TD 13 : Suites numériques

▶ Epsilonage

Exercice 13.1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. **F**
On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, et on suppose $\ell < \ell'$.
Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

Exercice 13.2 Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$ est convergente si et seulement si elle est stationnaire. **PD**
Que dire alors de la limite de (u_n) ?

Exercice 13.3 Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et soient a et b deux réels tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant a$ et $v_n \leqslant b$. **PD**
Montrer que si $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a+b$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

Exercice 13.4 Théorème de Cesàro **AD**
Soit (u_n) une suite réelle convergeant vers un réel ℓ.
On pose alors, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$.

1. On suppose dans cette question que $\ell = 0$.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n| \leqslant \dfrac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_0-1}|}{n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   (b) En déduire que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Sans nouveaux calculs, montrer que dans le cas général, on a $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

▶ Limites des suites

Exercice 13.5 Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$, telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 1$. **F**
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 13.6 Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n$. **F**
Est-il vrai que si (v_n) converge, alors (u_n) converge ? Et si on ajoute l'hypothèse que (u_n) est croissante ?

Exercice 13.7 Vrai ou Faux ? **PD**
Toutes les suites considérées ici sont réelles.

1. toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. le produit de deux suites minorées est minorée.
3. si $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n > \alpha > 0$ et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell > 0$.
4. toute suite convergente est minorée.
5. une suite strictement croissante et minorée tend vers $+\infty$.
6. soit (u_n) une suite réelle. Si $u_n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
7. Soit (u_n) une suite réelle. Si $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
8. $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exercice 13.8 Déterminer les limites des suites dont le terme général est donné par : **PD**

1. $\dfrac{1-\sin^2(2n)}{\sqrt{n}}$
2. $\sqrt{n}\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor$
3. $\dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2 + 2kn\sin(k)}{2n^4 + n^2\ln(k)}$
6. $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $a, b \in \mathbf{R}_+^*$

Exercice 13.9 Quelques séries de Riemann **PD**

1. Soit $\alpha \geqslant 2$. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.
   Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, et en déduire que (u_n) converge.
2. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_{2n} - v_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 13.10 PD

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. En déduire la limite de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
2. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.
   Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge, et calculer sa limite.

Exercice 13.11 AD

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$.

1. Prouver que (u_n) est convergente, puis déterminer sa limite.
2. En calculant de deux manières la somme $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2}\right)$, montrer que $\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 13.12 AD

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que (u_n) est convergente, et que sa limite ℓ est dans le segment $[0,1]$.
2. Montrer que pour tout n, $u_{2n} < \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 13.13 AD

Soit $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \cos(n\alpha)$ et $v_n = \sin(n\alpha)$.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et v_n. Même question pour v_{n+1}.
2. En déduire que si l'une des deux suites (u_n) et (v_n) converge, alors l'autre aussi.
3. Prouver alors que (u_n) et (v_n) divergent.

Exercice 13.14 AD

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation $x^n = \cos(x)$, d'inconnue $x \in [0,1]$ possède une unique solution, que l'on notera x_n.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, et le cas échéant, préciser sa limite.

Exercice 13.15 AD

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n).
2. On pose $v_n = (n+1)u_n^2$. Montrer que (v_n) converge.
3. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 13.16 Règle de d'Alembert AD

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

1. On suppose que $\ell > 1$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} > \dfrac{1+\ell}{2}u_n$.
   En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. On suppose que $\ell < 1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. Donner des exemples de suites (u_n) pour lesquelles $\ell = 1$, qui tendent vers 0, qui tendent vers un réel non nul, ou encore qui tendent vers $+\infty$.

Exercice 13.17 Suites sous-additives et lemme de Fekete (Oral ENS) TD

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que $\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2$, $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$.
Montrer que $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\ell = \inf\left\{\dfrac{u_n}{n},\ n \geqslant 1\right\}$ si ℓ existe et vers $-\infty$ sinon.

► Suites adjacentes

Exercice 13.18 PD

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et en déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 13.19 Théorème des segments emboîtés PD

Soit $([a_n, b_n])_n$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments non vides de $\mathbf{R}$ et dont les longueurs tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

Exercice 13.20 Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ et $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$. PD

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

Exercice 13.21 Critère des séries alternées AD

Soit (u_n) une suite décroissante de limite nulle.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Étudier les monotonies de (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
2. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 13.22 Moyenne arithmético-géométrique AD

Soient $a > b$ deux réels positifs. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite qu'on ne cherchera pas à calculer.

► Suites complexes

Exercice 13.23 Soit $(z_n)_n$ une suite à valeurs complexes vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_{n+1} = \frac{z_n - 3\overline{z_n}}{2}$. F

Donner l'expression de z_n en fonction de n, et étudier la convergence de la suite (z_n).

