TD 14 : Calcul matriciel

En l'absence de précisions, la lettre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

▸ Somme, produit de matrices

Exercice 14.1 Si vous découvrez le produit matriciel F

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AB, AC, BC, DA, CD et DC.

Exercice 14.2 Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, qui commutent, est encore nilpotente. PD

Exercice 14.3 Multiplication par une matrice élémentaire AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On rappelle que pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, calculer $[AE_{i,j}]_{k,\ell}$ et $[E_{i,j}A]_{k,\ell}$. Comment décrivez-vous en termes simples les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$?
2. En déduire la matrice $E_{i,j}E_{k,\ell}$. *On pourra être amenés à distinguer plusieurs cas.*

Exercice 14.4 Matrices stochastiques PD

Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite stochastique si :

- $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geqslant 0$
- $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1.$

1. On note V le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ à coefficients positifs est stochastique si et seulement si $AV = V$.
2. Montrer que si A et B sont deux matrices stochastiques, alors $\frac{1}{2}(A+B)$ et AB le sont aussi.

Exercice 14.5 AD

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ commute avec D si et seulement si elle est diagonale.
2. Déterminer $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ AM = MA\}$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent à toutes les autres matrices (ensemble appelé *le centre de* $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).

Exercice 14.6 Nilpotence des matrices triangulaires strictes AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $k \geqslant 0$, on note $\mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i+k > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

1. Montrer que pour $k, \ell \geqslant 0$, si $A \in \mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{T}_\ell^+(\mathbf{K})$, alors $AB \in \mathcal{T}_{k+\ell}^+(\mathbf{K})$.
2. En déduire qu'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), à coefficients diagonaux nuls est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

▸ Puissances de matrices

Exercice 14.7 Calculer les puissances des matrices suivantes : PD

1. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 14.8 Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients valent 1. PD

1. Calculer J^2. En déduire J^k, pour tout $k \in \mathbf{N}$.

2. En déduire $(J+\lambda I_n)^k$, pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $k \in \mathbf{N}$.
3. Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 14.9 Soit $A = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\theta \in]0,\pi[$. PD

1. Montrer que $A^2 = 2\cos(\theta)A - I$.
2. En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbf{N}, A^n = a_n A + b_n I$.
   Donner l'expression de a_{n+1} et de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Montrer que (a_n) est linéaire récurrente d'ordre 2, déterminer son terme général et en déduire l'expression de A^n.

▶ Trace, transposée

Exercice 14.10 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent. F

Exercice 14.11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0$ si et seulement si $A = 0_n$. PD

Exercice 14.12 Montrer qu'il n'existe pas de couple $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$. PD

Exercice 14.13 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$. Montrer que A et B sont égales. AD

Exercice 14.14 Montrer par analyse-synthèse que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. AD

▶ Inverse d'une matrice carrée

Exercice 14.15 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant, calculer leur inverse : PD

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.16 Inversibilité à l'aide d'un polynôme annulateur PD
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$, avec $\lambda_0\lambda_p \neq 0$ tels que $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_p A^p = 0_n$. Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction des A^k, $0 \leqslant k \leqslant p-1$.

Exercice 14.17 Inverse d'une matrice diagonale par blocs AD
Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$, $C \in GL_p(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbf{K})$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 14.18 PD

1. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont deux matrices qui commutent, alors pour tout $p \in \mathbf{N}$, $A^p - B^p = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right)$.
2. En déduire que si N est nilpotente, alors $I_n + N$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 14.19 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques. AD

1. Montrer que $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant 0$.
2. En étudiant la fonction $\lambda \mapsto \operatorname{tr}\left((\lambda A + B)^2\right)$, prouver que $\operatorname{tr}(AB)^2 \leqslant \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2)$.

Exercice 14.20 Oral Centrale 2014 D
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ deux matrices qui commutent, avec B nilpotente. Montrer que A est inversible si et seulement si $A+B$ est inversible.

