TD 14 : Calcul matriciel

En l'absence de précisions, la lettre $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

▶ Somme, produit de matrices

Exercice 14.1 Si vous découvrez le produit matriciel F

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits AB, AC, BC, DA, CD et DC.

Exercice 14.2 Montrer que si A, B sont deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, qui commutent, alors $A+B$ et AB sont encore nilpotentes. PD

Exercice 14.3 Multiplication par une matrice élémentaire AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On rappelle que pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, calculer $[AE_{i,j}]_{k,\ell}$ et $[E_{i,j}A]_{k,\ell}$.
   Comment décrivez-vous en termes simples les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$?
2. En déduire la matrice $E_{i,j}E_{k,\ell}$. *On pourra être amenés à distinguer plusieurs cas.*

Exercice 14.4 AD

1. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ commute avec D si et seulement si elle est diagonale.
2. Déterminer $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \mid \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}),\ AM = MA\}$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent à toutes les autres matrices (ensemble appelé *le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*).

Exercice 14.5 Nilpotence des matrices triangulaires strictes AD

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour $k \geqslant 0$, on note $\mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i+k > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

1. Montrer que pour $k, \ell \geqslant 0$, si $A \in \mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{T}_\ell^+(\mathbf{K})$, alors $AB \in \mathcal{T}_{k+\ell}^+(\mathbf{K})$.
2. En déduire qu'une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure), à coefficients diagonaux nuls est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

▶ Puissances de matrices

Exercice 14.6 Calculer les puissances des matrices suivantes : PD

1. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 14.7 Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients valent 1. PD

1. Calculer J^2. En déduire J^k, pour tout $k \in \mathbf{N}$.
2. En déduire $(J+\lambda I_n)^k$, pour $\lambda \in \mathbf{K}$ et $k \in \mathbf{N}$.
3. Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 14.8 Soit $A = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, avec $\theta \in]0,\pi[$. PD

1. Montrer que $A^2 = 2\cos(\theta)A - I$.
2. En déduire qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\forall n \in \mathbf{N}, A^n = a_nA + b_nI$.
   Donner l'expression de a_{n+1} et de b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Montrer que (a_n) est linéaire récurrente d'ordre 2, déterminer son terme général et en déduire l'expression de A^n.

▸ Trace, transposée

Exercice 14.9 Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$. F

Exercice 14.10 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0$ si et seulement si $A = 0_n$. PD

Exercice 14.11 Montrer qu'il n'existe pas de couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$. PD

Exercice 14.12 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telles que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$. Montrer que $A = B$. AD

Exercice 14.13 Montrer par analyse-synthèse que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. AD

Exercice 14.14 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices symétriques. AD

1. Montrer que $\operatorname{tr}(A^2) \geqslant 0$.
2. En étudiant la fonction $\lambda \mapsto \operatorname{tr}\left((\lambda A + B)^2\right)$, prouver que $\operatorname{tr}(AB)^2 \leqslant \operatorname{tr}\left(A^2\right) \operatorname{tr}\left(B^2\right)$.

Exercice 14.15 **(Oral Mines 2023)** AD
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $AB = 0_n$. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, $\operatorname{tr}\left((A+B)^k\right) = \operatorname{tr}\left(A^k\right) + \operatorname{tr}\left(B^k\right)$.

▸ Inverse d'une matrice carrée

Exercice 14.16 Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et le cas échéant, calculer leur inverse : PD

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 14.17 **Inversibilité à l'aide d'un polynôme annulateur** PD
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$, avec $\lambda_0\lambda_p \neq 0$ tels que $\lambda_0 I_n + \lambda_1 A + \lambda_2 A^2 + \cdots + \lambda_p A^p = 0_n$. Montrer que A est inversible, et exprimer son inverse en fonction des A^k, $0 \leqslant k \leqslant p-1$.

Exercice 14.18 **Inverse d'une matrice triangulaire par blocs** AD
Soit $A \in GL_n(\mathbf{K})$, $C \in GL_p(\mathbf{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.
Montrer que la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbf{K})$ est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice 14.19 PD

1. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont deux matrices qui commutent, alors pour tout $p \in \mathbf{N}$, $A^p - B^p = (A-B)\left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\right)$.
2. En déduire que si N est nilpotente, alors $I_n + N$ est inversible, et donner son inverse.

Exercice 14.20 **(Oral Centrale 2014)** D
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ deux matrices qui commutent, avec B nilpotente. Montrer que A est inversible si et seulement si $A+B$ est inversible.

Exercice 14.21 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse D

1. $A = (\min(i,j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
2. $B = (F_{i+j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ où $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 14.22 **Théorème d'Hadamard sur les matrices à diagonale dominante** D

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $AX = 0_{n,1}$, et soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_i |x_i|$. Montrer que $x_{i_0} = 0$, et en déduire que A est inversible.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 14

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.2

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui commutent, d'indices de nilpotence respectifs p et q.
Alors puisque A et B commutent, $(AB)^p = A^pB^p = 0_n$. Donc AB est nilpotente, et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à p. On montrerait de même qu'il est inférieur ou égal à q, et donc inférieur ou égal à $\min(p,q)$.