Exercice 13.24 Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $z_n = e^{i \ln n}$. Montrer que (z_n) diverge. AD

Exercice 13.25 Soit (z_n) une suite complexe. On suppose que $\forall p, q \in \mathbf{N}$, $p \neq q \Rightarrow |z_p - z_q| \geqslant 1$. D

Prouver que $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

► Suites extraites

Exercice 13.26 Soit $(u_n)_n$ une suite (réelle ou complexe). Parmi les suites suivantes, toutes extraites de (u_n), trouver celles qui sont extraites d'une autre : F

$$(u_{2n})_n,\ (u_{3n})_n,\ (u_{6n})_n,\ (u_{6^n})_n,\ (u_{6^{n+1}})_n,\ (u_{2^{n+1}})_n,\ (u_{3\times 2^n})_n.$$

Exercice 13.27 Soit (u_n) une suite telle que les trois suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge. AD

Exercice 13.28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite telle que $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{\sqrt{n u_n}}{n+1}$. AD

Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 13.29 Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \geqslant 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n - (-1)^n}$. AD

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 13.30 (Oral ENS) TD

1. Soit (u_n) une suite bornée. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que toute suite convergente extraite de (u_n) possède ℓ pour limite. Montrer que (u_n) est convergente.
2. Soit (v_n) une suite bornée telle que $v_n + \frac{v_{2n}}{2}$ converge vers un réel ℓ. Montrer que (v_n) est convergente.

▸ Caractérisations séquentielles

Exercice 13.31 Déterminer les bornes supérieures et inférieures, si elles existent, des ensembles de réels suivants : PD

$$A=\left\{\frac{(-1)^n n}{n+1},\ n\in\mathbf{N}\right\},\ B=\left\{\frac{pq}{p^2+q^2},\ (p,q)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}\right\},\ C=\left\{\frac{2^n}{2^m+3^{n+m}},\ (m,n)\in\mathbf{N}^2\right\}$$

Exercice 13.32 Dans cet exercice, on note $A=\{\sqrt{n}-\sqrt{m},\ (m,n)\in\mathbf{N}^2\}$. D

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
2. Soit $r\in\mathbf{Q}$, et soient $p\in\mathbf{Z}$, $q\in\mathbf{N}$ tels que $r=\frac{p}{q}$.
   (a) Justifier que pour n suffisamment grand, le réel $u_n=\sqrt{q^2n^2+2np}-\sqrt{q^2n^2}$ est bien défini.
   (b) Prouver que $u_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r$.
3. En déduire que A est dense dans $\mathbf{R}$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 13

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.1

Soit $\varepsilon = \frac{\ell'-\ell}{2}$. Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n - \ell'| < \varepsilon$.
En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $v_n > \ell' - \frac{\ell'-\ell}{2} = \dfrac{\ell'+\ell}{2}$.
De même, puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
Et donc pour $n \geqslant n_1$, $u_n < \ell + \frac{\ell'-\ell}{2} = \frac{\ell'+\ell}{2}$.
Ainsi, pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a

$$u_n < \frac{\ell'+\ell}{2} < v_n$$

et donc $u_n < v_n$.
Ainsi, à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.2

Il est évident qu'une suite stationnaire[1], est convergente.
Inversement, soit $(u_n)_n$ une suite convergente d'entiers, et notons ℓ sa limite.
Soit alors $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Par définition de la convergence il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Et alors pour $n \geqslant n_0$, on a

$$|u_n - u_{n_0}| = |(u_n - \ell) + (\ell - u_{n_0})| \leqslant |u_n - \ell| + |u_{n_0} - \ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, $u_n - u_{n_0} \in \mathbf{Z}$ et $|u_n - u_{n_0}| < 1$.
On en déduit[2] que $u_n - u_{n_0} = 0$, et donc $u_n = u_{n_0}$. Et donc (u_n) est stationnaire.

[1] À valeurs entières ou non.

Méthode
Dans la définition de suite convergente, la condition est valable **pour tout** $\varepsilon > 0$. On peut donc le choisir comme bon nous chante !

[2] Bien entendu, si on ne suppose plus la suite à valeurs dans $\mathbf{Z}$, ce passage n'est plus valable.

Remarque
Notons au passage que ceci prouve un résultat assez intuitif : $\ell = u_{n_0} \in \mathbf{Z}$.
Mais on ne peut pas partir du principe que $\ell \in \mathbf{Z}$ pour prouver le résultat. Ou alors il faut le justifier.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.3

L'erreur à ne pas commettre serait de supposer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *ou* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ *existent : rien ne permet de garantir a priori que ces suites sont convergentes !*
Première option : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leqslant b$ et donc $-v_n \geqslant -b$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n + v_n - b \leqslant \underbrace{u_n + v_n - v_n}_{=u_n} \leqslant a.$$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n - b = a + b - b = a$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
On a alors $v_n = u_n + v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + b - a = b$.

Remarque
Ce qui garantit ici la convergence de (v_n) c'est que la somme de deux suites convergentes est convergente (résultat prouvé en cours).

