.
5. Si $u_n = (2n-1)^3$, alors :

   ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^4)$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$ ☐ $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{n^4}{2}\right)$.
6. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors :

   ☐ $\ln(u_n) = o(n)$ ☐ $\ln(u_n) = o(u_n)$ ☐ $\ln(n) = o(u_n)$
7. Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
8. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors :

   ☐ $u_n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + 1$ ☐ $2u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2v_n$ ☐ $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ ☐ $-u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -v_n$
   ☐ $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^2$ ☐ $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$ ☐ $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$
9. Soit (u_n) une suite strictement positive. Laquelle des situations suivantes est équivalente au fait que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$?

   ☐ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ ☐ $u_n - 2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (a) $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(2)$ (b) $\frac{u_n}{2^n} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$.

Exercice 19.12 Déterminer des équivalents des suites suivantes : **AD**

1. $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$
2. $e^{\tan\frac{\pi}{n^2}} - 1$
3. $e^{\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{n}} - e^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{1}{\sqrt{n}}$
4. $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n^3+1}}$
5. $\binom{n}{k}$, où $k \in \mathbf{N}$ est fixé.
6. $(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}$
7. $\exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1$
8. $\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n}$
9. $\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$.

Exercice 19.13 Développement asymptotique d'une suite définie implicitement **AD**
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.
1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive que l'on notera u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.
3. Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Exercice 19.14 Donner un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ mais qu'on n'aie ni $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, ni $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$. **PD**

Exercice 19.15 Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1 \in \mathbf{R}[X]$. **AD**
1. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$ assez grand, P_n possède trois racines a_n, b_n et c_n vérifiant
$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$
2. Prouver alors successivement :
$$c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n,\ b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2,\ a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Exercice 19.16 (Oral Polytechnique) **TD**
Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
Déterminer un équivalent de (u_n).
On pourra commencer par prouver que si une suite $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{R}$, alors $\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (théorème de Cesàro)

▸ Comparaison des fonctions

Exercice 19.17 Du calcul, rien que du calcul **AD**
Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan x}$
2. $\lim_{x\to+\infty} \left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x^2}$
3. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+x+1}$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x)-\cos(5x)}{x^2}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1}{\cos x - e^x}$
7. $\lim_{x\to 0} \ln(e+x)^{\frac{1}{x}}$
8. $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x.$

Exercice 19.18 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes : AD

1. $\dfrac{\cos x}{1+x}-1$ en 0
2. $(x+1)^x - x^x$ en $+\infty$.
3. $x^2\ln(1+x)+x\cos x$ en $+\infty$
4. $\dfrac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\,\mathrm{Arctan}(x^3)}$ en 0
5. $\ln\dfrac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}$ en 0
6. $\dfrac{\ln x}{1-x^2}$ en 1
7. $\dfrac{xe^x-x^2}{\mathrm{ch}(x)}$ en $+\infty$
8. $\dfrac{\tan(osx)}{\sin x+\cos x-1}$ en 0
9. $(\ln(1+x))^2-(\ln(1-x))^2$ en 0

Exercice 19.19 Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}\mathrm{Arctan}(x)$. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on déterminera au voisinage de $+\infty$. AD

Exercice 19.20 Soit $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}\right)$. PD

1. Prouver que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln x}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de $\left(e^{f(x)}-1\right)\ln(x)$.
3. Soit $g(x) = \left[\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x - 1\right]\ln(x)$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Correction des exercices du TD 19

Solution de l'exercice 19.1

Puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! = \sum_{k=1}^{n-1} k! + n!$, il s'agit de prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k! \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$.

Soit encore que $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

S'il est clair que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\dfrac{k!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il n'est pas question de sommer ces limites, **qui ne sont pas en nombre fixé.**

Essayons plutôt d'encadrer la somme : on a, pour $n \geqslant 3$

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \leqslant \frac{1}{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \leqslant \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{n-2}{n(n-1)}}_{\sim\frac{1}{n}\to 0}$$

et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!} = 0$.

Et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$

> **Rappel**
> On a $u_n \sim v_n$ si et seulement si
> $$u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n).$$

Solution de l'exercice 19.2

1. Puisque (u_n) est décroissante, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ ou diverge vers $-\infty$.
   Mais si elle converge vers $\ell \neq 0$, alors $u_{n+1} + u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2\ell$, alors que $u_{n+1} + u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   De même, si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, alors $u_{n+1} + u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui n'est pas possible.
   Donc nécessairement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Par décroissance de (u_n), on a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n + u_{n+1} \leqslant 2u_n \leqslant u_n + u_{n-1}$.
   Mais $u_n + u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
   Donc $n(u_n + u_{n-1}) \leqslant 2nu_n \leqslant n(u_n + u_{n+1})$, et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2nu_n = 1$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

Solution de l'exercice 19.3

Notons $u_n \prec v_n$ pour signifier que $u_n = o(v_n)$.

Remarquons que $n^3 + n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$, et que $n^2 + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, et que puisque les relations de négligeabilité sont préservées par équivalents, on peut remplacer n^3+n par n^3 et n^2+1 par n^2.

