

TD 18 : COMPARAISON DES SUITES ET DES FONCTIONS

► Comparaison des suites

EXERCICE 18.1 Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n k!$. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$

PD

EXERCICE 18.2 Soit (u_n) une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

AD

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. En déduire un équivalent simple de (u_n) .

EXERCICE 18.3 Classer les suites suivantes de sorte que chacune soit négligeable devant la suivante :

PD

- | | | | | |
|---------------------|------------------------|------------------|--------------------|-----------------------|
| ► $\frac{1}{n}$ | ► $n \ln(n)$ | ► $n^2 + 1$ | ► $e^{-n} n^2$ | ► $\frac{1}{n \ln n}$ |
| ► $\frac{\ln n}{n}$ | ► $\frac{2}{\sqrt{n}}$ | ► $n^3 + n$ | ► $\frac{n!}{n^4}$ | |
| | | ► $e^n \sqrt{n}$ | | |

EXERCICE 18.4 Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

PD

1. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{n}} - o(e^{-n}) - \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.
2. $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$.
3. $w_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + n^2 + o(n\sqrt{n}) + n \ln(n)\sqrt{n} + o(n^2 \ln(\ln n))$.

EXERCICE 18.5 Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n}^n + n^{\sqrt{n}} + n^{n/2}$.

PD

EXERCICE 18.6 Déterminer les limites des suites suivantes :

PD

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $u_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$ | 4. $u_n = \frac{n! + \sqrt{n}}{3^n + 4^n}$ | 6. $u_n = n\sqrt{\ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right)}$ |
| 2. $u_n = \frac{2^n \sin n}{n^4 + \frac{e^n}{n}}$ | 5. $u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right)^{n^2-n}$ | 7. $u_n = \frac{\text{ch}(\text{sh}(n))}{\text{sh}(\text{ch}(2n))}$ |
| 3. $u_n = \sqrt[n]{n}$ | | |

EXERCICE 18.7 Déterminer les limites des suites suivantes :

AD

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $u_n = \frac{n \sin n}{1 + n^2}$ | 3. $u_n = n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} \right)$ | 5. $u_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2} + \ln(n)}$ |
| 2. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$ | 4. $u_n = \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ | |

EXERCICE 18.8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers $+\infty$ et telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.

PD

Montrer qu'il existe une suite (w_n) telle que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$ et $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.

EXERCICE 18.9 Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{n} 2^{2n} (n!)^2}$.

EXERCICE 18.10 Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites à termes strictement positifs, et telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, avec $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$. Que dire de (v_n) ?

F

EXERCICE 18.11 Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

PD

1. Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) est bornée.
2. Si (u_n) converge et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge.
3. Si (u_n) converge vers 0 et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge vers 0.

4. Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n)$, alors (v_n) converge.

5. Si $u_n = (2n - 1)^3$, alors :

$$\square u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^3) \quad \square u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 8n^3 \quad \square u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^4) \quad \square u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3 \quad \square u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{n^4}{2}\right).$$

6. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$, alors :

$$\square \ln(u_n) = o(n) \quad \square \ln(u_n) = o(u_n) \quad \square \ln(n) = o(u_n)$$

7. Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

8. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors :

$$\square u_n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n + 1 \quad \square 2u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2v_n \quad \square u_n - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 0 \quad \square -u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -v_n$$

$$\square u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n^2 \quad \square e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n} \quad \square \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n)$$

9. Soit (u_n) une suite strictement positive. Laquelle des situations suivantes est équivalente au fait que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n$?

$$\square \frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 2 \quad \square u_n - 2^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \quad \text{(a) } \ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(2) \quad \text{(b) } \frac{u_n}{2^n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1).$$

EXERCICE 18.12 Déterminer des équivalents des suites suivantes :

1. $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$

4. $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n^3+1}}$

7. $\exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1$

2. $e^{\tan \frac{\pi}{n^2}} - 1$

5. $\binom{n}{k}$, où $k \in \mathbf{N}$ est fixé.

8. $\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n}$

3. $e^{\arccos \frac{1}{n}} - e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$

6. $(n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}$

9. $\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right)\right)$.

EXERCICE 18.13 Développement asymptotique d'une suite définie implicitement

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive que l'on notera u_n .

2. Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

3. Prouver que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

EXERCICE 18.14 Donner un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, ni $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$.

EXERCICE 18.15 Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $P_n = X^3 - (n+2)X^2 + (2n+1)X - 1 \in \mathbf{R}[X]$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$ assez grand, P_n possède trois racines a_n, b_n et c_n vérifiant

$$0 < a_n < 1 < b_n < 3 < \frac{2n+1}{3} < c_n.$$

2. Prouver alors successivement :

$$c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty, a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0, c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n, b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 2, a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

EXERCICE 18.16 (Oral Polytechnique)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

Déterminer un équivalent de (u_n) .

