TD 17 : Limites, continuité

▶ Limites

Exercice 17.1 (Re-)Prouver «à la main» (c'est-à-dire sans utiliser la notion de voisinage) que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a}(g\circ f)(x) = \ell$ dans les cas suivants : F

1. $a = b = \ell = +\infty$
2. $a = -\infty$, $b, \ell \in \mathbf{R}$
3. $a \in \mathbf{R}$, $b = +\infty$, $\ell = -\infty$

Exercice 17.2 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que la suite $(f(n))_n$ diverge vers $+\infty$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. PD

Exercice 17.3 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction strictement croissante. PD

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 0$.
2. Peut-on avoir $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$?

Exercice 17.4 Déterminer les limites suivantes, lorsqu'elles existent : PD

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{\cos x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x$
5. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \lfloor x\rfloor$
7. $\lim\limits_{x\to0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
8. $\lim\limits_{x\to0} x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$
9. $\lim\limits_{x\to0} \cos\left(x+\frac{1}{x}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)}$

Exercice 17.5 Montrer que la fonction cos n'a pas de limite (finie ou infinie) en $+\infty$. F

Exercice 17.6 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ périodique. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f possède une limite (finie ou non) en $+\infty$. AD

Exercice 17.7 Montrer que la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$. AD

Exercice 17.8 AD

1. Montrer que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'est continue en aucun point.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ est continue en 0, mais n'est continue en aucun $a \in \mathbf{R}^*$.

Exercice 17.9 Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction bornée au voisinage de $+\infty$ telle que $f(x+1) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbf{R}$. Montrer que $\ell = 0$. PD

Exercice 17.10 Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ croissante et qui réalise une surjection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Montrer que f est continue. AD

Exercice 17.11 Du découpage d'ε D

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Exercice 17.12 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ croissante. On suppose qu'il existe $a > 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(ax)}{f(x)} = 1$. Montrer alors que pour tout $b > 0$, $\dfrac{f(bx)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. D

Exercice 17.13 *On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable s'il est équipotent à une partie de* **N**, *et on rappelle (cf DM9) qu'une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.* TD
Montrer que si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est croissante, alors l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

► Continuité

Exercice 17.14 Soient f et g les deux fonctions définies par **F**

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Étudier la continuité des fonctions f, g, $g \circ f$ et $f \circ g$ sur $[0, 2]$.

Exercice 17.15 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs réelles, telle que $|f|$ soit constante. Prouver que f est constante. **AD**

Exercice 17.16 Déterminer toutes les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, continues en 0 et telles que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2x) = f(x)$. **AD**

Exercice 17.17 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction polynomiale de degré impair. Montrer que f possède au moins une racine réelle. Ce résultat est-il encore vrai pour un polynôme de degré pair ? **PD**

Exercice 17.18 Déterminer si les fonctions suivantes peuvent se prolonger par continuité aux bornes de leur ensemble de définition : **PD**

1. $f(x) = (1-x^2)\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
2. $g(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
3. $h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
4. $k(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice 17.19 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction bornée et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Prouver que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbf{R}$. **PD**

Exercice 17.20 Un (très bon) skieur de fond termine les 42km de la Foulée Blanche (course populaire qui a lieu à Autrans dans le Vercors) en 2h. Montrer qu'il existe un intervalle d'une heure dans lequel il a parcouru exactement 21 km. **AD**

Exercice 17.21 Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ croissante, et telle que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Prouver que f est continue. **D**

Exercice 17.22 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe. **AD**

Exercice 17.23 Fonctions 1-lipschitziennes **AD**
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|$ (*on dit que f est 1-lipschitzienne*).

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
2. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est soit vide, soit un intervalle de $\mathbf{R}$.

Exercice 17.24 Montrer qu'une fonction périodique et continue est bornée. **PD**

Exercice 17.25 Divers résultats d'existence de points fixes **AD**

1. Soient $a < b$ deux réels, et soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et décroissante. Prouver que f possède un unique point fixe.
3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^k(a) = a$. Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 17.26 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. Monter que f possède un minimum. **PD**

Exercice 17.27 Continuité et densité **AD**

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{Q}$, $f(x) = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$ qui coïncident sur $\mathbf{Q}$. Montrer que $f = g$.

Exercice 17.28 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $\alpha|x - y| \leqslant |f(x) - f(y)|$. Montrer que f est bijective. **AD**

Exercice 17.29 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ surjective. Montrer que tout $y \in \mathbf{R}$ possède une infinité d'antécédents. **D**

Exercice 17.30 Une équation fonctionnelle (Oral Polytechnique) **TD**
Déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = f(x)f(y)$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 17

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.2

Soit $A \in \mathbf{R}$.
Puisque $(f(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow f(n) > A$.
Mais alors, pour x réel supérieur ou égal à n_0, par croissance de f, $f(x) \geqslant f(n_0) > A$.
Et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.3

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors pour tout $t \geqslant x+1$, $f(x) < f(x+1) \leqslant f(t)$.
Et donc par passage à la limite lorsque $t \to +\infty$, $f(x) < f(x+1) \leqslant 0$.
En particulier, on a bien $f(x) < 0$.
2. Supposons par l'absurde que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et notons $A = f(0)$. Alors il existe $B \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \leqslant B$, $f(t) > f(0)$.
Alors par stricte croissance de f, pour $t > B$, $f(t) > f(B) > f(0)$.
Et donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) > f(0)$. Et en particulier, $f(0) > f(0)$, ce qui est absurde.