Exercice 14.21 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse D

1. $A = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
2. $B = (F_{i+j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 14.22 Théorème d'Hadamard sur les matrices à diagonale dominante D

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $AX = 0_{n,1}$, et soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$. Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

Correction des exercices du TD 14

Solution de l'exercice 14.2

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent, d'indices de nilpotence respectifs p et q.
Alors $(AB)^p = A^pB^p = 0$. Donc AB est nilpotente, et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à p. On montrerait de même qu'il est inférieur ou égal à q, et donc inférieur ou égal à $\min(p,q)$.
Puisque A et B commutent, par la formule du binôme, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

En particulier, pour $n = p+q$, il vient

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k \underbrace{B^{p+q-k}}_{=0} + \sum_{k=p}^{p+q} \binom{p+q}{k} \underbrace{A^k}_{=0} B^{p+q-k} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Détails
Si $k \leqslant p-1$, alors $p+q-k \geqslant q$, de sorte que $B^{p+q-k} = 0$.

Donc $A+B$ est nilpotente, et son indice de nilpotence est supérieur ou égal à $p+q$.

Solution de l'exercice 14.3

1. Le résultat se comprend bien en «dessinant» les matrices : les colonnes de $E_{i,j}$ sont toutes nulles à l'exception de la $j^{\text{ème}}$.
Donc déjà, toutes les colonnes de $AE_{i,j}$ sont nulles, sauf éventuellement la $j^{\text{ème}}$.
Et alors les coefficients qui se trouvent dans cette $j^{\text{ème}}$ colonne sont ceux de la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.

Détails
Faire le produit «avec les deux mains» pour comprendre pourquoi ce sont bien les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ colonne de A qui apparaissent. C'est lié au fait que le 1 de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_{i,j}$ est sur la $i^{\text{ème}}$ ligne.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1,i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2,i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,i} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Plus formellement : pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[AE_{i,j}]_{k,\ell} = \sum_{p=1}^{n} a_{k,p} \left[E_{i,j}\right]_{p,\ell}.$$

Ce coefficient est nul si $\ell \neq j$, car tous les $\left[E_{i,j}\right]_{p,\ell}$ sont nuls.
Et pour $\ell = j$, alors tous les $[E_{,j}]_{p,\ell}$ sont nuls sauf lorsque $p = i$, et donc il ne reste que le terme correspondant à $p = i$ dans la somme ci-dessus, si bien que $[AE_{i,j}]_{k,j} = a_{k,i}$.
Et donc toutes les colonne de $AE_{i,j}$ sont nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$, égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.

Sur le même principe, on a $\left[E_{i,j}A\right]_{k,\ell} = \sum_{p=1}^{n} \left[E_{i,j}\right]_{k,p} a_{p,\ell}$, qui vaut 0 si $k \neq i$.
Et pour $k = i$, $\left[E_{i,j}A\right]_{i,\ell} = a_{j,\ell}$.
Donc toutes les lignes de $E_{i,j}A$ sont nulles, à l'exception de la $i^{\text{ème}}$ qui est la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.

Alternative : souvenons-nous que $[E_{i,j}]_{p,q} = \delta_{i,p}\delta_{j,q}$.
On a donc, pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$\left[AE_{i,j}\right]_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{p,k}[E_{i,j}]_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{p,k}\delta_{i,k}\delta_{j,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq q \\ [A]_{p,i} & \text{si } j = q \end{cases}$$

Donc seule la $j^{\text{ème}}$ colonne de $AE_{i,j}$ est nulle, et son coefficient de la $p^{\text{ème}}$ ligne est le coefficient (p,i) de A.
On retrouve bien le fait que la $j^{\text{ème}}$ colonne de $AE_{i,j}$ soit la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.
On procède de même pour $E_{i,j}A$.

2. On a donc $E_{i,j}E_{k,\ell}$ qui est nulle, à l'exception de la $i^{\text{ème}}$ qui est la $j^{\text{ème}}$ de $E_{k,\ell}$.
Celle-ci est nulle si $j \neq k$, et sinon c'est la ligne dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $\ell^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
En résumé, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, où $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est le symbole de Kronecker.