► Comparaison des fonctions

EXERCICE 18.17 Du calcul, rien que du calcul

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \ln(1+x)}{x \tan x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{\ln x}\right)^{x^2}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{\ln x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - \cos(5x)}{x^2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sqrt{1+x} + 1}{\cos x - e^x}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right)^x.$$

EXERCICE 18.18 Déterminer des équivalents des fonctions suivantes :

$$1. \frac{\cos x}{1+x} - 1 \text{ en } 0$$

$$2. (x+1)^x - x^x \text{ en } +\infty.$$

$$3. x^2 \ln(1+x) + x \cos x \text{ en } +\infty$$

$$4. \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x) \operatorname{Arctan}(x^3)} \text{ en } 0$$

$$5. \ln \frac{1 + \operatorname{ch}(x)}{2} \text{ en } 0$$

$$6. \frac{\ln x}{1-x^2} \text{ en } 1$$

$$7. \frac{x e^x - x^2}{\operatorname{ch}(x)} \text{ en } +\infty$$

$$8. \frac{\tan(x - x \cos x)}{\sin x + \cos x - 1} \text{ en } 0$$

$$9. (\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 \text{ en } 0$$

EXERCICE 18.19 Soit $f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan}(x)$. Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on déterminera au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 18.20 Soit $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\ln(x)} \right)$.

$$1. \text{ Prouver que } f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

$$2. \text{ En déduire la limite en } +\infty \text{ de } (e^{f(x)} - 1) \ln(x).$$

$$3. \text{ Soit } g(x) = \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)^x - 1 \right] \ln(x). \text{ Déterminer la limite de } g \text{ en } +\infty.$$

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 18

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.1

Puisque $\sum_{k=1}^n k! = \sum_{k=1}^{n-1} k! + n!$, il s'agit de prouver que $\sum_{k=1}^{n-1} k! \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!).$

Soit encore que $\frac{\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

S'il est clair que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\frac{k!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il n'est pas question de sommer ces limites, **qui ne sont pas en nombre fixé.**

Essayons plutôt d'encadrer la somme : on a, pour $n \geq 3$

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \leq \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)}$$

et donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!} = 0.$

Et donc $\sum_{k=1}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.2

1. Puisque (u_n) est décroissante et minorée, elle converge vers un réel ℓ .
Mais $u_{n+1} + u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\ell + \ell = 0$, donc $\ell = 0$.

2. Par décroissance de (u_n) , on a $u_n + u_{n+1} \leq 2u_n \leq u_n + u_{n-1}$.

Mais $u_n + u_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Donc $n(u_n + u_{n-1}) \leq 2nu_n \leq n(u_n + u_{n+1})$, et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_n = 1 \Leftrightarrow u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.3

Notons $u_n < v_n$ pour signifier que $u_n = o(v_n)$.

On a alors

$$e^{-n} n^2 < \frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}} < n \ln n < n^2 + 1 < n^3 + n < e^n \sqrt{n} < \frac{n!}{n^4}$$

Les seules qui ne découlent pas directement du cours sont la première et la dernière.

On a $e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$, de sorte que $e^n n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{1}{n \ln n}\right)$.

Et pour la dernière, il s'agit de prouver que $\frac{e^n \sqrt{nn^4}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

Or, $e^n \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{n!}{n^4}\right)$.

Il s'agit donc de prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n n^4 \sqrt{n}}{n!} = 0.$

Mais $\sqrt{nn^4} = n^{9/2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^n)$.

Et donc $e^n \sqrt{nn^4} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{2n})$.

Mais $e^{2n} = (e^2)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!).$

D'où le résultat annoncé.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.4

L'idée général est de «nettoyer» les termes inutiles : à partir du moment où une expression contient un $o(n)$, tous les termes négligeable devant n peuvent «rentrer» dans le $o(n)$.

Remarque

On a sommé des limites, et pas des équivalents !

⚠ Attention !

La notation n'est pas complètement judicieuse : la négligeabilité n'est pas une relation d'ordre sur l'ensemble des suites : elle n'est ni réflexive ni antisymétrique.

1. Puisque tous les termes tendent vers 0, celui qui est prépondérant devant les autres est celui qui tend «le moins vite» vers 0.

En l'occurrence ici c'est $\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Viennent ensuite $\frac{\pi}{\sqrt{n}}$, puis $\frac{1}{n}$, puis $\frac{-2}{n\sqrt{n}}$.

Et enfin, $e^{-n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + \frac{\pi}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Nous pourrions aussi dire directement que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\frac{\ln n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$$

Toutefois c'est moins précis, par exemple car cela ne nous fournit pas la limite de $u_n + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

ou de $\sqrt{n}\left(u_n + \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$.

2. Sur le même principe,

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$

3. Tous les termes sont des $o(n^2 \ln(\ln n))$, donc $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^2 \ln(\ln n))$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.5

On a $u_n = e^{n \ln(\sqrt{n})} + e^{\sqrt{n} \ln(n)} + e^{\frac{n}{2} \ln(n)} = 2e^{\frac{n}{2} \ln n} + e^{\sqrt{n} \ln(n)}$.

