TD 16 : Arithmétique des entiers

▸ Divisibilité, calculs en congruences

Exercice 16.1 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, F

1. $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$
2. $16 \mid 5^n - 1 - 4n$
3. $6 \mid n(n+2)(7n-5)$

Exercice 16.2 Trouver le reste de la division euclidienne de 100^{1000} par 13. F

Exercice 16.3 En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation $x^4 = 3y^2 - 25$, $(x, y) \in \mathbf{N}^2$ ne possède pas de solution. PD

Exercice 16.4 Montrer qu'un entier dont l'écriture en base 10 est la répétition de deux groupes de trois chiffres identiques (comme 817 817) est divisible par 7, par 11 et par 13. D'ailleurs, que vaut le produit $7 \times 11 \times 13$? PD

Exercice 16.5 En utilisant des congruences modulo 3, déterminer tous les nombres premiers p tels que $p^2 + 2$ soit également premier. PD

Exercice 16.6 Soit $n \geqslant 2$, et soient $a, b \in \mathbf{Z}$. Montrer que si $a \equiv b \ [n]$, alors $a^n \equiv b^n \ [n^2]$. PD

Exercice 16.7 Un critère de divisibilité par 11. PD
Soit $n = a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0$ un entier naturel décomposé en base 10 (donc avec $a_0, \dots a_k \in [\![0, 9]\!]$).
Énoncer et prouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_i pour que n soit visible par 11.

Exercice 16.8 Déterminer le dernier chiffre de l'écriture décimale de $7^{3^{11^{17}}}$. AD

Exercice 16.9 (Oral Centrale) PD
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note N le nombre de diviseurs positifs de n et P leur produit. Quelle relation existe-t-il entre n, N et P ?

Exercice 16.10 (Oral ENS) TD
Montrer qu'il existe un multiple de 2019 dont l'écriture décimale ne comporte que le chiffre 3.
Indication : le nombre premier 673 divise 2019.

▸ PGCD, PPCM

Exercice 16.11 Pour chacun des couples (a, b) suivants, déterminer $a \wedge b$, $a \vee b$ et une relation de Bézout. F

1. $(51, 438)$
2. $(720, 1320)$
3. $(151, 77)$

Exercice 16.12 Équations $ax + by = c$ PD

1. On s'intéresse dans cette question à l'équation $18x + 25y = 1$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbf{Z}^2$.
   (a) Déterminer une solution particulière (x_0, y_0).
   (b) Montrer que si (x, y) est solution, on a alors $18(x - x_0) = 25(y_0 - y)$, puis qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $x = 25k + x_0$.
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation.
2. Résoudre les équations $9x + 15y = 3$, $42x + 45y = 6$ et $12x + 30y = 15$.

Exercice 16.13 Soient $(a, b, c) \in \mathbf{Z}^3$, tels que a et b soient premiers entre eux. Montrer que $a \wedge (bc) = a \wedge c$. PD

Exercice 16.14 AD

1. Montrer que si r est le reste de la division euclidienne de a par b, alors $2^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $2^a - 1$ par $2^b - 1$.
2. Montrer que le PGCD de $2^a - 1$ et $2^b - 1$ est $2^{a \wedge b} - 1$.

Exercice 16.15 AD

1. Montrer que pour a, b entiers, $(a + b) \wedge (a \vee b) = a \wedge b$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} a + b = 144 \\ a \vee b = 420 \end{cases}$ d'inconnues $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$.

Exercice 16.16 Soient $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $(a \wedge b)^n = a^n \wedge b^n$. PD

Exercice 16.17 (Banque CCINP, exercice 95) PD

1. Soient $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ premiers entre eux, et soit $c \in \mathbf{N}$.
   Prouver que : $(a \mid c \text{ et } b \mid c) \Leftrightarrow ab \mid c$.
2. On considère le système $(\mathscr{S}) : \begin{cases} x \equiv 6 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{15} \end{cases}$ d'inconnue $x \in \mathbf{Z}$.
   (a) Déterminer une solution particulière x_0 de $(\mathscr{S})$.
   (b) Déterminer toutes les solutions de $(\mathscr{S})$.

Exercice 16.18 Soit $a \in \mathbf{N}^*$, et soit $(F_n)_n$ une suite d'entiers naturels tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = aF_{n+1} + F_n$. PD
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+1} \wedge F_n = F_0 \wedge F_1$.