> **⚠ Attention !**
> La notation n'est pas complètement judicieuse : la négligeabilité n'est pas une relation d'ordre sur l'ensemble des suites : elle n'est ni réflexive ni antisymétrique.

Nous allons prouver que

$$\underbrace{e^{-n}n^2 \prec \frac{1}{n\ln n} \prec \frac{1}{n} \prec \frac{\ln n}{n} \prec \frac{2}{\sqrt{n}}}_{\text{tendent toutes vers } 0.} \prec \underbrace{n\ln n \prec n^2 \prec n^3 \prec e^n\sqrt{n} \prec \frac{n!}{n^4}}_{\text{tendent toutes vers } +\infty}$$

Les seules qui ne découlent pas directement du cours ou d'un calcul de quotient sont la première et la dernière.

On a $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$, de sorte que $e^{-n}n^2 = \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$.

Pour la dernière, il s'agit de prouver que

$$\frac{e^n\sqrt{n}n^4}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ soit encore } e^n\sqrt{n}n^4 \underset{n\to+\infty}{=} o(n!).$$

Notons que $\sqrt{n}n^4 = n^{9/2} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$.
Et donc $e^n\sqrt{n}n^4 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{2n}\right)$.
Or $e^{2n} = \left(e^2\right)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$, si bien que par transitivité, $e^n\sqrt{n}n^4 \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$, et donc $e^n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{n!}{n^4}\right)$.
D'où le résultat annoncé.

Solution de l'exercice 19.4

L'idée général est de «nettoyer» les termes inutiles : à partir du moment où une expression contient un $o(n)$, tous les termes négligeable devant n peuvent «rentrer» dans le $o(n)$.

1. Puisque tous les termes tendent vers 0, celui qui est prépondérant devant les autres est celui qui tend «le moins vite» vers 0.
   En l'occurrence ici c'est $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Viennent ensuite $\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$, puis $\dfrac{1}{n}$, puis $\dfrac{-2}{n\sqrt{n}}$.
   Et enfin, $e^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Nous pourrions aussi dire directement que
   $$u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$
   Toutefois c'est moins précis, par exemple car cela ne nous fournit pas la limite de $u_n + \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ ou de $\sqrt{n}\left(u_n + \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$.
2. Tous les termes, à l'exception de $\dfrac{\ln n}{n}$ lui-même sont négligeables devant $\dfrac{\ln n}{n}$, donc $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.
3. Tous les termes sont des $o\left(n^2\ln(\ln n)\right)$, donc $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^2\ \ln(\ln n)\right)$.

Solution de l'exercice 19.5

On a $u_n = e^{n\ln(\sqrt{n})} + e^{\sqrt{n}\ln(n)} + e^{\frac{n}{2}\ln(n)} = 2e^{\frac{n}{2}\ln n} + e^{\sqrt{n}\ln(n)}$.
Mais
$$\frac{e^{\sqrt{n}\ln(n)}}{e^{\frac{n}{2}\ln(n)}} = \exp\left(\left(\sqrt{n} - \frac{n}{2}\right)\ln(n)\right)$$
et $\sqrt{n} - \dfrac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{n}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si bien que
$$\left(\sqrt{n} - \frac{n}{2}\right)\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$
Et donc on en déduit par composition de limites que
$$\frac{e^{\sqrt{n}\ln(n)}}{e^{\frac{n}{2}\ln(n)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et donc } e^{\sqrt{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{\frac{n}{2}\ln(n)}\right).$$
Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2e^{\frac{n}{2}\ln(n)} + o\left(e^{\frac{n}{2}\ln(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{\frac{n}{2}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}^n$.

Méthode
Pour trouver un équivalent d'une somme, il faut déterminer quel terme est prépondérant devant les autres (sous réserve qu'il y en ait bien un).

Solution de l'exercice 19.6

1. Puisque $(-1)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$, il vient $2^n + (-1)^n = 2^n + \underset{n\to+\infty}{o}(2^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.
   De même, on a $3n + (-1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2^n}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. On a $|u_n| \leqslant \dfrac{2^n}{n^4 + \frac{e^n}{n}}$.
   Or, $n^5 \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$ et donc $n^4 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^n}{n}\right)$.

On en déduit que $n^4 + \frac{e^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{n}$.

Et alors $\dfrac{2^n}{n^4 + \frac{e^n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n2^n}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\left(\dfrac{2}{e}\right)^n$.

Puisque $0 < \frac{2}{e} < 1$, les croissances comparées usuelles nous informent que $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{e}{2}\right)^n\right)$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{2}{e}\right)^n = 0$.

Par majoration, on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Alternative : pour ne pas s'embêter à trouver un équivalent du dénominateur, on peut tout simplement noter que $\dfrac{2^n}{n^4 + \frac{e^n}{n}} \leqslant \dfrac{2^n}{\frac{e^n}{n}}$...