Remarque
Si on se contentait de $f(x) < f(t)$, ce qui est vrai pour $t > x$, le passage à la limite ferait tout de même apparaître une inégalité large.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.4

1. Lorsque $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Puisque $\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, par composition de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\dfrac{1}{x} = 0$.
D'autre part, pour tout $x \in \mathbf{R}$ $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et donc $e^{-1} \leqslant e^{\cos x} \leqslant e$.
Et donc[1] $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{\cos x} = 0$.
2. Multiplions par la quantité conjuguée :
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2} = \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-2}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}} = \frac{3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}}.$$
Et donc après multiplication par $\sqrt{x}$, on a
$$\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right) = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}.$$
3. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 \leqslant -\sin x$ et donc par croissance de l'exponentielle, $e^{x-\sin x} \geqslant e^{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin x} = +\infty$.
4. On a, pour tout $x \geqslant 0$, $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$.
Posons alors $X = \dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{2}{X}\ln(1+X) = 2\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)-\ln(1)}{X}$.
Mais nous reconnaissons là le taux d'accroissement de la fonction ln entre 1 et $1+X$, qui tend, lorsque X tend vers 0 vers $\ln'(1) = 1$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 2$.
Et donc par continuité de l'exponentielle, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x = e^2$.
5. Pour $x \in]0,1[$, $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} = 0 \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$.
Et pour $x \in]-1,0[$, $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} = -\dfrac{1}{x} \underset{x\to0^-}{\longrightarrow} +\infty$.
Et donc[2] $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ n'existe pas.
6. Le moyen le plus simple est encore d'appliquer le résultat de l'exercice 5 puisque qu'il s'agit là d'une fonction périodique.

[1] Le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend vers 0.

[2] Les limites à droite et à gauche sont distinctes.

Plus simplement, pour $n \in \mathbf{N}$, $n - \lfloor n \rfloor = 0$, et donc pour $x_n = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $x_n - \lfloor x_n \rfloor = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et pour $y_n = n + \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a $y_n - \lfloor y_n \rfloor = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
On a donc deux suites de limite $+\infty$, dont les images par $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ ne tendent pas vers la même limite. Par la caractérisation séquentielle des limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \lfloor x \rfloor$ n'existe pas.

7. Pour $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$, et donc pour $x > 0$,

$$1 - x < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant 1.$$

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0^+} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.
De même, en changeant le sens des inégalités pour $x < 0$, on arrive à $\lim\limits_{x\to 0^-} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.
Et donc[3], $\lim\limits_{x\to 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

8. On peut raisonner comme à la question précédente, ou plus simplement par produit de limites : $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, et donc $x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = x \times x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \times 1 = 0$.

9. Notons $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, de sorte que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Alors pour tout $n \geqslant 1$, $\cos\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi} + 2n\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2n\pi}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(0) = 1$ par continuité du cosinus en 0.
De même, en posant $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors

$$\cos\left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) = \cos\left(\frac{1}{y_n} + (2n+1)\pi\right) = -\cos\left(\frac{1}{y_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$

Donc $x \mapsto \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Quand $x \to 0$, $x + \frac{1}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$.
On peut prouver que $\varphi : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ réalise une bijection de $]0,1]$ sur $[2,+\infty[$. En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(x_n) = 2n\pi$ possède une unique solution dans $]0,1]$.
Alors $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $\cos\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = \cos(2n\pi) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Mais de même, on peut construire une suite (y_n), qui tend vers 0, et telle que $\cos\left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) = -1$, et donc $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ n'existe pas.
Remarque : on peut même être plus explicite, et construire x_n, puisque

$$\varphi(x_n) = 2n\pi \Leftrightarrow x_n + \frac{1}{x_n} = 2n\pi \Leftrightarrow x_n^2 - 2n\pi x_n + 1 = 0.$$

Il est alors facile de prouver que cette équation possède une unique solution dans $]0,1]$, et l'expression de cette solution prouve alors que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

10. Nous savons[4] que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
Et par conséquent, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$.
Et alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(2x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} \frac{x}{\sin(2x)} = \frac{5}{2}$.

Solution de l'exercice 17.5

Il s'agit d'utiliser la caractérisation séquentielle des limites : supposons par l'absurde que cos possède une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en $+\infty$.

Danger !
Ne pas oublier qu'il faut $x > 0$ pour multiplier par x sans changer le sens des inégalités.

[3] La fonction n'étant pas définie en 0, on ne se préoccupe pas de sa valeur en 0.

Autrement dit
Dans tout intervalle ouvert centré en 0, $x \mapsto \cos\left(x + \frac{1}{x}\right)$ prend la valeur 1.
Ceci implique notamment que si elle admet une limite, celle-ci ne peut valoir que 1.

[4] En faisant apparaître un taux d'accroissement de la fonction sin en 0.

Alors pour toute suite $(u_n)_n$ de réels qui tend vers $+\infty$, $\cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
En particulier, c'est le cas pour $u_n = n\pi$, et donc $\cos(n\pi) = (-1)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Nous savons que ceci est absurde car la suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas convergente, et étant bornée, elle ne peut tendre vers $\pm\infty$.
Et donc cos n'admet pas de limite en $+\infty$.

Alternative

On aurait aussi pu considérer deux suites (u_n) et (v_n) dont on savait que $\cos(u_n)$ et $\cos(v_n)$ avaient des limites différentes.
Par exemple $u_n = 2n\pi$ et $v_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

Solution de l'exercice 17.6

Supposons que f possède une limite $\ell \in \overline{\mathbf{R}}$ en $+\infty$, et soit T une période de f.
Alors, pour $x \in \mathbf{R}$, on a $x + nT \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $f(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x+nT) = f(x)$, et donc par unicité de la limite $f(x) = \ell$.
Et donc f est constante égale à ℓ.