Solution de l'exercice 14.4

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice à coefficients positifs.
Alors, on a

$$AV = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + a_{1,2} + \dots + a_{1,n} \\ a_{2,1} + a_{2,2} + \dots + a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,1} + a_{n,2} + \dots + a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Et donc $AV = V$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
Par conséquent, A est stochastique si et seulement si $AV = V$.
Alternative : si vous n'êtes pas convaincus par les produits avec des pointillés[1], il est également possible, mais plus fastidieux, d'utiliser «proprement» la formule du produit matriciel : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

[1] Mais il faudrait que vous le soyez rapidement !

$$(AV)_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}V_{j,1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$

Et donc $AV = V$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(AV)_{i,1} = V_{i,1} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

2. Il est clair que si A et B sont stochastiques, alors $\frac{1}{2}(A+B)$ est à coefficients positifs.
Et alors $\frac{1}{2}(A+B)V = \frac{1}{2}(AV+BV) = \frac{1}{2}(V+V) = V$.
Donc $\frac{1}{2}(A+B)$ est stochastique.
De même, les coefficients de AB sont tous positifs, puisque, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{i,k}}_{\geqslant 0} \underbrace{b_{k,j}}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

Et alors $ABV = A(BV) = AV = V$, donc AB est stochastique.
Alternative : si on ne pense pas à utiliser la question 1, on peut tout de même s'en sortir : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n}[AB]_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{k,j}}_{=1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.5

1. Notons $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Alors, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on a

$$[AD]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[D]_{k,j} = a_{i,j}\lambda_j.$$

Et d'autre part, $[DA]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}[D]_{i,k}a_{k,j} = \lambda_i a_{i,j}$.
Donc si $AD = DA$, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\lambda_i a_{i,j} = \lambda_j a_{i,j} \Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j)a_{i,j} = 0$.
Si $i \neq j$, puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a donc $a_{i,j} = 0$.
Autrement dit, les coefficients hors diagonale de A sont nuls : A est une matrice diagonale.
Inversement, deux matrices diagonales commutant toujours entre elles, si A est diagonale, alors elle commute avec D.
Donc A commute à D si et seulement si elle est diagonale.

Détails
Les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de D sont tous nuls, à l'exception du coefficient diagonal (d'indice (j, j)), qui vaut λ_j).

2. Nous savons que I_n commute à toute matrice, et plus généralement que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, λI_n commute à toute matrice.
Nous allons prouver que seules les matrices scalaires commutent à toutes les matrices.

Soit donc M une matrice du centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'est-à-dire commutant à toute matrice carrée.
Par la question 1, nous savons déjà que M est diagonale, puisqu'elle doit en particulier commuter à $\mathrm{Diag}(1, 2, 3, \cdots, n)$.
À l'aide du même calcul que dans la question 1, on a donc, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$[AM]_{i,j} = [MA]_{i,j} \Leftrightarrow [A]_{i,j}[M]_{j,j} = [M]_{i,i}[A]_{i,j}.$$

En particulier, ceci est vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
Et alors on obtient, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $[M]_{i,i} = [M]_{j,j}$: tous les coefficients diagonaux de A sont égaux.
Et donc il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.

Ainsi, le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est exactement $\{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbf{K}\}$, l'ensemble des matrices scalaires.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.6

1. Soit donc $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{T}_\ell^+(\mathbf{K})$.
Alors pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $[AB]_{i,j} = \sum_{p=1}^{n} a_{i,p}b_{p,j}$.
Supposons que $i + k + \ell > j$. Alors

$$[AB]_{i,j} = \sum_{p=1}^{i+k-1} \underbrace{a_{i,p}}_{=0} b_{p,j} + \sum_{p=i+k}^{n} a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{p=i+k}^{n} a_{i,p}b_{p,j}.$$

Mais puisque $j - \ell < i + k$, pour $p \geqslant i + k$, $p > j - \ell \Leftrightarrow p + \ell > j$, et donc $b_{p,j} = 0$.
Donc $[AB]_{i,j} = 0$.
Ainsi, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, i + k + \ell > j \Rightarrow [AB]_{i,j} = 0$, et donc $AB \in \mathcal{T}_{k+\ell}^+(\mathbf{K})$.