Exercice 16.19 Une réciproque de Bézout PD
Soient a et b deux entiers non nuls, et soit $d \in \mathbf{N}$ un diviseur commun de a et de b. Montrer que s'il existe deux entiers $(u, v) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $au + bv = d$, alors $d = a \wedge b$.

Exercice 16.20 Retour sur les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité AD
Montrer que pour $a, b \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{U}_a \cap \mathbf{U}_b = \mathbf{U}_{a\wedge b}$.

▸ Nombres premiers et décomposition primaire

Exercice 16.21 Soit $n \geqslant 3$. Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n! + 2$ et $n! + n$. F
En déduire 1000 entiers consécutifs sans aucun nombre premier.

Exercice 16.22 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ n'est pas premier. F

Exercice 16.23 Nombres de Fermat AD

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2^m$.
2. On note à présent $F_n = 2^{2^n} + 1$ (qu'on appelle $n^{\text{ème}}$ nombre de Fermat).
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+1} = F_0 F_1 \cdots F_n + 2$.
   (b) En déduire que pour (m, n) distincts, F_m et F_n sont premiers entre eux.

Exercice 16.24 Inégalité ultramétrique PD
Soit p un nombre premier et soit $(a, b) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Montrer que $v_p(a+b) \geqslant \min(v_p(a), v_p(b))$. Prouver que si $v_p(a) \neq v_p(b)$, alors cette inégalité est en fait une égalité.

Exercice 16.25 En utilisant le petit théorème de Fermat, prouver que pour tout $a \in \mathbf{Z}$, $a^{13} \equiv a \quad [2730]$. AD

Exercice 16.26 Soient p, q deux nombres premiers distincts. Prouver que $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \ [pq]$. AD

Exercice 16.27 Montrer que la suite $(2^n - 3)_n$ contient une infinité de termes divisibles par 5, une infinité de termes divisibles par 13, mais aucun divisible par 5×13. D

Exercice 16.28 Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soit $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n, et soient $p_1, \dots, p_k$ les facteurs premiers de n. Exprimer $d(n)$ en fonction des $v_{p_i}(n)$, $i \in [\![1, k]\!]$. PD

Exercice 16.29 Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient a, b deux entiers premiers entre eux. PD
On suppose que le produit ab est une puissance $n^{\text{ème}}$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbf{Z}$ tel que $ab = c^n$.
Montrer que a et b sont déjà eux-mêmes des puissances $n^{\text{èmes}}$.

Exercice 16.30 Autour de la valuation p-adique d'une factorielle AD
Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $100! = 2^{97}(2n + 1)$.

Exercice 16.31 Soient $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ avec $a \wedge b = 1$ et soit $k \geqslant 2$. Montrer que ab est une puissance $k^{\text{ème}}$ (c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $ab = n^k$) si et seulement si a et b sont des puissances $k^{\text{èmes}}$. AD
Ce résultat reste-t-il vrai si a et b sont dans $\mathbf{Z}$?

Exercice 16.32 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \left\lfloor (1 + \sqrt{3})^{2n+1} \right\rfloor$. D

1. Prouver que $u_n = (1 + \sqrt{3})^{2n+1} + (1 - \sqrt{3})^{2n+1}$.
2. Déterminer la valuation 2-adique de u_n

Exercice 16.33 Théorème de Wilson D

1. Soit p un nombre premier.
   (a) Montrer que $\forall x \in [\![1, p-1]\!]$, $\exists! y \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $xy \equiv 1 \quad [p]$.

(b) En déduire que $(p-1)! \equiv -1 \quad [p]$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, tel que $(n-1)! \equiv -1 \quad [n]$. Montrer que n est premier.

*On a donc prouvé que $p \in \mathbf{N}^*$ est premier **si et seulement si** $(p-1)! \equiv -1 \quad [p]$.*

Exercice 16.34 Théorème de Kürschák (Oral ENS)

TD

Déterminer pour quels entiers $n \geqslant m \geqslant 1$ le nombre $H_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k}$ est un entier.

Indication : utiliser les valuations 2-adiques des entiers $k \in [\![m, n]\!]$.

Exercice 16.35 Ordre d'un élément dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

D

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On se place dans le groupe $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \langle \overline{1} \rangle$, le sous-groupe engendré par la classe de congruence de 1.
2. Soit $\overline{a} \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Montrer que $d = n \wedge a$ ne dépend pas du choix d'un représentant de $\overline{a}$, et que $\langle \overline{a} \rangle = \langle \overline{d} \rangle$. Quel est le cardinal de $\langle \overline{a} \rangle$?