> **⚠ Attention !**
> On a envie de dire (et on a raison) que e^n l'emporte sur n.
> C'est vrai, au sens où $n = o(e^n)$.
> En revanche, on n'en déduira pas que $\frac{e^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^n$. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que le quotient $\frac{\frac{e^n}{n}}{e^n}$ vaut $\frac{1}{n}$, et ne tend donc pas vers 1.
> **Au moindre doute, revenez au quotient !**

3. On a $u_n = e^{\frac{1}{n}\ln(n)}$. Or, par croissance comparées, $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n)} = e^0 = 1$.
4. Puisque par croissances comparées, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$, $n! + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.
De même, $3 < 4$ et donc $3^n \underset{n\to+\infty}{=} o(4^n)$, et donc $3^n + 4^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 4^n$.
On en déduit que $\dfrac{n! + \sqrt{n}}{3^n + 4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{4^n}$, qui, par croissances comparées, tend vers$+\infty$.
5. Il s'agit de revenir à la forme exponentielle, pour se débarrasser de la forme indéterminée 1^∞.
On a donc $u_n = \exp\left((n^2 - n)\ln\left(1 + \sin\left(\dfrac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right)\right)$.
Déjà, $\sqrt{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et $n + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, de sorte que $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Donc $\dfrac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\sin\dfrac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit donc que
$$\ln\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Après multiplication par $n^2 - n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, on en déduit que
$$(n^2 - n)\ln\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
Et donc par composition de limites[1], $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
6. Puisque $\frac{2}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $\ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$.
Et donc[2], $\sqrt{\ln\left(1 + \dfrac{2}{n^2+1}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$.
Et donc enfin, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}$ de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.
7. Au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$ et donc $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.
De même, $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.
Et donc $\operatorname{ch}(\operatorname{sh}(n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\operatorname{sh}(n)}}{2}$ et $\operatorname{sh}(\operatorname{ch}(2n)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\operatorname{ch}(2n)}}{2}$.
On en déduit que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\operatorname{sh}(n)}}{e^{\operatorname{ch}(2n)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\operatorname{sh}(n) - \operatorname{ch}(2n)}.$$
Mais $\operatorname{ch}(2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{2n}}{2}$ et $\operatorname{sh}(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$, de sorte que $\operatorname{sh}(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\operatorname{ch}(2n))$ et donc $\operatorname{sh}(n) - \operatorname{ch}(2n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\operatorname{ch}(2n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Et donc par composition de limite[3], on en déduit que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

> **Méthode**
> Pour étudier une suite de la forme $u_n^{v_n}$ où ni (u_n) ni (v_n) ne sont constantes), on repassera toujours par la forme exponentielle.

[1] Et surtout pas par composition d'équivalents à gauche : $u_n \sim v_n$ n'implique pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

[2] On peut passer à la racine dans des équivalents.

[3] $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Solution de l'exercice 19.7

1. Puisque $|\sin n| \leqslant 1$, il vient $0 \leqslant |u_n| \leqslant \frac{n}{1+n^2}$.
Mais $\frac{n}{1+n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, le théorème des gendarmes, on a donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Passons à la forme exponentielle :

$$u_n = e^{(n+2)\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} = e^{(n+2)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right)}.$$

Or, $(n+2)\ln\left(1-\frac{2}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2(n+2)}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -2$. Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-2}$.
Alternative : si on ne voit pas que $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$, il est possible de remarquer que $\frac{n-1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Et donc

$$\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\left(\frac{n-1}{n+1}-1\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n-1}{n+1} - 1 = -\frac{2}{n+1}.$$

> **Astuce**
> Voici une astuce qui sert très souvent : on connaît un équivalent de $\ln(1+x)$ quand x tend vers 0.
> Donc pour $\ln(x)$, avec $x \to 1$, il suffit d'écrire
> $$\ln(x) = \ln(1+(x-1)),$$
> et alors $x-1 \to 0$, donc l'équivalent précité fonctionne.

3. Puisque $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Et de même,

$$\cos\frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent,

$$\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Mais $\dfrac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{2n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Et donc après multiplication par n^2,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} n^2 o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

> **Détails**
> Puisque $\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$, on a
> $$o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
> et donc nous pouvons regrouper les deux o en un seul : $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

4. En revenant à la forme exponentielle, on a $u_n = \exp\left(n^2\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$.

Or, puisque $\cos\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on a donc

$$\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\cos\frac{1}{n} - 1}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \cos\frac{1}{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

> **Détails**
> On a utilisé ici le fait que lorsque $u \to 1$,
> $\ln(u) = \ln(1+(u-1)) \sim u-1$.

Et donc $n^2\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2}$.

Par continuité de l'exponentielle, on a donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

> **Rédaction**
> Le fait que si $u_n \to \ell$, alors $f(u_n) \to f(\ell)$ n'est vrai que si f est continue en ℓ. Il ne faut alors pas oublier de le mentionner.

5. On a $3n^2 + (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n^2$.
D'autre part, $\sqrt{n^2+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et donc $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{n^2+2}\right)$.
On en déduit donc que $\sqrt{n^2+2} + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^2+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
Par conséquent, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3n^2}{n}$, donc $u_n \to +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.8

Puisque les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, elles sont strictement positives à partir d'un certain rang.

Et donc $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Posons alors $w_n = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} v_n = \sqrt{u_n v_n}$, de sorte que $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

Et alors $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n v_n}} = \sqrt{\dfrac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.9

Voici un cas où la formule de Stirling semble toute indiquée !

On a $(2n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} (2n+1)^{2n+1} e^{-2n-1} \sqrt{2\pi(2n+1)}$.