> ⚠ Attention !
> L'égalité $(AB)^p = A^pB^p$ n'a pas de raison d'être vraie sans l'hypothèse que A et B commutent.

Puisque A et B commutent, par la formule du binôme, on a, pour tout $m \in \mathbf{N}$

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

En particulier, pour $m = p+q$, il vient

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}\\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+q}{k} A^k \underbrace{B^{p+q-k}}_{=0_n} + \sum_{k=p}^{p+q} \binom{p+q}{k} \underbrace{A^k}_{=0_n} B^{p+q-k}\\ &= 0_n.\end{aligned}$$

> Détails
> Si $k \leqslant p-1$, alors $p+q-k \geqslant q$, de sorte que $B^{p+q-k} = 0_n$.

Donc $A+B$ est nilpotente, et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $p+q$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.3

1. Le résultat se comprend bien en «dessinant» les matrices : les colonnes de $E_{i,j}$ sont toutes nulles à l'exception de la $j^{\text{ème}}$.
Donc déjà, toutes les colonnes de $AE_{i,j}$ sont nulles, sauf éventuellement la $j^{\text{ème}}$.
Et alors les coefficients qui se trouvent dans cette $j^{\text{ème}}$ colonne sont ceux de la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.

> Détails
> Faire le produit «avec les deux mains» pour comprendre pourquoi ce sont bien les coefficients de la $i^{\text{ème}}$ colonne de A qui apparaissent. C'est lié au fait que le 1 de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $E_{i,j}$ est sur la $i^{\text{ème}}$ ligne.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} j \\ \downarrow \end{array} \\ i \longrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,i} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,i} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1,i} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2,i} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{n,i} & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Plus formellement : pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[AE_{i,j}]_{k,\ell} = \sum_{p=1}^{n} a_{k,p} \left[E_{i,j}\right]_{p,\ell}.$$

Ce coefficient est nul si $\ell \neq j$, car tous les $\left[E_{i,j}\right]_{p,\ell}$ sont nuls.
Et pour $\ell = j$, alors tous les $[E_{,j}]_{p,\ell}$ sont nuls sauf lorsque $p = i$, et donc il ne reste que le terme correspondant à $p = i$ dans la somme ci-dessus, si bien que $[AE_{i,j}]_{k,j} = a_{k,i}$.
Et donc toutes les colonne de $AE_{i,j}$ sont nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$, égale à la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.

Sur le même principe, on a $\left[E_{i,j}A\right]_{k,\ell} = \sum_{p=1}^{n} \left[E_{i,j}\right]_{k,p} a_{p,\ell}$, qui vaut 0 si $k \neq i$.

Et pour $k = i$, $\left[E_{i,j}A\right]_{i,\ell} = a_{j,\ell}$.

Donc toutes les lignes de $E_{i,j}A$ sont nulles, à l'exception de la $i^{\text{ème}}$ qui est la $j^{\text{ème}}$ ligne de A.

Alternative : souvenons-nous que $[E_{i,j}]_{p,q} = \delta_{i,p}\delta_{j,q}$.
On a donc, pour $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[AE_{i,j}]_{p,q} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{p,k}[E_{i,j}]_{k,q} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{p,k}\delta_{i,k}\delta_{j,q} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq q \\ [A]_{p,i} & \text{si } j = q \end{cases}$$

Donc seule la $j^{\text{ème}}$ colonne de $AE_{i,j}$ est nulle, et son coefficient de la $p^{\text{ème}}$ ligne est le coefficient (p,i) de A.
On retrouve bien le fait que la $j^{\text{ème}}$ colonne de $AE_{i,j}$ soit la $i^{\text{ème}}$ colonne de A.
On procède de même pour $E_{i,j}A$.

Fun fact
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ peut aussi s'écrire

$$\delta_{i,j} = 0^{|i-j|}$$

ou encore pire

$$\delta_{i,j} = \binom{i}{j}\binom{j}{i}.$$

2. On a donc $E_{i,j}E_{k,\ell}$ qui est nulle, à l'exception de la $i^{\text{ème}}$ qui est la $j^{\text{ème}}$ de $E_{k,\ell}$.
Celle-ci est nulle si $j \neq k$, et sinon c'est la ligne dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui de la $\ell^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
En résumé, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, où $\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est le symbole de Kronecker.

Solution de l'exercice 14.4

1. Notons $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Alors, pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$[AD]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}[D]_{k,j} = a_{i,j}\lambda_j.$$

Détails
Les coefficients de la $j^{\text{ème}}$ colonne de D sont tous nuls, à l'exception du coefficient diagonal (d'indice (j,j)), qui vaut λ_j).