2. Supposons que A soit triangulaire supérieure. Alors elle est dans $\mathcal{T}_0^+(\mathbf{K})$.
Si de plus sa diagonale est nulle, alors elle est dans $\mathcal{T}_1^+(\mathbf{K})$.
En effet, pour $i+1>j$, on a soit $i>j$, et alors $[A]_{i,j}=0$ car A est triangulaire supérieure, soit $i=j$, et alors $[A]_{i,j}=[A]_{i,i}=0$ car les coefficients diagonaux de A sont nuls.
Par ce qui précède, on a donc $A^2=AA\in\mathcal{T}_2^+(\mathbf{K})$.
Puis $A^3=A^2A\in\mathcal{T}_{2+1}^+(\mathbf{K})=\mathcal{T}_3^+(\mathbf{K})$.
Une récurrence facile prouve alors que $A^n\in\mathcal{T}_n^+(\mathbf{K})$.
Mais alors pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $i+n\geqslant n+1>j$, et donc $[A^n]_{i,j}=0$, de sorte que $A^n=0_n$.
Donc A est bien nilpotente, et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

Dans le cas où A est triangulaire inférieure, alors $A^\top$ est triangulaire supérieure, à diagonale nulle, et donc $(A^\top)^n=0$.
Or $(A^\top)^n=(A^n)^\top=0_n$, donc de même, $A^n=0_n$, et donc A est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

Rappel
L'indice de nilpotence est **le plus petit** entier k tel que $A^k=0_n$.
Donc si on dispose d'une puissance de A qui est nulle, cette puissance est nécessairement inférieure ou égale à l'indice de nilpotence.

Remarque
Nous prouverons plus tard qu'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ a nécessairement un indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

Solution de l'exercice 14.7

Par commodité, nous noterons à chaque fois A la matrice dont on cherche à calculer les puissances.

1. Le calcul des premières puissances de A prouve que

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos(2\theta)&-\sin(2\theta)\\\sin(2\theta)&\cos(2\theta)\end{pmatrix}\text{ et }A^3=\begin{pmatrix}\cos(3\theta)&-\sin(3\theta)\\\sin(3\theta)&\cos(3\theta)\end{pmatrix}.$$

Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos(n\theta)&-\sin(n\theta)\\\sin(n\theta)&\cos(n\theta)\end{pmatrix}.$$

2. On a $A^2=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$.
Dès lors, il est évident que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $A^{2n}=\left(A^2\right)^n=2^nI_2$.
Et $A^{2n+1}=A^{2n}A=2^nA$.

3. Notons $D=3I_3$ et $T=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}$.
Alors $A=D+T$, et D et T commutent puisqu'une matrice scalaire commute toujours à toute matrice.
On a alors $T^2=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $T^3=0$.
Donc par la formule du binôme de Newton, il vient, pour $n\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}A^n&=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}T^kD^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^2\binom{n}{k}T^k3^{n-k}\\&=3^nI_3+3^{n-1}nT+\frac{n(n-1)}{2}3^{n-2}T^2\\&=\begin{pmatrix}3^n&3^{n-1}n&n3^n+2n(n-1)3^{n-2}\\0&3^n&n3^n\\0&0&3^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4. Nous supposons ici que n est la taille de la matrice A. On a alors

$$A^2=\begin{pmatrix}n-1&0&\dots&0\\0&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&\dots&1\end{pmatrix}.$$

Puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & \dots & n-1 \\ n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (n-1)A$.

Il vient ensuite $A^4 = (n-1)A^2$, puis $A^5 = (n-1)A^3 = (n-1)^2A$, etc.
Une récurrence prouve alors que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$A^{2k} = (n-1)^{k-1}A^2 = \begin{pmatrix} (n-1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)^{k-1} & \dots & (n-1)^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (n-1)^{k-1} & \dots & (n-1)^{k-1} \end{pmatrix}$$

et

$$A^{2k+1} = (n-1)^k A = \begin{pmatrix} 0 & (n-1)^k & \dots & (n-1)^k \\ (n-1)^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)^k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.8

1. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = nJ.$$

On en déduit que $J^3 = J^2J = nJ^2 = n^2J$, puis $J^4 = J^3J = n^2J^2 = n^3J$, et une récurrence facile prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $J^k = n^{k-1}J$.