Et de même, $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{2n} e^{-2n} (2\pi n)$.

Donc il vient

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n+1)^{2n+1}e^{-2n-1}\sqrt{2\pi(2n+1)}}{\sqrt{n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}(2\pi n)} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2n+1)^{3/2}}{n\sqrt{n}} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{3/2}n^{3/2}}{n\sqrt{n}} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}. \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}
\end{aligned}$$

Mais une fois de plus[4], on a

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \exp\left(2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right).$$

[4] Archi-classique !

Or, $\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, donc $2n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, de sorte que par continuité de l'exponentielle, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$.

Et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

Alternative : plus simplement, on pouvait noter que $(2n+1)! = (2n+1)(2n)!$, et que le $(2n)!$ sera plus facile à simplifier, après utilisation de la formule de Stirling, avec le $(n!)^2$ que le $(2n+1)!$ d'origine. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{(2n+1)(2n)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{\sqrt{n}2^{2n}} \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n})^2} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n\sqrt{\pi n}}{\sqrt{n}2\pi n} \frac{e^{-2n}(2n)^{2n}}{e^{-2n}(2n)^{2n}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.10

Puisque tout est positif, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 \leqslant \dfrac{v_n}{u_n} \leqslant \dfrac{w_n}{u_n}$.

Par le théorèmes des gendarmes, on a donc $\dfrac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.11

1. ✓ Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| = |v_n| \left|\frac{u_n}{v_n}\right|$, avec $(|v_n|)$ et $\left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right)_n$ bornées. Donc (u_n) est bornée.

2. ✗ Si (u_n) est la suite constante égale à 1, qui converge, et si $v_n = (-1)^n$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, mais pourtant (v_n) diverge.

$O(1)$

Rappelons que la notation $O(1)$ désigne toute suite bornée.

3. ✓ Si $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$, alors il existe $M \in \mathbf{R}$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$0 \leqslant |v_n| \leqslant M|u_n|.$$

Mais alors par le théorème d'encadrement[5], $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Même contre-exemple qu'à la question 2.

5. Si $u_n = (2n+1)^3$, alors :

✗ $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^3)}$: en effet, $\dfrac{(2n-1)^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{8n^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8 \neq 0$.

✓ $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^3}$: voir ci-dessus.

✓ $\underline{u_n = o(n^4)}$: on a $u_n \sim 8n^3$ et $n^3 \underset{n\to+\infty}{=} o(n^4)$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^4)$.

✗ $\underline{u_n \sim n^3}$: les constantes multiplicatives ont leur importance dans les équivalents. En effet, on a $\dfrac{u_n}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{8n^3}{n^3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 8 \neq 1$.

✓ $\underline{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{n^4}{2}\right)}$: les constantes ne servent à rien dans les o : être négligeable devant n^4 est pareil qu'être négligeable devant $\dfrac{n^4}{2}$.

Détails Pour s'en convaincre, on peut revenir au quotient : on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^4/2} = 0$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^4} = 0.$$

6. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors :

✗ $\underline{\ln(u_n) = o(n)}$: par exemple, si $u_n = e^n$, alors $\ln(u_n) = n$, qui n'est évidemment pas négligeable devant n.

✓ $\underline{\ln(u_n) = o(u_n)}$: revenons à la définition d'un o : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$ par composition de limites[6].

✗ $\underline{\ln(n) = o(u_n)}$: prendre par exemple $u_n = \ln(n)$.

7. ✗ Par exemple, prenons $u_n = e^n$. Alors $u_{n+1} = e^{n+1} = e \times u_n$, de sorte que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e \neq 1$, et donc $u_n \nsim u_{n+1}$.

Notons toutefois que pour une suite convergeant vers une limite $\ell \neq 0$, le résultat est vrai car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

En revanche Si $\ell = 0$, le résultat est faux, comme le prouve $u_n = e^{-n}$.

8. Si $u_n \sim v_n$, alors :

✗ $\underline{u_n + 1 \sim v_n + 1}$: en effet, si $u_n = -1 + \dfrac{1}{n}$, et $v_n = -1$, alors $u_n \sim v_n$, mais pourtant $v_n + 1 = 0$ alors que $u_n + 1 \neq 0$, et donc $u_n \nsim v_n$.

✓ $\underline{2u_n \sim 2v_n}$: on a bien le droit de multiplier les équivalents. Et en particulier de les multiplier par une constante.

✗ $\underline{u_n - v_n \sim 0}$: prenons $u_n = \dfrac{1}{n} + 1$ et $v_n = 1$. Alors $u_n \sim v_n$, et $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ n'est pas équivalent à 0.

Équivalent à 0 Rappelons que seule la suite nulle est équivalent à 0.

✓ $\underline{-u_n \sim -v_n}$: comme précédemment, on peut multiplier les équivalents.

✓ $\underline{u_n v_n \sim u_n^2}$: on peut multiplier les équivalents.
Or, $u_n \sim v_n$ et $u_n \sim u_n$, donc par produit d'équivalents, $u_n v_n \sim u_n u_n = u_n^2$.