Et d'autre part, $[DA]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{i,k}a_{k,j} = \lambda_i a_{i,j}$.
Donc si $AD = DA$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\lambda_i a_{i,j} = \lambda_j a_{i,j} \Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j)a_{i,j} = 0$.
Si $i \neq j$, puisque $\lambda_i \neq \lambda_j$, on a donc $a_{i,j} = 0$.
Autrement dit, les coefficients hors diagonale de A sont nuls : A est une matrice diagonale.
Inversement, deux matrices diagonales commutant toujours entre elles, si A est diagonale, alors elle commute avec D.
Donc A commute à D si et seulement si elle est diagonale.

2. Nous savons que I_n commute à toute matrice, et plus généralement que pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, λI_n commute à toute matrice.
Nous allons prouver que seules les matrices scalaires commutent à toutes les matrices.

Soit donc M une matrice du centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'est-à-dire commutant à toute matrice carrée.
Par la question 1, nous savons déjà que M est diagonale, puisqu'elle doit en particulier commuter à $\text{Diag}(1,2,3,\cdots,n)$.
À l'aide du même calcul que dans la question 1, on a donc, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$[AM]_{i,j} = [MA]_{i,j} \Leftrightarrow [A]_{i,j}[M]_{j,j} = [M]_{i,i}[A]_{i,j}.$$

En particulier, ceci est vrai si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
Et alors on obtient, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[M]_{i,i} = [M]_{j,j}$: tous les coefficients diagonaux de A sont égaux.
Et donc il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $M = \lambda I_n$.

Ainsi, le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est exactement $\{\lambda I_n,\ \lambda \in \mathbf{K}\}$, l'ensemble des matrices scalaires.

Solution de l'exercice 14.5

Essayons de comprendre un peu mieux la définition de $\mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$.
Si $k = 0$, $\mathcal{T}_0^+(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ telles que $\forall i,j \in [\![1,n]\!]$, $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.
C'est donc l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
Pour $k = 1$, $\mathcal{T}_1^+(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices $(a_{i,j})$ telles que

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], i+1 > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

En particulier, si $i > j$, $i+1 > j$, et donc $a_{i,j} = 0$.
Donc déjà les matrices de $\mathcal{T}_1^+(\mathbf{K})$ sont triangulaires supérieures. Mais de plus, les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ sont tous nuls puisque $i+1 > i$.
Et donc $\mathcal{T}_1^+(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls.
Pour $k = 2$, il faut de plus rajouter la condition $a_{1,2} = a_{2,3} = \cdots = a_{n-1,n} = 0$, et donc $\mathcal{T}_2^+(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures qui ont des 0 sur la diagonale et juste au dessus de la diagonale.
Et plus généralement, pour $1 \leqslant k < n$, $\mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures qui ont des 0 sur la diagonale et sur les $k-1$ «sous-diagonales» situées au dessus de la diagonale.
Enfin, pour $k \geqslant n$, puisque pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $i + k \geqslant i + n > n \geqslant j$, la seule matrice de $\mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ est la matrice nulle.

1. Soit donc $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{T}_k^+(\mathbf{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{T}_\ell^+(\mathbf{K})$.

   Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[AB]_{i,j} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} a_{i,p}b_{p,j}$.

   Supposons que $i + k + \ell > j$. Alors

$$[AB]_{i,j} = \sum_{p=1}^{i+k-1} \underbrace{a_{i,p}}_{=0} b_{p,j} + \sum_{p=i+k}^{n} a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{p=i+k}^{n} a_{i,p}b_{p,j}.$$

   Mais puisque $j - \ell < i + k$, pour $p \geqslant i + k$, $p > j - \ell \Leftrightarrow p + \ell > j$, et donc $b_{p,j} = 0$.
   Donc $[AB]_{i,j} = 0$.
   Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i + k + \ell > j \Rightarrow [AB]_{i,j} = 0$, et donc $AB \in \mathcal{T}_{k+\ell}^+(\mathbf{K})$.

2. Supposons que A soit triangulaire supérieure. Alors elle est dans $\mathcal{T}_0^+(\mathbf{K})$.
   Si de plus sa diagonale est nulle, alors elle est dans $\mathcal{T}_1^+(\mathbf{K})$.
   En effet, pour $i + 1 > j$, on a soit $i > j$, et alors $[A]_{i,j} = 0$ car A est triangulaire supérieure, soit $i = j$, et alors $[A]_{i,j} = [A]_{i,i} = 0$ car les coefficients diagonaux de A sont nuls.
   Par ce qui précède, on a donc $A^2 = AA \in \mathcal{T}_2^+(\mathbf{K})$.
   Puis $A^3 = A^2A \in \mathcal{T}_{2+1}^+(\mathbf{K}) = \mathcal{T}_3^+(\mathbf{K})$.
   Une récurrence facile prouve alors que $A^n \in \mathcal{T}_n^+(\mathbf{K})$.
   Mais alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i + n \geqslant n + 1 > j$, et donc $[A^n]_{i,j} = 0$, de sorte que $A^n = 0_n$.
   Donc A est bien nilpotente, et son indice de nilpotence est inférieur ou égal à n.