2. Si $\lambda = 0$, nous venons de répondre.
Supposons donc $\lambda \neq 0$.
Puisque I_n commute à toute matrice, elle commute en particulier avec J et donc la formule du binôme de Newton s'applique :

$$\begin{aligned}(J+\lambda I_n)^k &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}J^i\lambda^{k-i}I_n \\ &= \lambda^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}n^{i-1}\lambda^{k-i}\right)J \\ &= \lambda^k I_n + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}n^{i}\lambda^{k-i}\right)J \\ &= \lambda^k I_n + \frac{1}{n}\left((n+\lambda)^k - \lambda^k\right)J.\end{aligned}$$

Détails
On a reconnu un binôme auquel manque un terme.

3. Ici, on a $A = 2\begin{pmatrix} 5/2 & 1 & 1 \\ 1 & 5/2 & 1 \\ 1 & 1 & 5/2 \end{pmatrix}$, donc on prend $n = 3$, et $\lambda = 3/2$. Et donc pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}A^k &= 2^k\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k I_3 + \frac{1}{3}\left(\left(3+\frac{3}{2}\right)^k - \left(\frac{3}{2}\right)^k\right)J\right) = 3^kI_3 + \frac{1}{3}\left(9^k - 3^k\right)J \\ &= \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{k-1}+3\cdot 9^{k-1} & 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} & 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} \\ 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} & 2\cdot 3^{k-1}+3\cdot 9^{k-1} & 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} \\ 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} & 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} & 2\cdot 3^{k-1}+3\cdot 9^{k-1} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.9

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 4\cos^2(\theta)-1 & -2\cos(\theta) \\ 2\cos(\theta) & -1 \end{pmatrix} = 2\cos\theta A - I_2$.

2. Pour $n=0, n=1, n=2$, la propriété est évidemment vérifiée, avec

$$a_0 = 0, b_0 = 1, a_1 = 1, b_1 = 0 \text{ et } a_2 = 2\cos(\theta), b_2 = -1.$$

Par récurrence sur n : supposons que $A^n = a_n A + b_n I_2$. Alors

$$A^{n+1} = A^n A = (a_n A + b_n I)A = a_n A^2 + b_n A = a_n(2\cos\theta A - I_2) - b_n A = (2a_n\cos(\theta) + b_n)A - a_n I_2.$$

Et donc $a_{n+1} = 2\cos(\theta)a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$.

3. On a donc, pour $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 2\cos(\theta)a_n - a_{n-1}$.
La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, et son équation caractéristique est $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta)4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2\theta < 0$.
Donc l'équation possède deux racines complexes conjuguées, qui sont

$$r_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \text{ et } r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\theta}.$$

Donc il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta).$$

Or, $a_0 = \lambda = 0$ et $a_1 = \mu\sin(\theta) = 1$. Donc $a_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$.
On en déduit que

$$A^n = \begin{pmatrix} 2a_n\cos\theta + b_n & -a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & -a_n \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} \sin((n+1)\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & -\sin((n-1)\theta) \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 14.10

On a $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA$, qui est donc égale à AB si et seulement si A et B commutent.

Solution de l'exercice 14.11

Il est évident que si A est la matrice nulle, alors $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0$.
D'autre part, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^\top A) &= \sum_{i=1}^n \left[A^\top A\right]_{i,i} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left[A^\top\right]_{i,j}[A]_{j,i} \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{j,i}a_{j,i} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2.\end{aligned}$$

Et donc $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2 = 0$.
Mais une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, donc $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = 0$.
Soit si et seulement si A est la matrice nulle.

Solution de l'exercice 14.12

Quelles que soient les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0 \neq n = \operatorname{tr}(I_n).$$

Donc on ne peut avoir $AB - BA = I_n$.

Plus généralement
Le même résultat reste valable si on remplace I_n par n'importe quelle matrice de trace non nulle.