✗ $\underline{e^{u_n} \sim e^{v_n}}$: nous avons déjà dit que ce n'est vrai que si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

9. ✗ $\underline{\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2}$

Par exemple si $u_n = n2^n$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2\dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, et pourtant $\dfrac{u_n}{2^n} = n$, de sorte que $u_n \nsim 2^n$.

[5] Et par indifférence des premiers termes.

[6] Puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

✗ $u_n - 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la condition donnée est suffisante, puisque si $u_n - 2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\frac{u_n}{2^n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\frac{u_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Toutefois, elle n'est pas nécessaire. Par exemple, si on pose $u_n = 2^n + n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} 2^n + o(2^n)$, de sorte que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.
Mais pourtant, $u_n - 2^n = n \not\to 0$.

✗ $\ln u_n \sim n\ln(2)$: puisqu'on ne peut pas composer les équivalents, il n'est pas possible de passer à l'exponentielle pour en déduire que $u_n = e^u \sim e^{n\ln 2} = 2^n$.
Par exemple, si $u_n = 3\times 2^n$, alors $\ln u_n = \ln(3) + n\ln(2) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(2)$, mais pourtant $u_n \not\sim 2^n$.

✓ $\frac{u_n}{2^n} - 1 \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$
Ceci est équivalent à $\frac{u_n}{2^n} = 1 + o(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$.
Et donc, après multiplication par 2^n, à $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n$.

Solution de l'exercice 19.12

1. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} &= \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

2. Puisque $\tan\frac{\pi}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$e^{\tan\frac{\pi}{n^2}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \tan\frac{\pi}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}.$$

3. Rappelons que $\operatorname{Arccos}\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{n}$, et donc

$$\begin{aligned}e^{\operatorname{Arccos}\frac{1}{n}} - e^{\frac{\pi}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{n}} &= e^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{n}} - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \operatorname{Arcsin}\frac{1}{n} + o\left(\operatorname{Arcsin}\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}^2}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-e^{\frac{\pi}{2}}}{2n}.\end{aligned}$$

> **Détails**
> Puisque $\operatorname{Arcsin}\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, alors
> $$o\left(\operatorname{Arcsin}\frac{1}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\sqrt{n} - 1 < \lfloor\sqrt{n}\rfloor \leqslant \sqrt{n}$.
Or $\sqrt{n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, de sorte que $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
Puisque d'autre part $n^3 + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3$, $\sqrt{n^3+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n^3} = n^{3/2}$.
Et donc $\frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n^3+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

> **Plus généralement**
> Le même encadrement permet de prouver que pour toute suite (u_n) qui tend vers $+\infty$, $\lfloor u_n\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
> En revanche, rien de tel ne reste valable pour des suites qui ne tendraient pas vers $+\infty$.

5. On a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.
Le numérateur est un polynôme de degré k (fixé !) en n, dont le coefficient dominant vaut

1.

Il est donc équivalent à n^k. Et par conséquent, $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$.

Méthode

La présence de factorielles ne doit pas vous faire automatiquement penser à Stirling, qui doit plutôt être un dernier recours, si aucune simplification ne peut être effectuée.

6. On a $(n+1)^{1/n} - n^{1/n} = n^{1/n}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/n} - 1\right)$.

Mais $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left(\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

Puisque $\dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc $e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

D'autre part, il est facile, en revenant aux exponentielles[7], de prouver que $n^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc que $(n+1)^{1/n} - n^{1/n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

[7] Voir la question 3 de l'exercice 6.

Détails

Il s'agit d'utiliser l'équivalent usuel

$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Notons que pour l'utiliser, il était indispensable de commencer par s'assurer que la quantité dans l'exponentielle tend bien vers 0.

7. Notons que $\dfrac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\sqrt{n}}{n} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc il vient

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-\sqrt{n}}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

8. On a $u_n = n\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)$.

Or, nous savons que $(1+u)^\alpha \underset{u\to 0}{=} 1 + \alpha u + o(u)$. Donc

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
$$\underset{n\to+\infty}{=} \frac{5}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{5}{6n^2}.$$

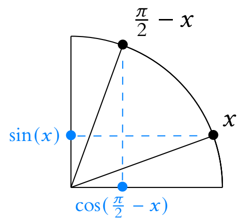
Et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{5}{6n}$.

Trigo

Comme (presque) toutes les formules de trigonométrie, la formule

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

peut se retrouver sur un dessin



9. Commençons par noter que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{n}{2^n}\right) = \sin\left(\dfrac{n}{2^n}\right)$.

Puisque $n \underset{n\to+\infty}{=} o(2^n)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\dfrac{n}{2^n}\right) = 0$.

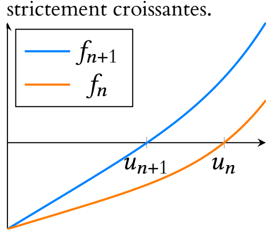
On en déduit donc que

$$u_n = \sin\left(\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}.$$

Solution de l'exercice 19.13

1. Il suffit de dresser le tableau de variations de f_n sur $\mathbf{R}_+^*$.
Elle y est strictement croissante[8], continue, et $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$.
Donc par le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbf{R}_+^*$.