Remarque

Ceci prouve déjà que $\ell \in \mathbf{R}$.

Inversement, il est évident que si f est constante, alors elle possède une limite en $+\infty$.

Solution de l'exercice 17.7

Pour $x_n = n$, on a $f(x_n) = 1$. Puisque $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, une éventuelle limite ne peut qu'être égale à 1.
D'autre part, pour $y_n = n + \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a

$$f(y_n) = \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} = \sqrt{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \geqslant \sqrt{n+\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par la caractérisation séquentielle des limites, si f admettait une limite en $+\infty$, celle-ci devrait être la limite commune à $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$.
Donc f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Solution de l'exercice 17.8

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors, par densité de $\mathbf{Q}$, il existe une suite (x_n) de rationnels qui tend vers a, et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.
De même, par densité de $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$, il existe une suite (y_n) d'irrationnels qui tend vers a, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(y_n) = 0$.
On en déduit[5] donc que $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ n'admet pas de limite en a, et donc n'y est pas continue.
2. Puisque $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ est à valeurs dans $\{0,1\}$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) \leqslant x^2$.
Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) = 0$, et donc $x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ est continue en 0.
En revanche, pour $a \neq 0$, puisque $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue en a, si $x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ admet une limite en a, alors

$$\lim_{x\to a} \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{x^2} \times \lim_{x\to a} x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) = \frac{1}{a^2}\lim_{x\to a} x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x).$$

Et ceci viendrait contredire la question 1, et donc $x \mapsto x^2\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x)$ n'est continue en aucun $a \neq 0$.

[5] C'est encore la caractérisation séquentielle des limites.

Solution de l'exercice 17.9

Pour $k \in \mathbf{N}$, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$f(x+k)-f(x) = f(x+k-1)-f(x+k-1)+f(x+k-1)-f(x+k-2)+\cdots+f(x+1)-f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} k\ell.$$

Puisque f est bornée au voisinage de $+\infty$, il existe $M \in \mathbf{R}$ et $A \in \mathbf{R}_+$ tels que pour $x > A$, $|f(x)| \leqslant M$.
Et en particulier, pour $x, y \geqslant A$, $|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x)| + |f(y)| \leqslant 2M$.
Et donc pour $k \in \mathbf{N}$, et $x \in \mathbf{R}$, $|f(x+k) - f(x)| \leqslant 2M$, si bien que par passage à la limite $|k\ell| \leqslant 2M$.
Donc pour $k \in \mathbf{N}^*$, $|\ell| \leqslant \dfrac{2M}{k}$. En passant à la limite lorsque $k \to +\infty$, il vient $|\ell| \leqslant 0$, et donc $\ell = 0$.

Solution de l'exercice 17.10

Soit $c \in]a,b[$. Prouvons que f est continue en c.
Par le théorème de la limite monotone, f admet des limites à droite et à gauche en c.
Notons donc $f(c^-) := \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ et $f(c^+) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ ces limites.
Nous savons alors que $f(c^-) \leqslant f(c) \leqslant f(c^+)$.
Il s'agit donc de prouver que $f(c^+) = f(c^-) = f(c)$, ce qui impliquera alors que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, et donc que f est continue.
Raisonnons par l'absurde, et supposons par exemple que $f(c^+) > f(c)$.
Soit alors $y \in]f(c), f(c^+)[$, prouvons que y n'admet pas d'antécédent par f.

Si $x \leqslant c$, alors $f(x) \leqslant f(c) < y$.
Et puisque $f(c^+) = \inf\limits_{t\in]c,b]} f(t)$, alors pour tout $x \in]c,b]$, $f(x) \geqslant f(c^+) > y$.
Donc y n'admet pas d'antécédent par f, contredisant la surjectivité de f.
Et donc $f(c) = f(c^+)$.

Sur le même principe, on prouve que $f(c^-) = f(c)$.
Enfin, il faudrait traiter à part les cas $c = a$ et $c = b$, où il suffit de prouver que $f(a^+) = f(a)$ et $f(b^-) = f(b)$, ce qui se fait comme ci-dessus.
En conclusion, pour tout $c \in]a,b[$, f est continue en c, et donc f est continue sur $[a,b]$.

Solution de l'exercice 17.11

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est croissante, $f(x+1) - f(x) \geqslant 0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = 0$, il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que pour $x \geqslant A$, $0 \leqslant f(x) - f(x-1) \leqslant \varepsilon$.
En particulier, pour $x \geqslant A$, et $k \in \mathbf{N}$ tel que $x - k \geqslant A$, on a

$$0 \leqslant f(x-k) - f(x-k-1) \leqslant \varepsilon.$$

En sommant toutes ces inégalités pour k allant de 0 à n, où $n = \lfloor x - A \rfloor$, il vient après télescopage

$$0 \leqslant f(x) - f(x-n-1) \leqslant (n+1)\varepsilon.$$

Soit encore

$$0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x-n-1)}{x} + \frac{(n+1)\varepsilon}{x} \leqslant \frac{f(x-n-1)}{x} + \varepsilon.$$

Puisque nous avons choisi pour n le plus grand entier tel que $x - n \geqslant A$, alors $x - n - 1 < A$ et donc par croissance de f, $f(x-n-1) \leqslant f(A)$.
On en déduit donc que $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{f(A)}{x} + \varepsilon$.
Et donc pour $x \geqslant \max\left(A, \frac{f(A)}{\varepsilon}\right)$, on a $0 \leqslant \dfrac{f(x)}{x} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon$.
Et par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

Solution de l'exercice 17.12

Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\frac{f(a^n x)}{f(x)} = \frac{f\left(a \cdot a^{n-1}x\right)}{f(a^{n-1}x)} \frac{f(a\cdot a^{n-2}x)}{f(a^{n-2}x)} \cdots \frac{f(ax)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

> ⚠ Attention !
> Ici, à n fixé, nous avons fait le produit d'un nombre **fini et fixé** de limites, il n'y a pas de problème.