   Dans le cas où A est triangulaire inférieure, alors $A^\top$ est triangulaire supérieure, à diagonale nulle, et donc $(A^\top)^n = 0_n$.
   Or $(A^\top)^n = (A^n)^\top = 0_n$, donc de même, $A^n = 0_n$, et donc A est nilpotente, d'indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

Rappel
L'indice de nilpotence est **le plus petit** entier k tel que $A^k = 0_n$.
Donc si on dispose d'une puissance de A qui est nulle, cette puissance est nécessairement inférieure ou égale à l'indice de nilpotence.

Remarque
Nous prouverons plus tard qu'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ a nécessairement un indice de nilpotence inférieur ou égal à n.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.6

Par commodité, nous noterons à chaque fois A la matrice dont on cherche à calculer les puissances.

1. Le calcul des premières puissances de A prouve que

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}.$$

   Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

2. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$.
   Dès lors, il est évident que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A^{2n} = \left(A^2\right)^n = 2^n I_2$.
   Et $A^{2n+1} = A^{2n}A = 2^n A$.

3. Notons $D = 3I_3$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A = D + T$, et D et T commutent puisqu'une matrice scalaire commute toujours à toute matrice.

On a alors $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^3 = 0_3$.

Donc par la formule du binôme de Newton, il vient, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k D^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} T^k 3^{n-k} \\ &= 3^n I_3 + 3^{n-1} nT + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} T^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3^n & 3^{n-1}n & n3^n + 2n(n-1)3^{n-2} \\ 0 & 3^n & n3^n \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Notons n la taille de la matrice A. On a alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & n-1 & \dots & n-1 \\ n-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (n-1)A$.

Il vient ensuite $A^4 = (n-1)A^2$, puis $A^5 = (n-1)A^3 = (n-1)^2 A$, etc.

Une récurrence prouve alors que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$A^{2k} = (n-1)^{k-1} A^2 = \begin{pmatrix} (n-1)^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (n-1)^{k-1} & \dots & (n-1)^{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (n-1)^{k-1} & \dots & (n-1)^{k-1} \end{pmatrix}$$

et

$$A^{2k+1} = (n-1)^k A = \begin{pmatrix} 0 & (n-1)^k & \dots & (n-1)^k \\ (n-1)^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)^k & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 14.7

1. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n \\ n & n & \dots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = nJ.$$

On en déduit que $J^3 = J^2 J = nJ^2 = n^2 J$, puis $J^4 = J^3 J = n^2 J^2 = n^3 J$, et une récurrence facile prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $J^k = n^{k-1} J$.

> ⚠ Attention !
> La formule n'est pas valable pour $k = 0$, car $J^0 = I_n \neq n^{-1} J$.

Alternative sans pointillés : soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. Alors

$$[J^2]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [J]_{i,k} [J]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

Donc J^2 possède tous ses coefficients égaux à n, et donc $J^2 = nJ$.

2. Si $\lambda = 0$, nous venons de répondre.
Supposons donc $\lambda \neq 0$.
Puisque I_n commute à toute matrice, elle commute en particulier avec J et donc la formule du binôme de Newton s'applique :

$$\begin{aligned}(J+\lambda I_n)^k &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}J^i\lambda^{k-i}I_n \\ &= \lambda^k I_n + \left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}n^{i-1}\lambda^{k-i}\right)J \\ &= \lambda^k I_n + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}n^{i}\lambda^{k-i}\right)J \\ &= \lambda^k I_n + \frac{1}{n}\left((n+\lambda)^k-\lambda^k\right)J.\end{aligned}$$

On sépare le terme $i = 0$ des autres car $J^0 \neq n^{0-1}J$.

Détails
On a reconnu un binôme (dans $\mathbf{K}$) auquel manque un terme.

3. Ici, on a $A = 2\begin{pmatrix}5/2 & 1 & 1\\ 1 & 5/2 & 1\\ 1 & 1 & 5/2\end{pmatrix}$, donc on prend $n = 3$, et $\lambda = 3/2$. Et donc pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}A^k = 2^k\left(\left(\frac{3}{2}\right)^k I_3 + \frac{1}{3}\left(\left(3+\frac{3}{2}\right)^k - \left(\frac{3}{2}\right)^k\right)J\right) &= 3^k I_3 + \frac{1}{3}\left(9^k - 3^k\right)J \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cdot 3^{k-1}+3\cdot 9^{k-1} & 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} & 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1}\\ 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} & 2\cdot 3^{k-1}+3\cdot 9^{k-1} & 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1}\\ 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} & 3\cdot 9^{k-1}-3^{k-1} & 2\cdot 3^{k-1}+3\cdot 9^{k-1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.8

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix}4\cos^2(\theta)-1 & -2\cos(\theta)\\ 2\cos(\theta) & -1\end{pmatrix} = 2\cos\theta A - I_2$.