[8] Inutile de dériver : c'est une somme de fonctions strictement croissantes.



f_{n+1} est au dessus de f_n, donc coupe l'axe des abscisses plus tôt

2. Notons que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x$, et donc que $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = u_n > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$.
Par stricte croissance de f_{n+1}, ceci implique que $u_{n+1} < u_n$.
Donc la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge vers une limite ℓ.
Mais alors, on a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(u_n) = 0$ donc $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ et ainsi

$$u_n = \frac{1-u_n^5}{n}.$$

Or la suite $(1-u_n^5)$ est convergente, donc bornée, et donc $\dfrac{1-u_n^5}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et ainsi, $\ell = 0$.

Alternative : si la méthode ci-dessus a l'avantage de fonctionner avec beaucoup de suites semblables à celles-ci, mentionnons tout de même une méthode plus rapide.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^5} + n\dfrac{1}{n} - 1 = \dfrac{1}{n^5} > 0$.

Et donc par stricte croissance de f_n, $u_n < \frac{1}{n}$, si bien que $0 \leqslant u_n < \frac{1}{n}$.
Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Nous avons $nu_n = 1 - u_n^5 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. C'est la définition de $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
Mais alors, $u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^5}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^6}$, et donc

$$u_n - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) \text{ si bien que } u_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Rappel
$u_n \sim v_n$ si et seulement si
$u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + o(v_n)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.14

La première idée pour avoir une suite telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ et pas $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ serait de prendre une suite équivalente à (u_n), ou même à un multiple[9] de u_n. Mais dans ce cas, on aurait $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.
L'énoncé veut donc nous faire dire qu'il existe davantage d'autres suites dominées par (v_n)...

[9] Non nul.

Cherchons une solution avec (u_n) et (v_n) non nulles.
On veut donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ bornée mais qui ne tend pas vers 0, et $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_n$ non bornée.
Il faut donc que $\frac{v_n}{u_n}$ puisse prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, mais elle ne peut pas pour autant tendre vers $+\infty$, faute de quoi son inverse tendrait vers 0.
Nous connaissons de telles suites, par exemple $w_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
Donc posons $u_n = 1$ et $v_n = u_n w_n = w_n$, de sorte que $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{w_n}$ qui est bornée par 1 (et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$) et $\frac{v_n}{u_n} = w_n$ qui est non bornée puisque $w_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte qu'on n'a pas $v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.15

1. On peut s'en tirer avec un tableau de variations et le théorème de la bijection.
Plus simplement, notons que pour $n \geqslant 4$ (condition nécessaire pour avoir $3 < \frac{2n+1}{3}$), on a $P_n(0) = -1$, $P_n(1) = n - 1 > 0$, $P_n(3) = 11 - 3n < 0$ et

$$P_n\left(\frac{2n+1}{3}\right) = \left(\frac{2n+1}{3}\right)^3 - (n+2)\left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 + (2n+1)\frac{2n+1}{3} - 1 = \frac{(2n+1)^2}{9}\left(\frac{2n+1}{3} - (n+2) + 3\right) - 1 = \frac{(2n+1)^2}{9}\frac{4-n}{3} - 1 < 0.$$

Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} P_n(x) = +\infty$.
Donc par applications du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine de P dans $]0,1[$, une dans $]1,3[$ et une dans $\left]\frac{2n+1}{3}, +\infty\right[$.
Notons que ce sont les seules[10] puisque nous avons là trois racines pour un polynôme de degré 3.

[10] Et donc qu'il n'y a pas ambiguïté sur ce qu'on note a_n, b_n, c_n.

2. Il s'agit à présent d'utiliser les relations racines coefficients. En effet, celles-ci nous disent que

$$a_n + b_n + c_n = n + 2,\ a_n b_n + a_n c_n + b_n c_n = 2n + 1,\ a_n b_n c_n = 1.$$

Puisque $c_n \geqslant \frac{2n+1}{3}$, on a tout de suite $c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Alors $a_n = \frac{1}{b_n c_n}$, avec $2c_n \leqslant b_n c_n \leqslant 3c_n$, donc $b_n c_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puisque (a_n) et (b_n) sont bornées, elles sont négligeables devant (c_n).
Et donc $a_n + b_n + c_n \underset{n\to+\infty}{=} c_n + o(c_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} c_n$.
Puisque par ailleurs, $a_n + b_n + c_n = n + 2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, on en déduit que $c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Par ailleurs, par la seconde relation racines-coefficients, $b_n = \frac{2n+1-a_n c_n}{b_n + c_n}$.
Puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $a_n c_n \underset{n\to+\infty}{=} o(c_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.
Et donc $2n + 1 - a_n c_n \underset{n\to+\infty}{=} 2n + o(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Détails
Puisque $c_n \sim n$, toute suite négligeable devant c_n est négligeable devant n (et vice-versa).

Par ailleurs, $a_n + c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} c_n$, et donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2$.
Ceci prouve donc que $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
Enfin, grâce à la dernière relation $a_nb_nc_n = 1$, on a $a_n = \dfrac{1}{b_nc_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

Rappel
Être équivalent à une constante non nul, c'est tendre vers cette constante.