Mais

$$\frac{e^{\sqrt{n} \ln(n)}}{e^{\frac{n}{2} \ln(n)}} = \exp\left(\left(\sqrt{n} - \frac{n}{2}\right) \ln(n)\right)$$

et $\sqrt{n} - \frac{n}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n}{2}$ si bien que

$$\left(\sqrt{n} - \frac{n}{2}\right) \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{n}{2} \ln(n) \longrightarrow -\infty.$$

Et donc on en déduit par composition de limites que

$$\frac{e^{\sqrt{n} \ln(n)}}{e^{\frac{n}{2} \ln(n)}} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow e^{\sqrt{n} \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(e^{\frac{n}{2} \ln(n)}\right).$$

Et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 2e^{\frac{n}{2} \ln(n)} + o\left(e^{\frac{n}{2} \ln(n)}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{\frac{n}{2} \ln(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.6

1. Puisque $(-1)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(2^n)$, il vient $2^n + (-1)^n = 2^n + \underset{n \rightarrow +\infty}{o(2^n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n$.

De même, on a $3n + (-1)^{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3n$ et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n}{3n} \longrightarrow +\infty$.

2. On a $|u_n| \leq \frac{2^n}{n^4 + \frac{e^n}{n}}$.

Or, $n^5 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^n)$ et donc $n^4 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{e^n}{n}\right)$.

On en déduit que $n^4 + \frac{e^n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$.

Et alors $\frac{2^n}{n^4 + \frac{e^n}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n2^n}{e^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\left(\frac{2}{e}\right)^n$.

Puisque $0 < \frac{2}{e} < 1$, les croissances comparées usuelles nous informent que $n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ et

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$.

Par majoration, on en déduit que $u_n \longrightarrow 0$.

Alternative : pour ne pas s'embêter à trouver un équivalent du dénominateur, on peut tout simplement noter que $\frac{2^n}{n^4 + \frac{e^n}{n}} \leq \frac{2^n}{\frac{e^n}{n}} \dots$

Remarque

Garder le terme en $\frac{1}{n^2}$ est inutile puisqu'il «rentre» dans le $o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$ présent dès le départ.

⚠ Attention !

On a envie de dire (et on a raison) que e^n l'emporte sur n . C'est vrai, au sens où $n = o(e^n)$. En revanche, on n'en déduira pas que $\frac{e^n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^n$. Pour s'en convaincre, il suffit de constater que le quotient $\frac{e^n}{e^n}$ vaut $\frac{1}{n}$, et ne tend donc pas vers 1.

Au moindre doute, revenez au quotient !

3. On a $u_n = e^{\frac{1}{n} \ln(n)}$. Or, par croissance comparées, $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n)} = e^0 = 1$.
4. Puisque par croissances comparées, $\sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n!)$, $n! + \sqrt{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$.
De même, $3 < 4$ et donc $3^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(4^n)$, et donc $3^n + 4^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 4^n$.
- On en déduit que $\frac{n! + \sqrt{n}}{3^n + 4^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{4^n}$, qui, par croissances comparées, tend vers $+\infty$.
5. Il s'agit de revenir à la forme exponentielle, pour se débarrasser de la forme indéterminée 1^∞ .

$$\text{On a donc } u_n = \exp\left((n^2 - n) \ln\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right)\right).$$

$$\text{Déjà, } \frac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n} \text{ et } n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n, \text{ de sorte que } \frac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Donc } \frac{\sqrt{n-1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \text{ et donc } \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On en déduit donc que

$$\ln\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n-1}}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Après multiplication par $n^2 - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2$, on en déduit que

$$(n^2 - n) \ln\left(1 + \sin\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n+1}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Et donc par composition de limites¹, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

6. Puisque $\frac{2}{n^2+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$.

$$\text{Et donc}^2, \sqrt{\ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Et donc enfin, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2}$ de sorte que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2}$.

7. Au voisinage de $+\infty$, on a $e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$ et donc $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$.

$$\text{De même, } \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}.$$

$$\text{Et donc } \text{ch}(\text{sh}(n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\text{sh}(n)}}{2} \text{ et } \text{sh}(\text{ch}(2n)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\text{ch}(2n)}}{2}.$$

On en déduit que

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{\text{sh}(n)}}{e^{\text{ch}(2n)}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\text{sh}(n) - \text{ch}(2n)}.$$

Mais $\text{ch}(2n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{2n}}{2}$ et $\text{sh}(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2}$, de sorte que $\text{sh}(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\text{ch}(2n))$ et donc $\text{sh}(n) - \text{ch}(2n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\text{ch}(2n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Et donc par composition de limite³, on en déduit que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

¹ Et surtout pas par composition d'équivalents à gauche : $u_n \sim v_n$ n'implique pas $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

² On peut passer à la racine dans des équivalents.

³ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.7

1. Puisque $|\sin n| \leq 1$, il vient $0 \leq |u_n| \leq \frac{n}{1+n^2}$. Mais $\frac{n}{1+n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Ainsi, le théorème des gendarmes, on a donc $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, il faut passer par la forme exponentielle :

$$u_n = e^{(n+2) \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right)} = e^{(n+2) \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)}.$$

Or, $(n+2) \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2(n+2)}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2$. Donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-2}$.