Mais alors, pour $n < 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(a^n x)}{f(x)} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{f(X)}{f(a^{-n}X)} = 1$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(a^n x)}{f(x)} = 1$. Soit alors $n = \left\lfloor \dfrac{\ln b}{\ln a} \right\rfloor$, de sorte que $a^n \leqslant b < a^{n+1}$.
Alors par croissance de f, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f(a^n x) \leqslant f(bx) \leqslant f(a^{n+1}x)$ et donc

$$\frac{f(a^n x)}{x} \leqslant \frac{f(bx)}{x} \leqslant \frac{f(a^{n+1}x)}{x}.$$

Donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(bx)}{x} = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.13

Rappelons que f étant croissante, en tout point elle possède une limite à gauche et une limite à droite.
Et donc f est discontinue en un réel a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $E_n = \{x \in]0,1[\mid \lim\limits_{t\to x^+} f(t) - \lim\limits_{x\to x^+} f(t) > \frac{1}{n}\}$.
Soit alors k un entier supérieur strictement à $n(f(1)-f(0))$.
Alors E_n est fini de cardinal au plus k. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $x_1 > x_2 > \cdots > x_k$ des points distincts de E_n.
Alors on a $f(1) \geqslant \lim\limits_{t\to x_1^+} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_1^-} f(x) + \frac{1}{n}$.
Mais $\lim\limits_{x\to x_1^-} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_2^+} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_2^-} f(x) + \frac{1}{n}$, si bien que $f(1) \geqslant \lim\limits_{x\to x_2^-} f(x) + \frac{2}{n}$.
De proche en proche, on arrive à $f(1) \geqslant \lim\limits_{x\to x_k^-} f(x) + \frac{k}{n} \geqslant f(0) + \frac{k}{n}$.
Et donc $f(1) - f(0) \geqslant \frac{k}{n} > f(1) - f(0)$, ce qui est absurde.

Donc E_n est fini, et ce quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$.
Donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}^*} E_n$ est au plus dénombrable, puisqu'union d'ensembles dénombrables.
Mais cette union est en fait

$$\left\{x \in]0,1[\mid \exists n \in \mathbf{N}^*, \lim_{t\to x^+} f(t) > \lim_{x\to x^-} f(t)\right\} = \left\{x \in]0,1[\mid \lim_{t\to x^+} f(t) > \lim_{t\to x^-} f(t)\right\} = \left\{x \in]0,1[\mid f \text{ n'est pas continue en } x\right\}.$$

Intuition
Ce que nous venons de prouver, c'est que dans $]0,1[$ il ne peut pas y avoir trop de discontinuités «trop grandes».

Donc dans l'intervalle $]0,1[$, f a un nombre de points de discontinuité en plus dénombrable.

Le même raisonnement prouve que pour tous réels $a < b$, l'ensemble des points de discontinuité de f dans l'intervalle $]a,b[$ est au plus dénombrable.
En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F_n = \{x \in]-n,n[\mid f \text{ n'est pas continue en } x\}$ est au plus dénombrable.
Et donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}^*} F_n$ est au plus dénombrable.
Mais cette union est l'ensemble des réels x tels que f ne soit pas continue en x.

Ainsi, l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Remarque : notons que ceci ne vaut plus pour une fonction qui n'est pas monotone, et qu'il existe des fonctions discontinues en tout réel, et donc dont l'ensemble des points de discontinuité n'est pas dénombrable[6].

[6] Car $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.14

Pour f, il suffit de constater que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \neq f(1)$, donc f n'est pas continue[7] en 1.
De même, g n'est pas continue en 1.

Pour $x \in [0,2]$, on a $g(f(x)) = x-1$ et $f(g(x)) = \begin{cases} 2-x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x-1 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$.
Il est évident que $g \circ f$ est continue, et on prouve aisément que $f \circ g$ ne l'est pas en 1.

[7] Mais on prouverait qu'elle est continue à droite.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.15

Supposons au contraire que f ne soit pas constante, et soient alors $a \neq b$ deux valeurs distinctes prises par f.

Puisque $|f|$ est constante, nécessairement $|a| = |b|$. Puisque de plus $a \neq b$, alors $a \neq 0$ et donc $b = -a$.
Mais alors, par le théorème des valeurs intermédiaires, $f(I)$ est un intervalle, contenant a et b qui sont de signes opposés, donc il contient 0 qui est entre a et b : il existe $t \in I$ tel que $f(t) = 0$ et donc $|f(t)| \neq |a|$.
Ceci contredit donc le fait que $|f|$ soit constante.
Et donc, si $|f|$ est constante, alors f est constante.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.16

Commençons par noter qu'une récurrence triviale prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2^n x) = f(x)$.
Soit $x \in \mathbf{R}$, non nul. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x) = f(2^n 2^{-n} x) = f(2^{-n}x)$.
Or, $2^{-n}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et f étant continue en 0, $f(2^{-n}x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = f(0)$, seules les fonctions constantes sont solution.