Solution de l'exercice 19.16

Il est évident que (u_n) est croissante. Si elle convergeait vers un réel ℓ, on aurait $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + e^{-u_n} = \ell + e^{-\ell}$ (par continuité de l'exponentielle).
Mais ceci est impossible, donc nécessairement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Posons alors $v_n = e^{u_n}$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n+e^{-u_n}} = e^{u_n+\frac{1}{v_n}} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}.$$

Puisque (v_n) tend elle aussi vers $+\infty$, on a

$$v_{n+1} \underset{n\to+\infty}{=} v_n\left(1 + \frac{1}{v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right)\right) = v_n + 1 + o(1).$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Appliquons alors le théorème de sommation de Cesàro[11]

$$\frac{(v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \cdots + v_{n+1} - v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Soit encore $\dfrac{v_{n+1} - v_0}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, de sorte que $\dfrac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
Puisque $n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a bien le droit de composer les équivalents par le logarithme : $u_n = \ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

[11] Qu'on a vu en TD pour l'instant, mais qui figure explicitement au programme de seconde année.

(Re)-prouvons donc le théorème de Cesàro : soit (u_n) une suite de limite $\ell \in \mathbf{R}$, et soit $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$.
Soit alors $\varepsilon > 0$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Alors pour $n \geqslant n_0$,

$$|v_n - \ell| = \left|\frac{(u_1 - \ell) + (u_2 - \ell) + \cdots + (u_n - \ell)}{n}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k - \ell| \leqslant \frac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0-1} - \ell|}{n} + \frac{n - n_0 + 1}{n}\varepsilon.$$

Notons déjà que $\frac{n_0-n+1}{n} \leqslant 1$.
Et puisque n_0 est fixé, $\dfrac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0-1} - \ell|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien qu'il existe $n_1 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $\dfrac{|u_1 - \ell| + |u_2 - \ell| + \cdots + |u_{n_0-1} - \ell|}{n} < \varepsilon$.
Et donc en particulier, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, $|v_n - \ell| < 2\varepsilon$.
C'est donc que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Solution de l'exercice 19.17

1. Aucune difficulté ici : $\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$, et donc par produit et quotient d'équivalents, $\dfrac{\sin(x)\ln(1+x)}{x\tan(x)} \underset{x\to0}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1 \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$.

2. On a $\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\ln\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right)\right)$.
   Puisque $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\dfrac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\cos\dfrac{1}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   Écrivons alors $\ln\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\dfrac{1}{\ln x} - 1\right)\right)$, avec $\cos\dfrac{1}{\ln x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   On a alors $\ln\left(\cos\dfrac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \cos\dfrac{1}{\ln x} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\ln^2(x)}$.

Et donc $x^2 \ln\left(\cos \dfrac{1}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x^2}{2\ln(x)^2}$.

Par croissances comparées, ceci tend vers $-\infty$, et donc $\left(\cos \dfrac{1}{\ln x}\right)^{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. On a $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{1+(1-x^2)}$ avec $1-x^2 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$.

Donc $\sqrt{2-x^2}-1 \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1-x^2}{2} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{(1-x)(1+x)}{2} \underset{x\to 1}{\sim} 1-x$.

Puisque d'autre part, $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$, on en déduit, par quotient d'équivalents que

$$\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x} \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1-x}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} -1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} -1.$$

4. Commençons par noter que $\sqrt[3]{x^3+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{x^3} = x$ et de même $\sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.

Donc nous pouvons factoriser par x, le terme «prépondérant».

Il vient alors

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x}\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Or, $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de sorte que

$$\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

De même,

$$\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}+\underbrace{\frac{1}{2x^2}}_{\underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)}+o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et donc

$$\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = -\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}.$$

Après multiplication par x, on en vient donc à

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.$$

Détails

Puisque

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

alors

$$o\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right).$$

5. On a $\cos(2x)-\cos(5x) \underset{x\to 0}{=} 1-\dfrac{4x^2}{2}-1+\dfrac{25x^2}{2}+o(x^2)$ et donc

$$\frac{\cos(2x)-\cos(5x)}{x^2} \underset{x\to 0}{=} \frac{21}{2}+o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{21}{2}.$$

Remarque

Si on y regarde de plus près, on n'a pas eu besoin de toute l'information contenue dans

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

mais d'un peu plus que

$$\cos(x) = 1+o(1).$$

L'information essentielle était contenue dans

$$\cos(x) = 1+o(x).$$

6. On a $\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1 \underset{x\to 0}{=} x+o(x)-1-\dfrac{1}{2}x+o(x)+1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$.

De même,

$$\cos x - e^x \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x-o(x) \underset{x\to 0}{=} -x+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x.$$

Et donc $\dfrac{\ln(1+x)-\sqrt{1+x}+1}{\cos x - e^x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$.

7. On a $\ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\ln(e+x)\right)\right)$.

Mais $\ln(e+x) = 1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)$, avec $\ln\left(1+\dfrac{x}{e}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $\ln\left(\ln(e+x)\right) = \ln\left(1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \ln\left(1+\dfrac{x}{e}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{e}$.

Par conséquent,

$$\frac{1}{x}\ln\left(\ln(e+x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\frac{x}{e} = \frac{1}{e} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle[12], $\lim\limits_{x\to 0} \ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1/e}$.