Alternative : si on ne voit pas que $\frac{n-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$, il est possible de remarquer que

$\frac{n-1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. Et donc

$$\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \underbrace{\left(\frac{n-1}{n+1} - 1\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n-1}{n+1} - 1 = -\frac{2}{n+1}.$$

3. Puisque $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on a $\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Et de même,

$$\cos \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{(n+1)^3}\right) = 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent,

$$\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Après multiplication par n^2 , il vient

$$u_n = \underbrace{\frac{-2n^3 - n^2}{2n^2(n+1)^2}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} + \underbrace{o(1)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

4. En revenant à la forme exponentielle, on a $u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right)\right)$.

Or, puisque $\cos \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, on a donc

$$\ln\left(\cos \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \cos \frac{1}{n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Et donc $n^2 \ln\left(\cos \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2}$.

Par continuité de l'exponentielle, on a donc $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

5. On a $3n^2 + (-1)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3n^2$.

D'autre part, $\sqrt{n^2 + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et donc $\ln(n) = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\sqrt{n^2 + 2}\right)$.

On en déduit donc que $\sqrt{n^2 + 2} + \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n^2 + 2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Par conséquent, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3n^2}{n}$, donc $u_n \rightarrow +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.8

Puisque les suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, elles sont strictement positives à partir d'un certain rang.

Et donc $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Posons alors $w_n = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} v_n = \sqrt{u_n v_n}$, de sorte que $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o(v_n)$.

Et alors $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n v_n}} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o(w_n)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.9

Voici un cas où la formule de Stirling semble toute indiquée !

On a $(2n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (2n+1)^{2n+1} e^{-2n-1} \sqrt{2\pi(2n+1)}$.

Et de même, $(n!)^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{2n} e^{-2n} (2\pi n)$.

Donc il vient

$$\frac{(2n+1)!}{\sqrt{n} 2^{2n} (n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(2n+1)^{2n+1} e^{-2n-1} \sqrt{2\pi(2n+1)}}{\sqrt{n} 2^{2n} n^{2n} e^{-2n} (2\pi n)}$$

Détails

Puisque $\frac{1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$, on a

$$o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc nous pouvons regrouper les deux o en un seul : $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Détails

On a utilisé ici le fait que lorsque $u \rightarrow 1$,

$$\ln(u) = \ln(1 + (u-1)) \sim u-1.$$

Rédaction

Le fait que si $u_n \rightarrow \ell$, alors $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ n'est vrai que si f est continue en ℓ . Il ne faut alors pas oublier de le mentionner.

Détails

$u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$u_n = v_n + o(v_n).$$

$$\begin{aligned} & \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(2n+1)^{3/2}}{n\sqrt{n}} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{2n} \\ & \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{2^{3/2}n^{3/2}}{n\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \\ & \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \end{aligned}$$

Mais une fois de plus⁴, on a

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \exp\left(2n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right).$$

Or, $\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$, donc $2n \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, de sorte que par continuité de

l'exponentielle, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$.

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{n}2^{2n}(n!)^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.10

Puisque tout est positif, on a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $1 \leq \frac{v_n}{u_n} \leq \frac{w_n}{u_n}$.

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\frac{v_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.11

1. Si $u_n = (2n+1)^2$, alors :

✗ $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n^3)$: en effet, $\frac{(2n-1)^3}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{8n^3}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 8 \neq 0$.

✓ $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 8n^3$: voir ci-dessus.

✓ $u_n = o(n^4)$: on a $u_n \sim 8n^3$ et donc $\frac{u_n}{n^4} \sim \frac{8n^3}{n^4} = \frac{8}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

✗ $u_n \sim n^3$: les constantes ont leur importance dans les équivalents.

En effet, on a $\frac{u_n}{n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{8n^3}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 8 \neq 1$.

✓ $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{n^4}{2}\right)$: les constantes ne servent à rien dans les o : être négligeable devant n^4 est pareil qu'être négligeable devant $\frac{n^4}{2}$.

2. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, alors :

✗ $\ln(u_n) = o(n)$: par exemple, si $u_n = e^n$, alors $\ln(u_n) = n$, qui n'est évidemment pas négligeable devant n .

✓ $\ln(u_n) = o(u_n)$: revenons à la définition d'un o : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$ par composition de limites⁵.

✗ $\ln(n) = o(u_n)$: prendre par exemple $u_n = \ln(n)$.

3. **✗** Par exemple, prenons $u_n = e^n$. Alors $u_{n+1} = e^{n+1} = e \times u_n$, de sorte que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e \neq 1$, et donc $u_n \not\sim u_{n+1}$.

Notons toutefois que pour une suite convergente vers une limite $\ell \neq 0$, le résultat est vrai car $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{\ell} = 1$.