Solution de l'exercice 17.17

Soit $f : x \mapsto a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1 x + a_0$, avec $a_{2n+1} \neq 0$.
Alors, lorsque $x \to +\infty$, en factorisant par x^{2n+1}, on prouve que f tend vers $+\infty$ si $a_{2n+1} > 0$ et vers $-\infty$ sinon.

De même, une étude en $-\infty$ prouve que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_{2n+1} > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

Dans les deux cas, les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont de signes opposés, donc par le théorème des valeurs intermédiaires[8], il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

[8] Un polynôme est continu.

Solution de l'exercice 17.18

1. Il faut d'abord déterminer le domaine de définition de f, ce qui nécessite d'étudier le signe de $\dfrac{1+x}{1-x}$.
Or, une étude rapide de cette fonction prouve que $\dfrac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$.
Notons que f est impaire sur $]-1,1[$, et donc il suffit d'étudier le prolongement par continuité en 1.
Or, pour $x \in]0, 1[$, on a

$$f(x) = \underbrace{(1-x^2)}_{\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0}\underbrace{\ln(1+x)}_{\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}\ln(2)} - \underbrace{(1+x)}_{\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 2}(1-x)\ln(1-x).$$

Mais $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = \lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$, et donc on peut prolonger f par continuité en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[-1, 1]$, en posant $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(-1) = 0$.

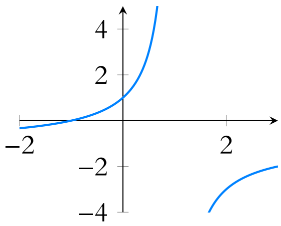


Figure 17.1– $x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x}$

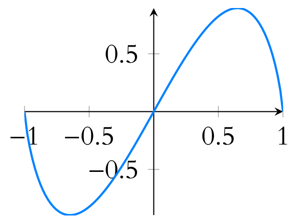


Figure 17.2– La fonction f.

2. La fonction g est définie sur $\mathbf{R}^*$.
Or, puisque $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1$, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ 0 \leqslant |g(x)| \leqslant |x|.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} |g(x)| = 0$.
Soit encore $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$. Et donc on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $\tilde{g}(0) = 0$..

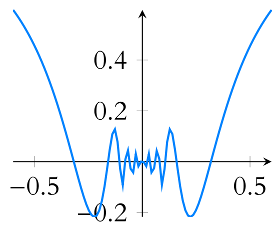


Figure 17.3– La fonction g.

3. La fonction h est définie sur $\mathbf{R}^*$. Or, lorsque $x \to 0$, $-\dfrac{1}{x^2}$ tend vers $-\infty$ et donc par composition de limites, $\lim x \to 0 e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.
Il est donc possible de prolonger par continuité h en 0 en posant $\tilde{h}(0) = 0$.

4. Cette fois lorsque x tend vers 0 par la gauche, $-\dfrac{1}{x} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$. Et donc $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$.
Donc k ne peut pas être prolongée par continuité en 0.

Solution de l'exercice 17.19

Puisque f est bornée, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|g(x)| \leqslant M$.
Et en particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(g(x))| \leqslant M$.
Donc $f \circ g$ est bornée.

Remarque
L'hypothèse de continuité de g est ici totalement superflue.

D'autre part, g étant continue sur $[-M, M]$, elle y est bornée : il existe $N > 0$ tel que pour tout $x \in [-M, M]$, $|g(x)| \leqslant N$.
Et donc pour $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) \in [-M, M]$, et donc $|g(f(x))| \leqslant N$.
Ainsi, $g \circ f$ est bornée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.20

Notons $f : [0,2] \to \mathbf{R}$ la fonction qui a un temps t associe la distance parcourue par notre skieur depuis entre le départ et t.
On a donc $f(0) = 0$ et $f(2) = 42$.
Les lois de la physique telles que nous les connaissons[9] nous obligent à supposer f continue. Nous pourrions même raisonnablement supposer que f est croissante, mais cela n'est pas indispensable (nous autorisons donc notre skieur à perdre un gant et à revenir en arrière pour le récupérer, ce qui est plutôt sympathique de notre part !).

[9] À ma connaissance, si on sait téléporter des photons, on n'a toujours pas réussi à téléporter un skieur.

Si f est affine, c'est-à-dire que notre skieur a évolué à vitesse constante sur tout le parcours, le résultat est absolument évident : il a parcouru 21 kilomètres dans tout intervalle de temps d'une heure.
S'il est resté sur place la première heure, et a bouclé le 42 kilomètres lors de la deuxième heure, là encore à vitesse constante, alors dans l'intervalle de temps $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, il a parcouru 21 km.
On pourrait ainsi traiter de nombreux cas «à la main».

Astuce

Il n'est pas rare de devoir introduire une fonction auxiliaire à laquelle on applique le TVI.
C'est notamment ce que nous avons régulièrement fait pour prouver l'existence de points fixes, où l'on s'intéressait à $x \mapsto f(x) - x$.

Considérons alors la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x+1) - f(x)$, de sorte que g est la distance parcourue dans l'heure qui commence en x. Il va donc s'agit de prouver qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $g(t) = 21$.
▶ Si $f(1) \geqslant 21$. Alors $g(0) = f(1) - f(0) \geqslant 21$, et $g(1) = f(2) - f(1) = 42 - f(1) < 21$.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g, qui est continue sur $[0,1]$, il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 21$.
▶ Si $f(1) \leqslant 21$. Alors $g(0) = f(1) \leqslant 21$ et $g(1) = f(2) - f(1) = 42 - f(1) \geqslant 21$.
Là encore, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) = 21$.