2. Pour $n = 0, n = 1, n = 2$, la propriété est évidemment vérifiée, avec

$$a_0 = 0, b_0 = 1, a_1 = 1, b_1 = 0 \text{ et } a_2 = 2\cos(\theta), b_2 = -1.$$

Par récurrence sur n : supposons que $A^n = a_n A + b_n I_2$. Alors

$$A^{n+1} = A^n A = (a_n A + b_n I)A = a_n A^2 + b_n A = a_n(2\cos\theta A - I_2) - b_n A = (2a_n\cos(\theta) + b_n)A - a_n I_2.$$

Et donc $a_{n+1} = 2\cos(\theta)a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -a_n$.

3. On a donc, pour $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 2\cos(\theta)a_n - a_{n-1}$.
La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, et son polynôme caractéristique est $r^2 - 2\cos(\theta)r + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = -4\sin^2\theta < 0$.
Donc l polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées, qui sont

$$r_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \text{ et } r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\theta}.$$

Donc il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}, a_n = \lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta).$$

Or, $a_0 = \lambda = 0$ et $a_1 = \mu\sin(\theta) = 1$. Donc $a_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$.
On en déduit que

$$A^n = \begin{pmatrix}2a_n\cos\theta + b_n & -a_n\\ a_n & b_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{n+1} & -a_n\\ a_n & b_n\end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix}\sin((n+1)\theta) & -\sin(n\theta)\\ \sin(n\theta) & -\sin((n-1)\theta)\end{pmatrix}$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.9

On a $(AB)^\top = B^\top A^\top = BA$, qui est donc égale à AB si et seulement si A et B commutent.

Solution de l'exercice 14.10

Il est évident que si A est la matrice nulle, alors $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0$.
D'autre part, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(A^\top A) &= \sum_{i=1}^n \left[A^\top A\right]_{i,i} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left[A^\top\right]_{i,j}[A]_{j,i}\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{j,i}a_{j,i} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2.\end{aligned}$$

Et donc $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2 = 0$.
Mais une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul, donc $\operatorname{tr}(A^\top A) = 0$ si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = 0$.
Soit si et seulement si A est la matrice nulle.

Solution de l'exercice 14.11

Quelles que soient les matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on a

$$\operatorname{tr}(AB-BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(AB) = 0 \neq n = \operatorname{tr}(I_n).$$

Donc on ne peut avoir $AB - BA = I_n$.

Plus généralement
Le même résultat reste valable si on remplace I_n par n'importe quelle matrice de trace non nulle.

Solution de l'exercice 14.12

Il s'agit, une fois de plus, d'utiliser les matrices élémentaires.
Soient donc $(i,j) \in [\![1,n]\!]$. Alors toutes les colonnes de $AE_{i,j}$ sont nulles[1], à l'exception de la $j^{\text{ème}}$. Et le coefficient diagonal de cette $j^{\text{ème}}$ colonne est

$$\left[AE_{i,j}\right]_{j,j} = \sum_{k=1}^n A_{j,k}\left[E_{i,j}\right]_{k,j} = a_{j,i}.$$

Et par conséquent, $\operatorname{tr}\left(AE_{i,j}\right) = a_{j,i}$.
De même, on a $\operatorname{tr}\left(BE_{i,j}\right) = b_{j,i}$.
Ces deux traces étant égales par hypothèse, on a donc, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{j,i} = b_{j,i}$, et donc $A = B$.

[1] Car les colonnes correspondantes de $E_{i,j}$ le sont.

Solution de l'exercice 14.13

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Analyse : supposons qu'il existe $(S,A) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbf{K})$ telles que $M = S + A$, et considérons de telles matrices S et A.
Alors $M^\top = S^\top + A^\top = S - A$.
Il vient donc $S = \dfrac{M+M^\top}{2}$ et $A = \dfrac{M-M^\top}{2}$.
Donc si deux telles matrices S et A existent, elles sont uniques, et nous venons de trouver leur expression en fonction de M.

Synthèse : passons à présent à l'existence, et posons $S = \dfrac{M+M^\top}{2}$ et $A = \dfrac{M-M^\top}{2}$.
Alors $S^\top = \dfrac{M^\top + M}{2} = S$, donc S est symétrique.
De même, $A^\top = -A$, donc A est antisymétrique.
Et $S + A = \dfrac{M+M^\top}{2} + \dfrac{M-M^\top}{2} = M$.
Donc il existe bien au moins une manière d'écrire M comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Et donc toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Méthode
La définition de symétrique/antisymétrique fait apparaître des transposées. Il est donc naturel de chercher à exploiter ces transposées, et donc de considérer $M^\top$.