[12] Toujours nécessaire pour composer des limites.

8. On a $\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)\right)$.
Mais $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1+\dfrac{2x}{x^2-x+1}$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x^2-x+1}=0$.
Et donc $\ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{x^2-x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}$.
On en déduit que $x\ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.
Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = e^2$.

Solution de l'exercice 19.18

1. On a
$$\frac{\cos x}{1+x}-1 = \frac{\cos x - 1 - x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2}-x+o(x^2)}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-x}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} -x.$$

2. On a $(x+1)^x - x^x = x^x\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - 1\right)$.
Mais $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e$, et donc $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e-1 \underset{x\to+\infty}{\sim} e-1$.
Et donc $(x+1)^x - x^x \underset{x\to+\infty}{\sim} (e-1)x^x$.

3. Puisque $x\cos x \underset{x\to+\infty}{=} o(x^2\ln(1+x))$, on a $x^2\ln(1+x)+x\cos x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\ln(1+x)$.
Et de plus, $1+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc[13] $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.
Donc $x^2\ln(1+x)+x\cos(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\ln(x)$.

[13] On a le droit de composer à gauche les équivalents par le ln si les fonctions tendent vers $+\infty$.

4. On a $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$ et $\tan x \operatorname{Arctan}(x^3) \underset{x\to 0}{\sim} x^4$ de sorte que
$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x)\operatorname{Arctan}(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^3\sqrt{x}}.$$

5. Une fois de plus, écrivons[14]
$$\ln\left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}\right) = \ln\left(1+\left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1\right)\right) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1=0.$$
Alors $\ln\dfrac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1$.
Mais $1+\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 2+\dfrac{x^2}{2}+o(x)$, donc
$$\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}-1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4}+o(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{4}.$$
Et donc $\ln\dfrac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{4}$.

[14] Car $\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

6. On a $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$.
Et $1-x^2 = (1-x)(1+x)$.
Et donc $\dfrac{\ln(x)}{1-x^2} \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{1}{x+1} \underset{x\to 1}{\sim} -\dfrac{1}{2}$.

7. Puisque $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et que $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^x)$, $\operatorname{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{2}$.
D'autre part, $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(xe^x)$ donc $xe^x - x^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} xe^x$.
Et donc, par quotient $\dfrac{xe^x-x^2}{\operatorname{ch}(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{xe^x}{\frac{e^x}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.

8. Puisque $x - x\cos x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, $\tan(x-x\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} x - x\cos x \underset{x\to 0}{\sim} x(1-\cos x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{2}$.
D'autre part, $\sin x + \cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{=} x + o(x) - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
Et donc $\dfrac{\tan(x-x\cos x)}{\sin x+\cos x - 1} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.

9. Commençons par une identité remarquable :

$$(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 = \left(\ln(1+x) + \ln(1-x)\right)\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right).$$

Or, $\ln(1+x) + \ln(1-x) = \ln(1-x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -x^2$.
Et d'autre part, $\ln(1+x) - \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x) + x + o(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.
Et donc, par produit d'équivalents,

$$(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 \underset{x\to 0}{\sim} -2x^3.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.19

Il est facile de noter que $\dfrac{x^2}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, alors que $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, si bien que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}x$.
Donc si une asymptote existe, elle a $\frac{\pi}{2}$ pour coefficient directeur.
Il serait alors possible, comme d'habitude[15], d'étudier la limite en $+\infty$ de $f(x) - \dfrac{\pi}{2}x$.

[15] Mais en utilisant les outils développés dans ce chapitre afin de lever les éventuelles formes indéterminées.

Mais procédons un peu différemment en cherchant directement un développement asymptotique de f de la forme $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + o(1)$.
En effet, ceci nous informe que $f(x) - (ax+b) \underset{x\to+\infty}{=} o(1) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est bien la définition d'une asymptote.

Le principal soucis va venir de l'arctangente, dont on ne connaît pas de développement en $+\infty$: elle tend vers $\frac{\pi}{2}$, mais à quelle vitesse ?
Pour cela, souvenons nous que pour $x > 0$, $\operatorname{Arctan}(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Et puisque $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il est possible d'utiliser le développement limité d'ordre 1 de l'arctangente en 0 :

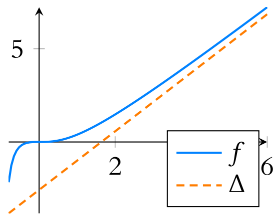
$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{1+\frac{1}{x}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} (x - 1 + o(1))\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1 + o(1).
\end{aligned}$$

Rappel

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + o(u).$$



Et donc ceci signifie bien que $f(x) - \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien que la droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x - \dfrac{\pi}{2} - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 19.20

1. Lorsque $x \to +\infty$, $\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, de sorte que

$$\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Et donc $\ln\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\ln x}$.

Après multiplication par x, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(x)}$.

2. En particulier, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc

$$e^{f(x)} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

Et donc $\lim\limits_{x+\infty} \left(e^{f(x)} - 1\right) \ln(x) = 1$.

3. Par définition, on a

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 = \exp\left(x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) - 1.$$

Mais $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} = \dfrac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.
Et donc $g(x) = \ln(x)\left(e^{f(x)} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.