Et donc dans les deux cas, il existe un intervalle d'une heure dans lequel le skieur a parcouru 21 km.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.21

Soit $a \in \mathbf{R}_+^*$. Puisque f est croissante, par le théorème de la limite monotone, elle admet des limites à gauche et à droite en a. Notons $f(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ et $f(a^-) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.
On a alors $f(a^-) \leqslant f(a) \leqslant f(a^+)$.
De même, g étant décroissante, elle admet des limites à droite et à gauche en a, notons-les $g(a^-)$ et $g(a^+)$.
Et alors $g(a^+) \leqslant g(a) \leqslant g(a^-)$.
Mais la fonction $x \mapsto x$ est continue en a, et admet donc a pour limite à droite et à gauche en a, donc par opération sur les limites[10]

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} xg(x) = a \lim_{x\to a^+} g(x) = ag(a^+).$$

[10] Les opérations usuelles restent évidemment valables pour des limites à gauche ou à droite.

Et de même, $f(a^-) = ag(a^-)$.
Puisque $a > 0$, on a donc $f(a^-) \geqslant f(a^+)$, et comme nous avions déjà l'inégalité dans l'autre sens, $f(a^+) = f(a^-) = f(a)$.
Et donc f est continue en a.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.22

Si x est un point fixe de f, alors $(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$, donc x est un point fixe de $f \circ f$.
Donc déjà, si f admet un point fixe, alors $f \circ f$ admet un point fixe.

Remarque

Notons que la continuité de f ne nous a été d'aucun utilité ici.

Inversement, supposons que f ne possède pas de point fixe. Alors, la fonction $x \mapsto f(x) - x$ est de signe constant. En effet, si elle changeait de signe, par le théorème des valeurs intermédiaires[11], il existerait $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$.
Supposons donc qu'elle soit strictement positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > x$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(f(x)) > f(x) > x$. Et donc $f \circ f$ n'admet pas de point fixe.
De même, si $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) < x$, alors pour tout x, $f(f(x)) < f(x) < x$, et donc $f \circ f$ n'admet pas non plus de point fixe.

[11] Et c'est ici que la continuité de f est indispensable !

Nous avons donc prouvé que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe.

Alternative : supposons que $f \circ f$ possède un point fixe α.
Notons $g : x \mapsto f(x) - x$.
▸ Si $f(\alpha) \geqslant \alpha$, alors $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha \geqslant 0$, et $g(f(\alpha)) = f(f(\alpha)) - f(\alpha) = \alpha - f(\alpha) \leqslant 0$.
Puisque g est continue, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\alpha, f(\alpha)]$ tel que $g(c) = 0$, et donc c est un point fixe de f.

▸ De même, si $\alpha \leqslant f(\alpha)$, alors $g(\alpha) \leqslant 0$ et $g(f(\alpha)) \geqslant 0$, si bien que g s'annule et donc f possède un point fixe.

Solution de l'exercice 17.23

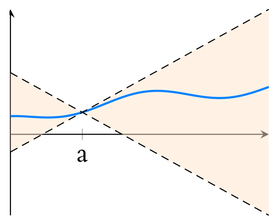
1. Soit $x \in \mathbf{R}$, et soit $\varepsilon > 0$. Alors pour $y \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, on a $|x - y| < \varepsilon$ et donc $|f(x) - f(y)| < |x - y| < \varepsilon$.
C'est la définition de $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$, donc f est continue en x.
Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, f est continue sur $\mathbf{R}$.

> **Autrement dit**
> On peut prendre $\eta = \varepsilon$ dans la définition de limite.

2. Essayons de nous faire une intuition : si f est 1-lipschitzienne, et si $a \in \mathbf{R}$, alors pour tout $x \geqslant a$, $|f(x) - f(a) \leqslant |x - a|$, de sorte que

$$f(a) + a - x \leqslant f(x) \leqslant x - a + f(a).$$

Or, $y = f(a) + a - x$ est l'équation de la droite de coefficient directeur -1 passant par $(a, f(a))$.
Et de même, $y = x - a + f(a)$ est l'équation de la droite de coefficient directeur 1 qui passe par $(a, f(a))$.
Donc si f est 1-lipschitzienne, sa courbe représentative est située entre ces deux droites.



En particulier, si $a < b$ sont deux points fixes de f, c'est-à-dire deux points situés à la fois sur le graphe de f et sur la première bissectrice, alors sur $[a, +\infty[$ le graphe de f est en dessous de la droite passant par $(a, f(a))$ et de coefficient directeur 1. Mais cette droite est la première bissectrice.

Et de même, sur $] - \infty, b]$, le graphe de f est au-dessus de la droite passant par $(b, g(b))$ et de coefficient directeur 1. Mais cette droite est également la première bissectrice.

Et donc sur $[a, b]$, le graphe de f doit coïncider avec la première bissectrice.

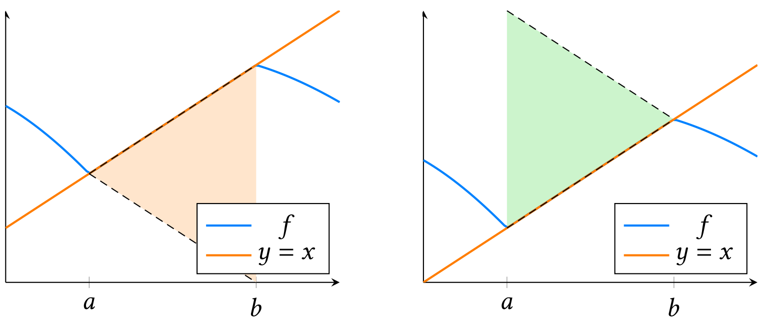


Figure 17.4 – a et b sont deux points fixes de f. Le graphe de f sur $[a, b]$ est donc à la fois dans la zone colorée en orange et celle colorée en vert.