Solution de l'exercice 14.14

1. On a

$$\operatorname{tr}\left(A^2\right) = \sum_{i=1}^n \left[A^2\right]_{i,i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}a_{j,i}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2\\
&\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

A est symétrique donc $a_{i,j} = a_{j,i}$.

2. Notons $f : \lambda \mapsto \operatorname{tr}\left((\lambda A + B)^2\right)$.
Puisque pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda A + B$ est encore symétrique, le raisonnement de la première question s'applique encore, et prouve que $f(\lambda) \geqslant 0$.
Mais d'autre part, on a, pour $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$
\begin{aligned}
f(\lambda) &= \operatorname{tr}\left(\lambda^2A^2 + \lambda AB + \lambda BA + B^2\right) = \lambda^2\operatorname{tr}\left(A^2\right) + \lambda\left(\operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}(BA)\right) + \operatorname{tr}\left(B^2\right)\\
&= \lambda^2\operatorname{tr}\left(A^2\right) + 2\lambda\operatorname{tr}(AB) + \operatorname{tr}\left(B^2\right).
\end{aligned}
$$

Rappel
$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

► Si $\operatorname{tr}\left(A^2\right) \neq 0$, alors f est une fonction polynomiale de degré 2, de signe constant. C'est donc que son discriminant est négatif ou nul[2].
Soit encore $(2\operatorname{tr}(AB))^2 - 4\operatorname{tr}\left(A^2\right)\operatorname{tr}\left(B^2\right) \leqslant 0$ et donc $\operatorname{tr}(AB)^2 \leqslant \operatorname{tr}\left(A^2\right)\operatorname{tr}(B^2)$.
► Si $\operatorname{tr}\left(A^2\right) = 0$, alors f est une fonction affine, de signe constant, positive. Ce n'est possible que s'il s'agit d'une fonction constante, c'est-à-dire si) $\operatorname{tr}(AB) = 0$ et $\operatorname{tr}\left(B^2\right) \geqslant 0$.
Et alors, on a bien l'inégalité annoncée (qui est même une égalité dans ce cas).

[2] Car s'il y avait deux racines distinctes, f changerait de signe entre ces racines.

Remarque
Le calcul de la question 1 permet de prouver que la condition $\operatorname{tr}(A^2) = 0$ n'est vérifiée que lorsque $A = 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.15

Notons qu'il n'est pas question de prouver une telle propriété par récurrence sur k, en tous cas pas en prenant comme hypothèse de récurrence : $\operatorname{tr}\left((A+B)^k\right) = \operatorname{tr}(A^k) + \operatorname{tr}(B^k)$.
En effet, il n'y a aucune formule générale reliant $\operatorname{tr}\left((A+B)^{k+1}\right)$ à $\operatorname{tr}\left((A+B)^k\right)$, et donc il semble difficile de prouver l'hérédité.

Puisqu'ici nous n'avons pas supposé que A et B commutent, il n'est pas question d'utiliser le binôme de Newton pour développer $(A+B)^k$.
Notons tout de même que $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + \underbrace{AB}_{=0} + BA + B^2 = A^2 + BA + B^2$.

Puis

$$(A+B)^3 = (A+B)(A+B)^2 = (A+B)(A^2+BA+B^2) = A^3 + \cancel{ABA} + \cancel{AB^2} + BA^2 + B^2A + B^3 = A^3 + BA^2 + B^2A + B$$

Détails
Tous les termes contenant, dans cet ordre, un produit AB sont nuls. Donc ne restent que les termes ne contenant que des B ou un produit d'un ou plusieurs B suivis de un ou plusieurs A.

Vient ensuite

$$
\begin{aligned}
(A+B)^4 &= (A+B)(A+B)^3 = (A+B)(A^3 + BA^2 + B^2A + B^3)\\
&= A^4 + \cancel{ABA^2} + \cancel{AB^2A} + \cancel{AB^3} + BA^3 + B^2A^2 + B^3A + B^4\\
&= A^4 + BA^3 + B^2A^2 + B^3A + B^4.
\end{aligned}
$$

Prouvons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$ que $(A+B)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} B^iA^{k-i}$.

La récurrence est déjà largement initialisée.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $(A+B)^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} BA^{k-i}$. Alors

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{k+1} &= (A+B)\sum_{i=0}^{k} B^iA^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} AB^iA^{k-i} + \sum_{i=0}^{k} B^{i+1}A^{k-i}\\
&= A^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{AB}_{=0_n} B^{i-1}A^{k-i} + \sum_{i=1}^{k+1} B^iA^{k+1-i}\\
&= \sum_{i=0}^{k+1} B^iA^{k+1-i}.
\end{aligned}
$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $(A+B)^k = \sum_{i=0}^{k} B^i A^{k-i}$.

Et par linéarité de la trace, il vient donc $\operatorname{tr}((A+B)^k) = \sum_{i=0}^{k} \operatorname{tr}\left(B^i A^{k-i}\right)$.