4. Si $u_n \sim v_n$, alors :

✗ $u_n + 1 \sim v_n + 1$: en effet, si $u_n = -1 + \frac{1}{n}$, et $v_n = -1$, alors $u_n \sim v_n$, mais pourtant $v_n + 1 = 0$ alors que $u_n + 1 \neq 0$, et donc $u_n \not\sim v_n$.

⁴ Archi-classique !

Détails

Pour s'en convaincre, on peut revenir au quotient : on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^4/2} = 0$$

si et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^4} = 0.$$

⁵ Il est bien connu que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

En revanche

Si $\ell = 0$, le résultat est faux, comme le prouve $u_n = e^{-n}$.

✓ $2u_n \sim 2v_n$: on a bien le droit de multiplier les équivalents. Et en particulier de les multiplier par une constante.

✗ $u_n - v_n \sim 0$: prenons $u_n = \frac{1}{n} + 1$ et $v_n = 1$. Alors $u_n \sim v_n$, et $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ n'est pas équivalent à 0.

✓ $-u_n \sim -v_n$: comme précédemment, on peut multiplier les équivalents.

✓ $u_n v_n \sim u_n^2$: on peut multiplier les équivalents.

Or, $u_n \sim v_n$ et $u_n \sim u_n$, donc par produit d'équivalents, $u_n v_n \sim u_n u_n = u_n^2$.

✗ $e^{u_n} \sim e^{v_n}$: prenons $u_n = n$ et $v_n = n + 1$. Alors $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = \frac{e^n}{e^{n+1}} = \frac{1}{e} \not\rightarrow 1$ et donc $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$.

Équivalent à 0

Rappelons que seule la suite nulle est équivalente à 0.

Quest. subsidiaire

Montrer que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n \rightarrow 0$.

5. ✗ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$

Par exemple si $u_n = n2^n$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2 \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$, et pourtant $\frac{u_n}{2^n} = n$, de sorte que $u_n \not\sim 2^n$.

✗ $u_n - 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: la condition donnée est suffisante, puisque si $u_n - 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$\frac{u_n}{2^n} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et donc } \frac{u_n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Toutefois, elle n'est pas nécessaire. Par exemple, si on pose $u_n = 2^n + n$, alors $u_n = 2^n + o(2^n)$, de sorte que $u_n \sim 2^n$.

Mais pourtant, $u_n - 2^n = n \not\rightarrow 0$.

✗ $\ln u_n \sim n \ln(2)$: puisqu'on ne peut pas composer les équivalents, il n'est pas possible de passer à l'exponentielle pour en déduire que $u_n = e^u \sim e^{n \ln 2} = 2^n$.

Par exemple, si $u_n = 3 \times 2^n$, alors $\ln u_n = \ln(3) + n \ln(2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(2)$, mais pourtant $u_n \not\sim 2^n$.

✓ $\frac{u_n}{2^n} - 1 = o(1)$

Ceci est équivalent à $\frac{u_n}{2^n} = 1 + o(1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

Et donc, après multiplication par 2^n , à $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.12

1. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} &= \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} \left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \sqrt{n} \left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

2. Puisque $\tan \frac{\pi}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a

$$e^{\tan \frac{\pi}{n^2}} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \tan \frac{\pi}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}.$$

3. Notons que $\text{Arccos} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$, et que les seules informations dont nous disposons au sujet de e^x sont lorsque $x \rightarrow 0$.

Il s'agit alors d'écrire $e^{\text{Arccos } \frac{1}{n}} = e^{\frac{\pi}{2} + \text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} e^{\text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}}$.

Cette fois, $\text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, de sorte que

$$e^{\text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \left(\text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2} + o\left(\text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}\right) \right).$$

Mais $\text{Arccos } \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ de sorte que $\text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$ et donc

$$o\left(\text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Et donc

$$\begin{aligned} e^{\text{Arccos } \frac{1}{n}} - e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{n}} &= e^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{\text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}} - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2} + o\left(\text{Arccos } \frac{1}{n} - \frac{\pi}{2}\right) - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\sqrt{n} - 1 < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n}$, et donc en divisant par n , $1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} \leq 1$.

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} = 1$, et donc $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

Puisque d'autre part $n^3 + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3$, $\sqrt{n^3 + 1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{n^3} = n^{3/2}$.

$$\text{Et donc } \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n^3 + 1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n^{3/2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

5. On a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Le numérateur est un polynôme de degré k en n , dont le coefficient dominant vaut 1.

Il est donc équivalent à n^k . Et par conséquent, $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

6. On a $(n+1)^{1/n} - n^{1/n} = n^{1/n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n} - 1 \right)$.

$$\text{Mais } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Puisque $\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, on a donc $e^{\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

D'autre part, il est facile, en revenant aux exponentielles, de prouver que $n^{1/n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et

$$\text{donc que } (n+1)^{1/n} - n^{1/n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

7. Notons que $\frac{1 - \sqrt{n}}{1+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-\sqrt{n}}{n} = -\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Et donc il vient

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1 - \sqrt{n}}{1+n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

8. On a $u_n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$.

Or, nous savons que $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + o_{u \rightarrow 0}(u)$. Donc

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n^2}} = 1 + \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{3n^2} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Plus généralement

Le même encadrement permet de prouver que pour toute suite (u_n) qui tend vers $+\infty$, $\lfloor u_n \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

En revanche, rien de tel ne reste valable pour des suites qui ne tendraient pas vers $+\infty$.