Deuxième option : en «epsilonant».
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n + v_n > a + b - \varepsilon$.
Et puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leqslant b \Leftrightarrow -v_n \geqslant -b$, alors pour tout $n \geqslant n_0$,

$$u_n = u_n + v_n - v_n > a + b - \varepsilon + b = a - \varepsilon.$$

Et donc pour tout $n \geqslant n_0$, $a - \varepsilon < u_n \leqslant a$, si bien que $|u_n - a| < \varepsilon$.
Nous venons donc de prouver que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$, c'est-à-dire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
Et alors $v_n = u_n + v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + b - a = b$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.4

1.a. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Notons que quitte à remplacer n_0 par $n_0 + 1$ (qui satisfait la même propriété), on peut suppose $n_0 \in \mathbf{N}^*$.
Alors pour $n \geqslant n_0$, il vient

$$|v_n| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|u_k| \leqslant \frac{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_{n_0-1}|}{n} + \frac{|u_{n_0}| + \cdots + |u_n|}{n}$$

$$\leqslant \frac{|u_1|+\cdots+|u_{n_0-1}|}{n} + \frac{n-n_0+1}{n}\frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leqslant \frac{|u_1|+\cdots+|u_{n_0-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Détails
On a $n - n_0 + 1 \leqslant n$.

1.b. Puisque n_0 est fixé, $\dfrac{|u_1|+\cdots+|u_{n_0-1}|}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$,
$$\frac{|u_1|+\cdots+|u_{n_0-1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Soit alors à présent $n \geqslant \max(n_0, n_1)$. Alors
$$|v_n| \leqslant \frac{|u_1|+\cdots+|u_{n_0-1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Nous venons donc de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|v_n| < \varepsilon$.
C'est la définition de $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Dans le cas général, posons, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n^* = u_n - \ell$, de sorte que $u_n^* \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par la question 1, la suite (v_n^*) définie par $v_n^* = \dfrac{u_1^*+\cdots+u_n^*}{n}$ tend vers 0.
Mais pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $v_n^* = \dfrac{u_1-\ell+u_2-\ell+\cdots+u_n-\ell}{n} = \dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n} - \frac{n\ell}{n} = v_n - \ell$.
Et donc $v_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Danger !
On ne sait pas encore que (u_n) et (v_n) convergent.
Il est hors de question d'utiliser alors les limites de ces suites avant d'avoir prouvé leur existence !

Solution de l'exercice 13.5

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant 1$, alors $0 \leqslant u_n v_n \leqslant u_n \leqslant 1$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On prouve de même que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Solution de l'exercice 13.6

C'est faux, par exemple si on prend les suites définies pour tout $n \in \mathbf{N}$ par $u_n = (-1)^n$ et $v_n = 2$.

C'est en revanche vrai si on ajoute l'hypothèse que (u_n) est croissante, et cela découle du théorème de la limite monotone.
En effet, (v_n) étant convergente, elle est majorée, et donc tout majorant de (v_n) est aussi un majorant de (u_n).
Puisque (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge.

Danger !
L'inégalité $u_n \leqslant v_n$ ne suffit pas à prouver que (u_n) est majorée, puisque v_n n'est pas une constante indépendante de n.

Solution de l'exercice 13.7

1. **Faux.** La suite de terme général $1 + \dfrac{1}{n}$ est décroissante, minorée par 0, et tend vers 1.
2. **Faux.** Posons $u_n = -1$ et $v_n = n$. Alors (u_n) est minorée, puisque constante, et (v_n) est minorée, puisqu'elle tend vers $+\infty$.
Pourtant $u_n v_n = -n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, et donc ne saurait être minorée.
3. **Vrai.** C'est du cours.
4. **Vrai.** En effet, on a $\ell \geqslant \alpha > 0$.
5. **Vrai.** Nous savons que toute suite convergente est même bornée.
6. **Faux.** Toute suite croissante est minorée par son premier terme. Mais nous savons qu'il existe des suites strictement croissantes convergentes, par exemple $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$.
7. **Vrai.** Nous pourrions utiliser la racine carrée, mais nous n'avons pour l'instant rien prouvé au sujet des limites des racines.
Notons plutôt que puisque $u_n^4 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$, alors à partir d'un certain rang n_0, $0 \leqslant u_n^4 \leqslant 1$.
On a alors nécessairement
8. **Faux.** Par exemple $u_n = (-1)^n$.

Solution de l'exercice 13.8

1. Posons $u_n = \dfrac{1-\sin^2(2n)}{\sqrt{n}}$. Alors $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Or, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci peut sembler évident, mais n'a pas encore été prouvé avec les outils à notre disposition cette année...
Soit donc $A > 0$. Alors pour $n \geqslant \lfloor A^2 \rfloor + 1$, on a $n^2 \geqslant A$ et donc $\sqrt{n} \geqslant A$. Donc $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, de sorte que $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Pour $n \geqslant 2$, $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 1$, et donc $\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor = 0$. Et donc $n \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Remarque
Pas de forme indéterminée ici : on a la suite nulle !

3. Nous savons que $0 \leqslant \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Donc comme à la question 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} = 0$.

4. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n^2+k^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Et donc en sommant ces inégalités, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$. On en déduit par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

5. Par l'inégalité triangulaire,
$$0 \leqslant |u_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{n^2+2nk\sin k}{2n^4+n^2\ln(k)} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+2n^2}{2n^4} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{3n^2}{2n^4} \leqslant \frac{3n^3}{2n^4}.$$
Donc par le théorème des gendarmes, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

6. Distinguons plusieurs cas. Il est clair que si $a = b$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
► Si $a < b$, alors le terme «le plus fort» est b^n. Donc factorisons numérateur et dénominateur par b^n :
$$\frac{a^n-b^n}{a^n+b^n} = \frac{b^n}{b^n} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1.$$
► De même, si $a > b$, en factorisant par a^n, il vient $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Détails
Puisque $a < b$, $0 \leqslant \frac{a}{b} < 1$, donc
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.9

1. Pour $k \geqslant 2$, on a
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{k^\alpha}.$$
En sommant ces inégalités, on a donc, pour $n \geqslant 2$,
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$
Or, cette dernière somme est une somme télescopique, qui vaut $1 - \dfrac{1}{n} \leqslant 1$.
On en déduit que $u_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + 1 \leqslant 2$.
D'autre part, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} \geqslant 0$, de sorte que (u_n) est croissante.
Par le théorème de la limite monotone, (u_n) étant croissante et majorée, elle converge.

Remarque
Notons au passage que sa limite est alors inférieure ou égale à 2, le majorant obtenu précédemment.

2. On a
$$v_{2n} - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} \geqslant \frac{1}{2}.$$
Puisque (v_n) est croissante, par le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers une limite finie ℓ, soit elle tend vers $+\infty$.
Or, si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors la suite extraite $(v_{2n})_n$ converge également vers ℓ.
Et donc $v_{2n} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais puisque $v_{2n} - v_n \geqslant \dfrac{1}{2}$, en passant à la limite, il vient $0 \geqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui est absurde.
On en déduit donc que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Croissance
La croissance de (v_n) se prouve de la même manière que celle de (u_n) à la question précédente, mais elle est assez intuitive : pour passer de v_n à v_{n+1}, il faut ajouter $\frac{1}{n+1} \geqslant 0$, donc $v_{n+1} \geqslant v_n$.

Solution de l'exercice 13.10

1. Étudions la fonction $f : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ sur $\mathbf{R}_+$.
   Elle est dérivable, avec $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1-x^2-1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leqslant 0$.
   Donc f est décroissante, avec $f(0) = 0$, de sorte que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$, et donc $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.
   Par ailleurs, il a été prouvé en cours que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.
   Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
   D'après ce qui précède, on a
   $$n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant n\frac{1}{n}$$
   et donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$.
   On en déduit[3], que $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^1 = e$.

[3] Car la fonction exponentielle est continue en 1.

2. On a $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.
   Par la question 1, on a donc
   $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leqslant \ln(u_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$
   Mais $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
   De même,
   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{2n^4}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
   Et donc par le théorème des gendarmes, $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
   On en déduit alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{1/2} = \sqrt{e}$.

Solution de l'exercice 13.11

1. Une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$.
   Et alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, de sorte que (u_n) est décroissante.
   Étant minorée par 0, elle est convergente.
   Notons ℓ sa limite. Alors $\frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$.
   Mais d'autre part, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
   En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
   Et donc pour $n \geqslant n_0$, $n+1 \geqslant n_0$, et donc $|u_{n+1} - \ell| < \varepsilon$.
   Ainsi, on a nécessairement $\ell = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$, et donc $\ell = 0$.

Remarque

Ceci est trivial lorsqu'on dispose de résultats sur les suites extraites, mais la preuve que nous en donnons ici prouve qu'il n'est pas indispensable de disposer de résultats généraux pour étudier certaines suite extraites.

2. D'une part, en reconnaissant une somme télescopique, on a
   $$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\right).$$
   Et d'autre part, en notant que pour $k \geqslant 1$, $u_k^2 = \frac{u_{k-1}^2}{1+u_{k-1}^2}$, et donc
   $$\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = \frac{1+u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = 1.$$

Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = 1$.

Donc $\dfrac{1}{nu_n^2} = S_n + \dfrac{1}{nu_0^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

On en déduit donc que $nu_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et donc $\sqrt{n}u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Solution de l'exercice 13.12

1. Étudions la monotonie de (u_n) : on a, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\\
&= -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\\
&\leqslant -\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\\
&\leqslant -\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}\\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Détails
Pour tout $k \leqslant n$,
$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}},$$
et on prend bien soin de changer le sens de l'inégalité en raison de la présence du signe $-$.

On en déduit donc que (u_n) est décroissante. Puisqu'elle est clairement positive, elle est minorée[4] et donc par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.

Puisque de plus on a, pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1}_{=1}$, alors, par passage à la limite dans l'inégalité, il vient $0 \leqslant \ell \leqslant 1$.

[4] Par 0.

2. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
u_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&= \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}\\
&< \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\leqslant \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Relation de Chasles.

En passant à la limite dans cette inégalité, il vient donc $\ell \leqslant \dfrac{\ell}{2}$.
Soit encore $\ell \leqslant 0$, mais $\ell \in [0,1]$, donc nécessairement, $\ell = 0$.

Rappel
Si $u_n \to \ell$, alors $u_{2n} \to \ell$ car il s'agit d'une suite extraite de (u_n).