Mais si $i \in [\![1, k-1]\!]$, alors

$$\operatorname{tr}(B^i A^{k-i}) = \operatorname{tr}(B^i A^{k-i-1} A) = \operatorname{tr}(A B^i A^{k-i-1}) = \operatorname{tr}(0_n) = 0.$$

Et donc $\operatorname{tr}((A+B)^k) = \operatorname{tr}(A^k) + \operatorname{tr}(B^k)$.

Solution de l'exercice 14.16

1. Utilisons le déterminant : $\det A = 1 + i - i^2 = 2 + i \neq 0$, donc A est inversible.
   Son inverse est alors $A^{-1} = \dfrac{1}{2+i}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1+i \end{pmatrix}$.
2. Il est possible de procéder avec n'importe laquelle des deux méthodes vues dans le cours : la résolution de système ou des opérations élémentaires sur les lignes de B.
   On trouve dans les deux cas que B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -4 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. De même, C est inversible et $C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
4. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$. Alors pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbf{R})$, on a

$$D\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - y - 2z + 2t = a \\ -x - y + 2t = b \\ 2y + 2z - 4t = c \\ y + z - 2t = d \end{pmatrix}.$$

En réalisant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4$, on obtient l'équation $0 = c - 2d$, qui n'est pas toujours satisfaite. Par exemple si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le système ne possède pas de solution.

Et donc la matrice D n'est pas inversible.

Solution de l'exercice 14.17

La relation donnée par l'énoncé s'écrit encore

$$\lambda_p A^p + \lambda_{p-1} A^{p-1} + \cdots + \lambda_1 A = -\lambda_0 I_n \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_p A^p + \lambda_{p-1} A^{p-1} + \cdots + \lambda_1 A\right) = I_n.$$

Mais on peut alors factoriser par A, aussi bien à droite qu'à gauche :

$$A\left(-\frac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_p A^{p-1} + \lambda_{p-1} A^{p-2} + \cdots + \lambda_1 I_n\right)\right) = \left(-\frac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_p A^{p-1} + \lambda_{p-1} A^{p-2} + \cdots + \lambda_1 I_n\right)\right) A = I_n.$$

Donc A est inversible, et son inverse est $\left(-\dfrac{1}{\lambda_0}\left(\lambda_p A^{p-1} + \lambda_{p-1} A^{p-2} + \cdots + \lambda_1 I_n\right)\right)$.

Solution de l'exercice 14.18

Supposons que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$ soit inversible, et décomposons M^{-1} par blocs de même taille : $M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.

On a alors

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CC' & CD' \end{pmatrix}.$$

Donc si cette matrice est égale à I_{n+p} alors

$$\begin{cases} AA' + BC' = I_n & (1) \\ AB' + BD' = 0_{n,p} & (2) \\ CC' = 0_{p,n} & (3) \\ DD' = I_p & (4) \end{cases}$$

La dernière relation signifie que $D' = D^{-1}$.
Puisque C est inversible, la troisième relation nous donne $C' = C^{-1}CC' = C^{-1}0_{p,n} = 0_{p,n}$.
Dans (1) il ne reste alors que $AA' = I_n$, donc $A' = A^{-1}$.
Enfin, (2) nous donne $AB' = -BC^{-1}$ et donc $B' = -A^{-1}BC^{-1}$.

Ainsi, si M est inversible, $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_{p,n} & C^{-1} \end{pmatrix}$.
Ne reste alors qu'à vérifier que cette matrice est bien l'inverse de M :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_{p,n} & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}BC^{-1} + BC^{-1} \\ 0_{p,n} & CC^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix} = I_{n+p}.$$

Notons qu'il est inutile de calculer le produit dans l'autre sens, ceci suffit à justifier que M est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0_{p,n} & C^{-1} \end{pmatrix}$.

Commentaire *: nous prouverons plus tard qu'une matrice de la forme* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{n,p} & C \end{pmatrix}$ *est inversible **si et seulement si** A et C sont inversibles (alors que nous venons de ne prouver qu'une implication). Ce résultat est à voir comme une version «par blocs» du fait qu'une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux le sont.*
Mieux : nous savons que l'inverse d'une matrice triangulaire T inversible est encore triangulaire, et que les coefficients diagonaux de T^{-1} *sont les inverses des coefficients diagonaux de T.*
Ici nous venons de prouver que si T est «triangulaire par blocs» et inversibles, alors T^{-1} *est encore triangulaire par blocs, et que les blocs diagonaux de* T^{-1} *sont les inverses des blocs diagonaux de T.*

> **Remarque**
> Notons que nous procédons par implication, et par pas équivalence : c'est la phase d'analyse (si il y a un inverse, alors....)