Méthode

La présence de factorielles ne doit pas vous faire automatiquement penser à Stirling, qui doit plutôt être un dernier recours, si aucune simplification ne peut être effectuée.

Détails

Il s'agit d'utiliser l'équivalent usuel

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

Notons que pour l'utiliser, il était indispensable de commencer par s'assurer que la quantité dans l'exponentielle tend bien vers 0.

$$= \frac{5}{6n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5}{6n^2}.$$

Et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{5}{6n}$.

9. Commençons par noter que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n}{2^n}\right) = \sin\left(\frac{n}{2^n}\right)$.

Puisque $n = o_{n \rightarrow +\infty}(2^n)$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) = 0$.

On en déduit donc que

$$u_n = \sin\left(\sin\left(\frac{n}{2^n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sin\left(\frac{n}{2^n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2^n}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.13

- Il suffit de dresser le tableau de variations de f_n sur \mathbf{R}_+^* . Elle y est strictement croissante⁶, continue, et $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$. Donc par le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans \mathbf{R}_+^* .
- Notons que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x$, et donc que $f_{n+1}(u_n) - f_n(u_n) = u_n > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. Par croissance de f_{n+1} , ceci implique que $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par 0, elle converge vers une limite ℓ . Mais alors, on a $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n^5 + nu_n - 1 = 0 \Leftrightarrow u_n = \frac{1 - u_n^5}{n}$. Or la suite $(1 - u_n^5)$ est convergente, donc bornée, et donc $\frac{1 - u_n^5}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. Et ainsi, $\ell = 0$.
- Nous avons $nu_n = 1 - u_n^5 \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1$. C'est la définition de $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Mais alors, $u_n - \frac{1}{n} = -\frac{u_n^5}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{n^6}$, et donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.14

La première idée pour avoir une suite telle que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ et pas $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ serait de prendre une suite équivalente à (u_n) , ou même à un multiple⁷ de u_n . Mais dans ce cas, on aurait $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$.

L'énoncé veut donc nous faire dire qu'il existe davantage d'autres suites dominées par (v_n) ...

Cherchons une solution avec (u_n) et (v_n) non nulles.

On veut donc $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ bornée mais qui ne tend pas vers 0, et $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_n$ non bornée.

Il faut donc que $\frac{v_n}{u_n}$ puisse prendre des valeurs aussi grandes que l'on veut, mais elle ne peut pas pour autant tendre vers $+\infty$, faute de quoi son inverse tendrait vers 0.

Nous connaissons de telles suites, par exemple $w_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Donc posons $u_n = 1$ et $v_n = u_n w_n = w_n$, de sorte que $\frac{u_n}{v_n} = \frac{1}{w_n}$ qui est bornée par 1 (et donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$) et $\frac{v_n}{u_n} = w_n$ qui est non bornée puisque $w_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty$, de sorte qu'on n'a pas $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.15

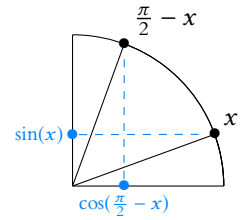
- On peut s'en tirer avec un tableau de variation et le théorème de la bijection. Plus simplement, notons que pour $n \geq 4$ (condition nécessaire pour avoir $3 < \frac{2n+1}{3}$), on a $P_n(0) = -1$, $P_n(1) = n - 1 > 0$, $P_n(3) = 11 - 3n < 0$ et

$$P_n\left(\frac{2n+1}{3}\right) = \left(\frac{2n+1}{3}\right)^3 - (n+2)\left(\frac{2n+1}{3}\right)^2 + (2n+1)\frac{2n+1}{3} - 1 = \frac{(2n+1)^2}{9} \left(\frac{2n+1}{3} - (n+2) + 3\right) - 1 = \frac{(2n+1)^2}{9} \frac{4-n}{3} - 1 < 0.$$

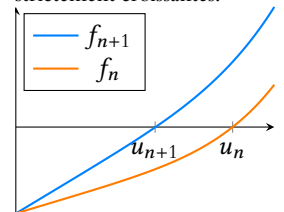
Comme (presque) toutes les formules de trigonométrie, la formule

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

peut se retrouver sur un dessin



⁶ Inutile de dériver : c'est une somme de fonctions strictement croissantes.



f_{n+1} est au dessus de f_n , donc coupe l'axe des abscisses plus tôt

Rappel

$u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

⁷ Non nul.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$.

Donc par applications du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une racine de P dans $]0, 1[$, une dans $]1, 3[$ et une dans $]\frac{2n+1}{3}, +\infty[$.

Notons que ce sont les seules⁸ puisque nous avons là trois racines pour un polynôme de degré 3.