Solution de l'exercice 13.13

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors par les formules d'addition, on a

$$u_{n+1} = \cos(n\alpha+\alpha) = u_n\cos(\alpha) - v_n\sin(\alpha) \text{ et } v_{n+1} = \sin(n\alpha+\alpha) = u_n\sin(\alpha) + v_n\cos(\alpha).$$

2. Supposons que (u_n) converge vers un réel ℓ.
Alors en utilisant $v_n = \dfrac{u_n\cos(\alpha) - u_{n+1}}{\sin(\alpha)}$ il vient $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell(\cos(\alpha)-1)}{\sin(\alpha)}$.
Et de même, si (v_n) converge vers un réel ℓ', alors $u_n = \dfrac{v_{n+1} - v_n\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\ell'(1-\cos(\alpha))}{\sin(\alpha)}$.

Remarque
Puisque α n'est pas nul modulo π, $\sin(\alpha) \neq 0$.

3. Supposons par l'absurde que l'une de ces deux suites converge.
Alors par la question précédente, l'autre aussi, et leurs limites respectives sont liées par les relations $\ell' = \ell \dfrac{\cos(\alpha)-1}{\sin(\alpha)}$ et $\ell = \ell' \dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$.
On a donc $\ell' = -\ell' \dfrac{(1-\cos(\alpha))^2}{\sin^2(\alpha)}$.
Soit encore $\ell' \left(1 + \dfrac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}\right) = 0$.
Et donc nécessairement, $\ell' = 0$, et donc $\ell = 0$. Or, on a toujours $u_n^2 + v_n^2 = 1$, ce qui par passage à la limite nous donne $\ell^2 + \ell'^2 = 1$ soit encore $0 = 1$, ce qui est absurde.
On en déduit que les deux suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.

Solution de l'exercice 13.14

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, posons $f_n : \begin{array}{|ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n - \cos(x) \end{array}$
Alors f_n est continue[5] sur $[0,1]$, strictement croissante car somme de deux fonctions qui le sont[6], et on a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1 - \cos(1) \geqslant 0$.
Donc par le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $[0,1]$.

[5] Car dérivable.
[6] $-\cos$ est strictement croissante sur $[0, \pi]$.

2. Notons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - \cos(x_n)$.
Mais $\cos(x_n) = x_n^n$, donc $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0$.
Ainsi, $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$, et donc par stricte croissance de f_{n+1}, $x_n < x_{n+1}$.
Ainsi, la suite (x_n) est (strictement) croissante.
Étant majorée (par 1), elle converge vers un réel $\ell \in [0,1]$.
Supposons que $\ell < 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n \leqslant \ell$ et donc $0 \leqslant x_n^n \leqslant \ell^n$, si bien que par le théorème des gendarmes, $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc $\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais par continuité de cos, $\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \cos(\ell)$.
Or $\cos(\ell) \geqslant 1$, d'où une contradiction.
On en déduit donc que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Rappel
Puisque f_{n+1} est strictement croissante, pour $a, b \in [0,1]$,
$a \leqslant b \Leftrightarrow f_{n+1}(a) \leqslant f_{n+1}(b)$.

⚠ On n'en déduit pas que $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, ce qui serait absurde puisqu'on aurait alors $\cos(1) = 1$.
En effet, 1^∞ est une forme indéterminée, et donc même si $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, on n'a pas $x_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Solution de l'exercice 13.15

1. On a, en notant que $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{2n}}{2^{2n+2}} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{1}{4} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

La suite (u_n) étant positive, on a donc (u_n) décroissante. Étant positive, elle est minorée, donc converge par le théorème de la limite monotone.

2. Sur le même principe, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1} \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2}{4n^3 + 12n^2 + 2n + 4} < 1.$$

Et donc (v_n) est décroissante, et minorée, donc elle converge.

3. Notons ℓ la limite de (u_n).
Si on avait $\ell > 0$, alors (v_n) tendrait vers $+\infty$, ce qui n'est pas le cas, puisqu'il s'agit d'une suite convergente.
Et donc nécessairement, $\ell = 0$.

Remarque
Étant limite d'une suite positive, on a nécessairement $\ell \geqslant 0$.

Alternative : $u_n = \sqrt{u_n^2} = \sqrt{\dfrac{v_n}{n+1}}$.
Mais $\dfrac{v_n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution de l'exercice 13.16

1. Il s'agit donc de prouver qu'à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \dfrac{1+\ell}{2}$.
Posons $\varepsilon = \dfrac{\ell - 1}{2} > 0$.
Puisque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.
En particulier, pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \ell - \varepsilon \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}$, et donc $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}u_n$.
Une récurrence rapide sur n prouve alors que pour $n \geqslant n_0$, on a
$$u_n \geqslant \left(\frac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$
Mais puisque $\dfrac{1+\ell}{2} > 1$, $\left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque
Le même résultat reste valable si $\ell = +\infty$.