Reste à formaliser tout ceci : soient $a < b$ deux points fixes de f.
Alors pour tout $x \geqslant a$,

$$|f(x) - a| = |f(x) - f(a)| \leqslant |x - a| = x - a$$

et donc $f(x) - a \leqslant x - a \Leftrightarrow f(x) \leqslant x$.
De même, pour tout $x < b$,

$$|f(x) - b| = |f(x) - f(b)| \leqslant |b - x| = b - x$$

si bien que $b - f(x) \leqslant b - x \Leftrightarrow f(x) \geqslant x$.

Et donc pour tout $x \in [a,b]$, $x \leqslant f(x) \leqslant f(x)$, si bien que $f(x) = x$.
Ainsi, entre deux points fixes de f ne se trouvent que des points fixes de f : l'ensemble des points fixes de f est un intervalle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.24

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction T-périodique continue. Alors f est continue sur $[0,T]$, et donc y est bornée : il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in [0,T]$, $|f(x)| \leqslant M$.
Et alors pour $x \in \mathbf{R}$, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $0 \leqslant x - kT < T$.
Et alors $|f(x)| = |f(x-kT)| \leqslant M$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| \leqslant M$, de sorte que f est bornée.

Détails
Prendre $k = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.25

1. Soit $g : \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$.
   Puisque $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \in [a,b]$, alors $f(a) \geqslant a \Leftrightarrow f(a) - a \geqslant 0 \Leftrightarrow g(a) \geqslant 0$.
   De même, $f(b) \leqslant b \Leftrightarrow f(b) - b \leqslant 0 \Leftrightarrow g(b) \leqslant 0$.
   Donc g, qui est une fonction continue car somme de fonctions continues, change de signe.
   Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$.
   Soit encore $f(x_0) - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.
2. Si f est décroissante, alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante, car somme d'une fonction décroissante et d'une fonction strictement décroissante.
   Donc elle s'annule au plus une fois. Nous allons prouver qu'elle s'annule au moins une fois.
   Par décroissance de f, pour $x < 0$, $f(x) \geqslant f(0)$ et donc $g(x) \geqslant f(0) - x$.
   On en déduit donc que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
   De même, pour $x > 0$, $f(x) < f(0)$, et donc $g(x) < f(0) - x$, de sorte que $g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
   Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$.
   Et ainsi, g s'annule exactement une fois sur $\mathbf{R}$, et donc f possède un unique point fixe.
3. Il s'agit une fois encore de prouver que $g : x \mapsto f(x) - x$ s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$.
   Or, on a $(f(a) - a) + (f^2(a) - f(a)) + (f^3(a) - f^2(a)) + \cdots + (f^k(a) - f^{k-1}(a)) = 0$.
   Soit encore $g(a) + g(f(a)) + \cdots + g(f^{k-1}(a)) = 0$.
   La fonction g ne peut donc pas être de signe constant et non nulle entre $\min(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$ et $\max(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))$.
   Étant continue, elle s'annule donc $\left(\text{entre } \min(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a)) \text{ et } \max(a, f(a), \ldots, f^{k-1}(a))\right)$, de sorte que f possède un point fixe.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.26

Soit $A = f(0) + 1$. Puisque f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que pour $x > b$, $f(x) > f(0) + 1$. Notons qu'on a nécessairement $b > 0$.
De même, comme $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour $x < a$, $f(x) > f(0) + 1$.
Et alors a est négatif.
Alors, sur le segment $[a,b]$, la fonction f est continue, et donc[12] possède un minimum $m \leqslant f(0)$, atteint par exemple en $x_0 \in [a,b]$.
Alors pour $x \in \mathbf{R}$, on a :

- soit $x \in [a,b]$, auquel cas $f(x) \geqslant m$ par définition de m ;
- soit $x > b$, mais alors $f(x) > f(0) + 1 > m$;
- soit $x < a$, et alors $f(x) > f(0) + 1 > m$.

Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geqslant m$, de sorte que m est un minorant de f. Et puisqu'il s'agit d'une valeur atteinte par f, c'est le minimum de f sur $\mathbf{R}$.

[12] C'est le théorème des bornes atteintes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 17.27

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Alors, par densité de $\mathbf{Q}$, il existe une suite $(q_n) \in \mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$ telle que $q_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$.
   Et alors par continuité de f, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(q_n) = f(a) \Rightarrow f(a) = 0$.
2. La fonction $f - g$ est continue sur $\mathbf{R}$, et nulle sur $\mathbf{Q}$. Par la question 1, elle est nulle, donc $f = g$.

Solution de l'exercice 17.28

Commençons par noter que pour $x \neq y$ deux réels distincts, $|x-y| \neq 0$, et donc $|f(x)-f(y)| \neq 0$, si bien que $f(x) \neq f(y)$.
En d'autres termes, f est injective.

Mais puisque f est continue et injective sur l'intervalle $\mathbf{R}$, elle est strictement monotone.
Supposons par exemple f strictement décroissante. Alors pour tout $x > 0$, on a $f(x) > f(0)$, et donc $\alpha|x-0| < |f(x)-f(0)|$ si bien que $\alpha x < f(x)-f(0)$.
On en déduit donc que $f(x) > \alpha x + f(0)$, de sorte que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

De même, pour $x < 0$, on a $f(x)-f(0) < 0$, et donc après simplification des valeurs absolues, on obtient $-\alpha x < f(0)-f(x)$, et donc $f(x) < \alpha x + f(0)$, de sorte que $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.
Et donc f est continue, strictement monotone, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur lui-même.