2. Il s'agit à présent d'utiliser les relations racines coefficients. En effet, celles-ci nous disent que

$$a_n + b_n + c_n = n + 2, \quad a_n b_n + a_n c_n + b_n c_n = 2n + 1, \quad a_n b_n c_n = 1.$$

Puisque $c_n \geq \frac{2n+1}{3}$, on a tout de suite $c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Alors $a_n = \frac{1}{b_n c_n}$, avec $2c_n \leq b_n c_n \leq 3c_n$, donc $b_n c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Puisque (a_n) et (b_n) sont bornées, elles sont négligeables devant (c_n) .

Et donc $a_n + b_n + c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c_n + o(c_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c_n$.

Puisque par ailleurs, $a_n + b_n + c_n = n + 2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, on en déduit que $c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Par ailleurs, par la seconde relation racines-coefficients, $b_n = \frac{2n + 1 - a_n c_n}{b_n + c_n}$.

Puisque $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $a_n c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o(c_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o(n)$.

Et donc $2n + 1 - a_n c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n + o(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Par ailleurs, $a_n + c_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} c_n$, et donc $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{c_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2$.

Ceci prouve donc que $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Enfin, grâce à la dernière relation $a_n b_n c_n = 1$, on a $a_n = \frac{1}{b_n c_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.16

Il est évident que (u_n) est croissante. Si elle convergerait vers un réel ℓ , on aurait $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + e^{-u_n} = \ell + e^{-\ell}$ (par continuité de l'exponentielle).

Mais ceci est impossible, donc nécessairement, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Posons alors $v_n = e^{u_n}$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n + e^{-u_n}} = e^{u_n + \frac{1}{v_n}} = v_n e^{\frac{1}{v_n}}.$$

Puisque (v_n) tend elle aussi vers $+\infty$, on a

$$v_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \left(1 + \frac{1}{v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right) \right) = v_n + 1 + o(1).$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Appliquons alors le théorème de sommation de Césaro⁹

$$\frac{(v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots + v_{n+1} - v_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Soit encore $\frac{v_{n+1} - v_0}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, de sorte que $\frac{v_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

Puisque $n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a bien le droit de composer les équivalents par le logarithme :

$u_n = \ln(v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.17

1. Aucune difficulté ici : $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, et donc par produit et

quotient d'équivalents, $\frac{\sin(x) \ln(1+x)}{x \tan(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{x^2} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

2. On a $\left(\cos \frac{1}{\ln x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \ln\left(\cos \frac{1}{\ln x}\right)\right)$.

Puisque $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $\frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\cos \frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

⁸ Et donc qu'il n'y a pas ambiguïté sur ce qu'on note a_n, b_n, c_n .

Détails

Puisque $c_n \sim n$, toute suite négligeable devant c_n est négligeable devant n (et vice-versa).

Rappel

Être équivalent à une constante non nul, c'est tendre vers cette constante.

⁹ Oui je sais, ce n'est pas explicitement au programme, mais tout le monde l'a fait un jour en TD, et c'est le genre de choses qu'il peut être bon de savoir pour l'X...

Écrivons alors $\ln\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\frac{1}{\ln x} - 1\right)\right)$, avec $\cos\frac{1}{\ln x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

On a alors $\ln\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \cos\frac{1}{\ln x} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2\ln^2(x)}$.

Et donc $x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2\ln(x)^2}$.

Par croissances comparées, ceci tend vers $-\infty$, et donc $\left(\cos\frac{1}{\ln x}\right)^{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

3. On a $\sqrt{2-x^2} = \sqrt{1+(1-x^2)}$ avec $1-x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$.

Donc $\sqrt{2-x^2} - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1-x^2}{2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} 1-x$.

Puisque d'autre par, $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x-1$, on en déduit, par quotient d'équivalents que

$$\frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{\ln x} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1-x}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} -1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} -1.$$

4. Commençons par noter que $\sqrt[3]{x^3+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{x^3} = x$ et de même $\sqrt{x^2+x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

Donc nous pouvons factoriser par x , le terme «prépondérant».

Il vient alors

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right).$$

Or, $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, de sorte que

$$\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

De même,

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{2x^2}\right) = 1 + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et donc

$$\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2x}.$$

Après multiplication par x , on en vient donc à

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

5. On a $\cos(2x) - \cos(5x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{4x^2}{2} - 1 + \frac{25x^2}{2} + o(x^2)$ et donc

$$\frac{\cos(2x) - \cos(5x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{21}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{21}{2}.$$

6. On a $\ln(1+x) - \sqrt{1+x} + 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) - 1 - \frac{1}{2}x + o(x) + 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$.

De même,

$$\cos x - e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x.$$

Et donc $\frac{\ln(1+x) - \sqrt{1+x} + 1}{\cos x - e^x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$.

7. On a $\ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(\ln(e+x))\right)$.

Mais $\ln(e+x) = 1 + \ln\left(1 + \frac{x}{e}\right)$, avec $\ln\left(1 + \frac{x}{e}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Astuce

Voici une astuce qui sert très souvent : on connaît un équivalent de $\ln(1+x)$ quand x tend vers 0.