Alternative : une fois qu'on a $u_{n+1} \geqslant \dfrac{1+\ell}{2}u_n$, il est clair que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est croissante.
Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers une limite finie, nécessairement strictement positive car supérieure à u_{n_0}, soit elle diverge vers $+\infty$.
Mais si elle convergeait vers $L > 0$, alors on aurait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{L}{L} = 1 \neq \ell$.
Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Sur le même principe, on prouve que pour n suffisamment grand, u_n est inférieur au terme général d'une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, et donc de limite nulle.
Plus précisément, posons $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2} > 0$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$, et en particulier, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1+\ell}{2}u_n$.
Une récurrence aisée prouve alors que pour $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}$.
Et donc par le théorème des gendarmes, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Les deux questions précédentes ne tirent aucune conclusion lorsque $\ell = 1$. Et pour cause :
   - ►si $u_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   - ►si $u_n = n$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   - ►enfin, si (u_n) est constante, égale à 2, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et évidemment, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.17

Notons qu'une récurrence immédiate prouve que pour tout $(n,k) \in \mathbf{N}^2$, $u_{kn} \leqslant k u_n$.
Commençons par supposer que ℓ existe, et soit $\varepsilon > 0$. Alors, par définition d'une borne inférieure, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que $\ell \leqslant \dfrac{u_{n_0}}{n_0} < \ell + \varepsilon$.
Soit alors $n \in \mathbf{N}^*$, et soit $n = qn_0 + r$ la division euclidienne de n par n_0, avec $r \in [\![0, n_0 - 1]\!]$.
On a donc
$$u_n = u_{qn_0 + r} \leqslant u_{qn_0} + u_r \leqslant q u_{n_0} + u_r.$$
Et donc $\dfrac{u_n}{n} \leqslant \dfrac{q}{n}u_{n_0} + \dfrac{u_r}{n} \leqslant \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\dfrac{qn_0}{n} + \dfrac{u_r}{n}$.
De plus, $\dfrac{qn_0}{n} = \dfrac{n-r}{n} = 1 - \dfrac{r}{n}$.
Donc $\dfrac{u_n}{n} < \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)\left(1 - \dfrac{r}{n}\right) + \dfrac{u_r}{n}$.
Notons alors $M = \max\{u_0, u_1, \cdots, u_{n_0-1}\}$, qui est bien défini puisque plus grand élément d'un ensemble fini.
Alors $\dfrac{u_r}{n} \leqslant \dfrac{M}{n}$.
Donc $\ell \leqslant \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{M}{n}$.
Or, le terme de droite tend vers $\ell + \varepsilon$, donc pour n suffisamment grand[7], on a $\left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{M}{n} \leqslant \left(\ell + \dfrac{\varepsilon}{2}\right) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Remarque
Même si la notation que nous employons ne le fait pas clairement apparaître, r dépend de n. Et donc il n'est pas directement possible d'affirmer que $\frac{u_r}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En revanche, maintenant, M est une constante, et donc $\frac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

[7] C'est-à-dire qu'il existe un n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$...

Et donc $\ell \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \ell + \varepsilon$.
C'est donc la définition de $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Supposons à présent que ℓ n'existe pas, c'est-à-dire que $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ n'est pas majorée.
Soit alors $A \in \mathbf{R}$. Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{u_{n_0}}{n_0} \leqslant A$.
Et alors le même raisonnement que précédemment, avec les mêmes notations, on prouve que pour tout n, $\frac{u_n}{n} \leqslant A + \frac{M}{n}$.
Et puisque $\frac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe un rang N tel que pour $n \geqslant N$, $\frac{M}{n} \leqslant 1$.
Et donc pour $n \geqslant N$, $\frac{u_n}{n} \leqslant A+1$, et donc $\frac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Solution de l'exercice 13.18

1. Notons qu'il n'est pas forcément immédiat de savoir laquelle des deux suites sera croissante, et laquelle sera décroissante. Mais :
   - ▸il n'y a pas besoin de le savoir, l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ nous donnera sa monotonie.
   - ▸si l'une des deux est clairement plus grand que l'autre (et c'est ici le cas de u_n), c'est forcément celle qui est décroissante !

   Soit donc $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{2\sqrt{n+1} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Or, on a $2n+1 \geqslant 2\sqrt{n(n+1)} \Leftrightarrow (2n+1)^2 \geqslant 4n(n+1) \Leftrightarrow 4n^2+4n+1 \geqslant 4n^2+4n$, ce qui est toujours le cas.
Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, et donc (u_n) est décroissante.
De même, on prouve que (v_n) est croissante puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} \\ &= \frac{1+2n+2-2\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Mais $2n+3 \geqslant 2\sqrt{n+2} \Leftrightarrow 4n^2+12n+9 \geqslant 4n+8 \Leftrightarrow 4n^2+8n+1 \geqslant 0$, ce qui est vrai.
Enfin, on a

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= 2\frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 2\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Astuce
On a multiplié au numérateur et au dénominateur par la «quantité conjuguée» de $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, ce qui est souvent un bon moyen de se débarasser des différences de racines.

Donc les deux suites sont adjacentes, et par conséquent tendent vers une même limite $\ell \in \mathbf{R}$.