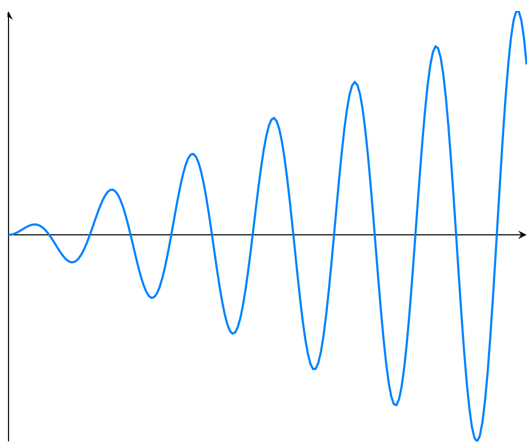
On prouverait de même que si f est strictement décroissante, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et là encore le théorème de la bijection permettrait de conclure.

Solution de l'exercice 17.29

Supposons au contraire qu'il existe $y \in \mathbf{R}$ qui ne possède qu'un nombre fini d'antécédents[13].
Notons alors $x_1 < \cdots < x_n$ ces antécédents. Alors $x \mapsto f(x)-y$ est de signe constant sur $]x_n, +\infty[$. En effet, par le théorème des valeurs intermédiaires, si $x \mapsto f(x)-y$ changeait de signe sur $]x_n, +\infty[$, alors y aurait un antécédent dans $]x_n, +\infty[$, ce qui n'est pas le cas.
Supposons par exemple que pour tout $x > x_n$, $f(x) \geqslant y$.
Notons alors $m = \min\limits_{[0,x_n]} f$, qui existe bien par le théorème des bornes atteintes[14].
Notons que puisque $f(x_n) = y$, $m \leqslant y$.

Alors $m-1$ n'a pas d'antécédent dans $[0, x_n]$ par définition, et ne peut en avoir dans $]x_n, +\infty[$ puisque f n'y prend que des valeurs supérieures à y.
Ceci vient contredire la surjectivité de f.
Et donc tout $y \in \mathbf{R}$ possède une infinité d'antécédents.

Un exemple de fonction vérifiant ces hypothèses est $x \mapsto x\sin(x)$, qui prend bien une infinité de fois chaque valeur y.
Notons que ce théorème devient absolument faux si on remplace $\mathbf{R}_+$ par $\mathbf{R}_+^*$, comme le



prouve le cas de la fonction $\ln : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$n, qui est bien surjective, mais ne prend qu'une seule fois chaque valeur[15].

[13] La surjectivité nous garantit l'existence d'au moins un antécédent.

[14] Qui s'applique ici puisque $[0, x_n]$ est un segment.

Exercice
Le prouver «à la main», sans utiliser ce qui précède.

[15] Elle est bijective.

Solution de l'exercice 17.30

Procédons par analyse-synthèse.
Soit donc f une telle fonction, qu'on peut supposer non nulle[16].
Pour $x = y = 0$, il vient $f(0)^2 = f(0)$, et donc $f(0) \in \{0, 1\}$.
Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(\sqrt{x^2}) = 0$.

[16] La fonction nulle est clairement solution.

Si $x > 0$, on a donc $f(x) = 0$. Et pour $x < 0$, on a, si $y \in \mathbf{R}$ est un réel tel que $f(y) \neq 0$,
$f(x) = \dfrac{f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{f(y)} = \dfrac{f\left(\sqrt{(-x)^2+y^2}\right)}{f(y)} = f(-x)$.
Et donc $f(x) = 0$ pour tout x.

Remarque

f étant non nulle, il existe un tel réel.

On a donc $f(0) = 1$.
Prouvons que f ne s'annule jamais. En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x)^2 = f\left(\sqrt{2}|x|\right)$, et donc si $t > 0$ est un point où f s'annule, alors on a aussi $f\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right) = 0$.
Et alors une récurrence rapide prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}^n}\right) = 0$.
Mais par continuité de f, puisque $\dfrac{t}{\sqrt{2}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient donc $f(0) = 0$, ce qui n'est pas le cas.
Donc f est de signe constant[17], et puisque $f(0) = 1 > 0$, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$.

Soit alors g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $g(x) = \ln\left(f(\sqrt{x})\right)$.
Elle est continue par composition de fonctions continues, et pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2$,

$$g(x^2+y^2) = \ln\left(f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right) = \ln\left(f(x)f(y)\right) = g(x^2) + g(y^2).$$

[17] C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, et lié au fait qu'elle est continue.

Soit encore $g(X+Y) = g(X) + g(Y)$ pour tout $(X, Y) \in \mathbf{R}^2$.
Mais alors il est classique que $g(0) = 0$, que si $g(1) = a$, alors pour tout $x \in \mathbf{N}$, $g(n) = g(1+1+\cdots+1) = g(1)+\cdots+g(1) = na$, puis que pour tout rationnel r, $g(r) = ar$.
Enfin, par continuité de g, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $g(x) = ax$.
Et par conséquent, $f(x) = e^{ax^2}$.

Inversement, toute fonction de la forme $x \mapsto e^{ax^2}$ satisfait bien l'équation de départ.
Donc les solutions sont la fonction nulle et les $x \mapsto e^{ax^2}$, $a \in \mathbf{R}$.