> **Rappel**
> Si $MN = I_n$, alors nécessairement M est inversible d'inverse N.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.19

1. Soit $p \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}(A-B)\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} &= \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1}B^{p-k-1} - \sum_{k=0}^{p-1} BA^kB^{p-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1}B^{p-k-1} - \sum_{k=0}^{p-1} A^kB^{p-k} \\ &= \sum_{i=1}^{p} A^iB^{p-i} - \sum_{k=0}^{p-1} A^kB^{p-k} \\ &= A^p - B^p.\end{aligned}$$

Ainsi, la troisième identité remarquable généralisée reste valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$*, sous réserve que les matrices commutent (comme pour le binôme de Newton).*

> **Détails**
> C'est ici qu'on utilise le fait que A et B commutent, ce qui implique alors que A^k et B commutent pour tout k.

2. Supposons donc que N soit nilpotente, d'indice de nilpotence p.
Alors $-N$ est également nilpotente, d'indice de nilpotence p, et donc

$$I_n = I_n^p - (-N)^p = (I_n + N)\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^{p-1-k}\right).$$

Et sur le même principe[3], $\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^{p-1-k}\right)(I_n + N) = I_n$.

Donc $I_n + N$ est inversible, et son inverse est $\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^{p-1-k}$.

[3] Soit on prouve que la formule de la question 1 reste valable en échangeant l'ordre des termes soit on prouve par un calcul direct que $(I_n + N)$ et $\sum_{k=0}^{p-1}(-N)^{p-1-k}$ commutent.

Solution de l'exercice 14.20

Si A est inversible, $A+B = A(I_n + A^{-1}B)$.
Mais puisque $AB = BA$, en multipliant cette égalité à gauche et à droite par A^{-1}, il vient $A^{-1}B = BA^{-1}$.
Et donc A^{-1} et B commutent, de sorte que, si p désigne l'indice de nilpotence de B, $(A^{-1}B)^p = A^{-p}B^p = 0_n$.
Donc $A^{-1}B$ est encore nilpotente. On prouve alors, comme à l'exercice 19, que $I_n + A^{-1}B$ est inversible, et donc que $A+B$ est inversible car produit de deux matrices inversibles.

Inversement, si $A+B$ est inversible, alors $A+B$ commute avec $-B$, et $-B$ est nilpotente.
Par ce qui a été fait précédemment, $A = A+B+(-B)$ est inversible.

Solution de l'exercice 14.21

1. Commençons par essayer d'écrire explicitement A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Calculons son inverse par opérations élémentaires. Commençons par réaliser l'opération $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$. Alors

Méthode
Nous ne suivons pas ici l'algorithme du pivot. Peu importe : celui-ci fournit une méthode, qui fonctionne toujours, pour transformer notre matrice en l'identité.
Si vous voyez d'autres opérations qui permettent d'arriver plus simplement au même résultat, il ne faut pas vous priver de les utiliser.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & \vdots & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & \vdots & \dots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Passons ensuite à $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$. Alors

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-2 & \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 1 & \vdots & \vdots & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Réalisons alors l'opération $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-2 & \vdots & & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

De proche en proche, en réalisant à chaque fois les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ puis $L_i \leftarrow L_i + L_{i+1}$, on arrive à

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)$$

Ne reste plus qu'à soustraire chacune des L_i à L_1 :

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 & \vdots & \vdots & & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)$$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Si $n = 2$, on a $B = \begin{pmatrix} F_2 & F_3 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ qui est inversible[4], d'inverse $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
En revanche, si $n \geqslant 3$, alors la troisième ligne de B vérifie $L_3 = L_1 + L_2$.
En effet, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $F_{3+j} = F_{2+j} + F_{1+j}$.
Et donc la famille des lignes de B n'est pas libre, donc B n'est pas inversible.

[4] Car de déterminant égal à -1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 14.22

Puisque $AX = 0_{n,1}$, alors tous les coefficients de AX sont nuls, et en particulier, le $i_0$ème coefficient de AX est nul.

Soit encore[5] $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j = 0$.

[5] En utilisant la formule du produit matriciel.

En isolant le coefficient diagonal de la $i_0$ème ligne de A, on a donc $a_{i_0,i_0} x_{i_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0,j} x_j$.

En passant à la valeur absolue, l'inégalité triangulaire nous donne alors

$$|a_{i_0,i_0}| \cdot |x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}| \cdot |x_j| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}| \cdot |x_{i_0}|.$$

Détails

Par définition, i_0 est le numéro d'une ligne portant le plus grand coefficient (en valeur absolue) de X.
Donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$|x_j| \leqslant |x_{i_0}|.$$

Si $x_{i_0} \neq 0$, alors, en divisant par $|x_{i_0}|$, il vient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur A.
Donc $x_{i_0} = 0$. Ceci implique alors que tous les coefficients de X soient nuls, et donc que $X = 0$.
Autrement dit, nous avons prouvé que $AX = 0_{n,1} \Rightarrow X = 0_{n,1}$, ce qui est une des caractérisations de l'inversibilité, et donc A est inversible.