On a alors $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = u_n + 2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Solution de l'exercice 13.19

Notons que la décroissance au sens de l'inclusion signifie que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

En particulier, $a_{n+1} \geqslant a_n$, et donc la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Enfin, l'hypothèse faite sur la longueur des segments est que $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$.
Et donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
Elles convergent donc vers une même limite ℓ. On a alors $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$, et donc $\ell \in [a_n, b_n]$, de sorte que $\ell \in \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n]$.
Inversement, si $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n]$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
Et donc par passage à la limite, $\ell \leqslant x \leqslant \ell$, de sorte que $x = \ell$.
Ceci prouve donc que $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n] \subset \{\ell\}$.
Et donc par double inclusion, $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$, qui est donc bien un singleton.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.20

Nous allons montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \geqslant 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \text{ car } \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \geqslant 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est croissante.
Par ailleurs, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, $\tan(2x) = \dfrac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$, donc $2\tan(x) = (1-\tan^2(x))\tan(2x)$.
Et donc $\tan(2x) \geqslant 2\tan(x)$.
Donc pour $x = \dfrac{\theta}{2^{n+1}}$, $2\tan\left(\dfrac{\theta}{2^{n+1}}\right) \leqslant \tan\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$.
En multipliant par 2^n, il vient $v_{n+1} \leqslant v_n$: la suite (v_n) est décroissante.

Enfin, pour $n \in \mathbf{N}$,

$$v_n - u_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right) - 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} - 1\right).$$

Mais $\dfrac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$.
Et donc par produit $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien que (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et donc convergent vers une même limite.
Notons qu'on a déjà calculé la limité de (u_n) : c'est θ, et donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$.

> **Rappel**
> Il est classique que
> $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

En réalité, il aurait également été possible de calculer directement la limite de (v_n) avec le même type d'argument de taux d'accroissement, puisque

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$$

et donc $v_n = \theta \dfrac{\tan \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.21

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $S_{2n+2} - S_{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum\limits_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leqslant 0$.
   Donc (S_{2n}) est décroissante.
   De même, on prouverait que (S_{2n+1}) est croissante.
2. On a $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Par conséquent, les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et donc convergent vers **une même limite.**
   Ceci implique alors que (S_n) converge.

> **⚠ Attention !**
> Le terme de (S_{2n}) qui suit S_{2n} n'est sûrement pas S_{2n+1}, qui n'est pas un terme de (S_{2n}), mais $S_{2(n+1)} = S_{2n+2}$.

Solution de l'exercice 13.22

Prouvons par récurrence que $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.
Pour $n = 0$, on a $a_1 = \dfrac{a+b}{2} \leqslant a = a_0$ et $b_1 = \sqrt{ab} \geqslant b = b_0$.
Et il est classique[8] que $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$, si bien que $b_1 \leqslant a_1$.

[8] Cela découle d'une identité remarquable : $4ab \leqslant (a+b)^2$ car $(a-b)^2 \geqslant 0$.

Soit alors n tel que $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.
Alors $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2} \leqslant a_{n+1}$ car $b_{n+1} \leqslant a_{n+1}$.
De même, $b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1}a_{n+1}} \geqslant b_{n+1}$ car $a_{n+1} \geqslant b_{n+1}$.
Enfin, toujours à l'aide de $\sqrt{uv} \leqslant \dfrac{u+v}{2}$, $\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \leqslant \dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}}{2}$ soit encore $b_{n+2} \leqslant a_{n+2}$.
Et donc on a bien $b_{n+1} \leqslant b_{n+2} \leqslant a_{n+2} \leqslant a_{n+1}$, si bien que la propriété est héréditaire.
Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$.

Ainsi, (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante.
Puisque (a_n) est minorée par $b_0 = b$ et (b_n) est majorée par $a_0 = a$, par le théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent.
Notons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
Alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ell_1+\ell_2}{2}$.
Et donc par unicité de la limite[9], $\ell_1 = \dfrac{\ell_1+\ell_2}{2}$, si bien que $\ell_1 = \ell_2$.
Donc (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite.

[9] On a également $a_{n+1} \to \ell_1$.

Commentaire *: cette limite commune aux deux suites (notons la $M(a,b)$) est appelée la moyenne arithmético-géométrique de a et b.*
On peut prouver qu'elle a les propriétés qu'on attend pour une moyenne, par exemple que $M(a,a) = a$ et que $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a,b)$, mais on ne sait pas l'exprimer facilement[10] à l'aide de a et b.

[10] Il existe tout de même des formules à base d'intégrales.

Solution de l'exercice 13.23

Notons $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1} = \frac{a_n + ib_n - 3a_n + 3ib_n}{2} = \frac{-2a_n + 4ib_n}{2} = -a_n + 2ib_n.$$

Et donc[11] $a_{n+1} = -a_n$ et $b_{n+1} = 2b_n$.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n = (-1)^n a_0$ et $b_n = 2^n b_0$.
Ces deux suites[12] sont donc convergentes si et seulement si $a_0 = b_0 = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $z_0 = 0$, auquel cas (z_n) est la suite nulle, qui converge vers 0.

[11] Par identification des parties réelles et imaginaires.