Donc pour $\ln(x)$, avec $x \rightarrow 1$, il suffit d'écrire $\ln(x) = \ln(1+(x-1))$, et alors $x-1 \rightarrow 0$, donc l'équivalent précité fonctionne.

Et donc $\ln(\ln(e+x)) = \ln(1 + \ln(1 + \frac{x}{e})) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1 + \frac{x}{e}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{e}$.

Par conséquent,

$$\frac{1}{x} \ln(\ln(e+x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x} \frac{x}{e} = \frac{1}{e} \longrightarrow \frac{1}{e}.$$

Et donc, par continuité de l'exponentielle¹⁰, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e+x)^{\frac{1}{x}} = e^{1/e}$.

¹⁰ Toujours nécessaire pour composer des limites.

8. On a $\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = \exp\left(x \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)\right)$.

Mais $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = 1 + \frac{2x}{x^2-x+1}$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2-x+1} = 0$.

Et donc $\ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{x^2-x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{x}$.

On en déduit que $x \ln\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \longrightarrow 2$.

Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x = e^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.18

1. On a

$$\frac{\cos x}{1+x} - 1 = \frac{\cos x - 1 - x}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2} - x + o(x^2)}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x.$$

2. On a $(x+1)^x - x^x = x^x \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 1 \right)$.

Mais $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \longrightarrow e$, et donc $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - 1 \longrightarrow e - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e - 1$.

Et donc $(x+1)^x - x^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (e-1)x^x$.

3. Puisque $x \cos x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^2 \ln(1+x))$, on a $x^2 \ln(1+x) + x \cos x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \ln(1+x)$.

Et de plus, $1+x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, donc¹¹ $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$.

Donc $x^2 \ln(1+x) + x \cos(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \ln(x)$.

4. On a $\ln(1+\sqrt{x}) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{x}$ et $\tan x \operatorname{Arctan}(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^4$ de sorte que

$$\frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\tan(x) \operatorname{Arctan}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^3 \sqrt{x}}.$$

5. Une fois de plus, écrivons

$$\ln\left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} - 1\right)\right) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} - 1 = 0.$$

Alors $\ln\left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} - 1$.

Mais $1+\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + \frac{x^2}{2} + o(x)$, donc

$$\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x^2}{4} + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{4}.$$

Et donc $\ln\left(\frac{1+\operatorname{ch}(x)}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{4}$.

6. On a $\ln(x) = \ln(1+x-1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x-1$.

Et $1-x^2 = (1-x)(1+x)$.

Et donc $\frac{\ln(x)}{1-x^2} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{x+1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2}$.

7. Puisque $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et que $e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$, $\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$.

D'autre part, $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(xe^x)$ donc $xe^x - x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} xe^x$.

Et donc, par quotient $\frac{xe^x - x^2}{\operatorname{ch}(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xe^x}{\frac{e^x}{2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$.

¹¹ On a le droit de composer à gauche les équivalents par le \ln si les fonctions tendent vers $+\infty$.

8. Puisque $x - x \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $\tan(x - x \cos x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x - x \cos x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{2}$.

D'autre part, $\sin x + \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

Et donc $\frac{\tan(x - x \cos x)}{\sin x + \cos x - 1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

9. Commençons par une identité remarquable :

$$(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 = (\ln(1+x) + \ln(1-x))(\ln(1+x) - \ln(1-x)).$$

Or, $\ln(1+x) + \ln(1-x) = \ln(1-x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$.

Et d'autre part, $\ln(1+x) - \ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + x + o(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$.

Et donc, par produit d'équivalents,

$$(\ln(1+x))^2 - (\ln(1-x))^2 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x^3.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.19

On a $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2+x} \operatorname{Arctan} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$.

De plus, on a

$$\begin{aligned} f(x) - \frac{\pi}{2}x &= \frac{x^2}{x+1} \operatorname{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}x \\ &= \frac{x^2}{x+1} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} \right) - \frac{\pi}{2}x \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x^2}{x+1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) - \frac{\pi}{2}x \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} \frac{-x}{x+1} - \frac{x}{1+x} + o\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} -\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \frac{x}{x+1} + o\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{x+1} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Et donc la droite Δ d'équation $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} - 1$ est asymptote à Γ_f au voisinage de $+\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 18.20

1. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, de sorte que

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Et donc $\ln\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x \ln x}$.

Après multiplication par x , $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$.

2. En particulier, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, et donc

$$e^{f(x)} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

Et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{f(x)} - 1) \ln(x) = 1$.

3. Par définition, on a

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 = \exp\left(x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) - 1.$$

Mais $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln x}$.

Et donc $g(x) = \ln(x) (e^{f(x)} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

Et donc ?

Si une telle asymptote existe, elle a pour coefficient directeur $\frac{\pi}{2}$.

Rappel

Pour $x > 0$,

$$\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}.$$