[12] Géométriques.

Solution de l'exercice 13.24

Supposons par l'absurde que (z_n) converge vers un complexe ℓ.
Notons que ce complexe sera nécessairement de module 1 puisque les z_n le sont. En effet, si $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a+ib$, $\mathrm{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $\mathrm{Im}(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$, de sorte que

$$|z_n| = \sqrt{\mathrm{Re}(a_n)^2 + \mathrm{Im}(b_n)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{a^2+b^2} = |\ell|.$$

Et donc si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|z_n| = 1$, alors $|\ell| = 1$.
Mais (z_{2n}) converge également vers ℓ.

Or $z_{2n} = e^{i\ln(2)+i\ln(n)} = e^{i\ln(2)} z_n$.

Et donc $\ell = e^{i\ln(2)}\ell$ su bien que$e^{i\ln(2)} = 1$ et donc $\ln(2) \equiv 0 \quad [2\pi]$.
Mais $\dfrac{\ln(2)}{2\pi} \in]0,1[$ ne peut être entier, ce qui est absurde.

Détails
Nous avons ici utilisé le fait que $\ell \neq 0$, ce qui découle du fait que $|\ell| = 1$.

Solution de l'exercice 13.25

Supposons par l'absurde que $(|z_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$.
Alors $\exists A \in \mathbf{R}$, $\forall N \in \mathbf{N}$, $\exists n \geqslant N$, $|z_n| \leqslant A$.

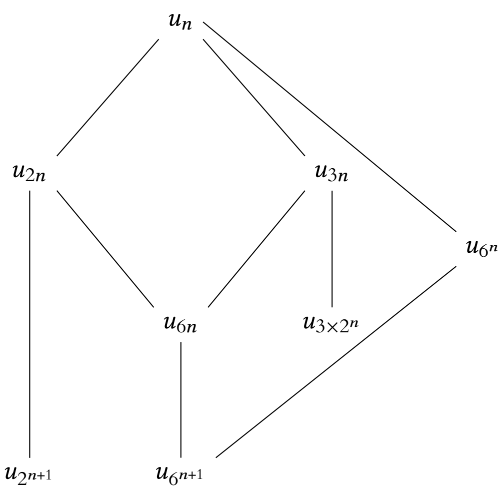
Considérons alors un tel A, et posons $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbf{N} \mid |z_k| \leqslant A\}$.
Puis pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons $\varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n) \mid |z_k| \leqslant A\}$. Notons que $\varphi(n+1)$ est bien défini puisque pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\{k \in \mathbf{N} \mid |z_k| \leqslant A\}$ est non vide.
Ainsi, φ est une extractrice telle que $(z_{\varphi(n)})$ soit bornée.

Mais alors par Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(z_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers un complexe ℓ.
Et alors par injectivité de $\varphi \circ \psi$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|z_{\varphi(\psi(n))} - z_{\varphi(\psi(n+1))}| > 1$.
Or $|z_{\varphi(\psi(n))} - z_{\varphi(\psi(n+1))}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |\ell - \ell| = 0$, ce qui est absurde.

On en déduit donc que $|z_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Solution de l'exercice 13.26

Le dessin suivant représente les liens entre les différentes suites : un trait entre deux suites signifiant que celle du bas est extraite de celle du haut.
La relation «être extraite de» étant transitive, certaines flèches sont implicites et ne sont donc pas dessinées (par exemple, $(u_{6^{n+1}})$ est extraite de (u_{2n}).
Je vous laisse le soin de chercher les extractrices si vous en éprouvez le besoin.



Solution de l'exercice 13.27

Nous savons que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers une même limite**, alors (u_n) converge.
Malheureusement, ici nous ne savons rien des limites de (u_{2n}) et (u_{2n+1}), si ce n'est qu'elles existent.
Prouvons qu'elles sont égales.
Notons $\ell_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$, $\ell_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ et $\ell_3 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{3n}$.
Alors la suite (u_{6n}) est extraite à la fois de (u_{2n}) et de (u_{3n}).
Étant extraite de (u_{2n}), elle converge vers ℓ_1. Mais étant extraite de (u_{3n}), elle converge vers ℓ_3. Et par unicité de sa limite, on a donc $\ell_1 = \ell_3$.
De même, la suite (u_{6n+3}) est à la fois extraite de (u_{2n+1}) (la suite des termes d'ordre impair) et de (u_{6n}). Donc par le même raisonnement, $\ell_2 = \ell_3$.
On en déduit que $\ell_1 = \ell_2$, et donc que (u_n) converge vers $\ell_1 = \ell_2$.

Détails
Un multiple de 6 est à la fois un multiple de 2 et un multiple de 3.

Solution de l'exercice 13.28

Commençons par noter qu'une récurrence rapide prouve que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n > 0$.
On a alors, pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1)u_{n+1} = \sqrt{nu_n}$.
Posons donc $v_n = nu_n$, de sorte que $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$.
Autrement dit, on a $\ln(v_{n+1}) = \dfrac{1}{2}\ln(v_n)$, de sorte que $(\ln(v_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$, $\ln(v_n) = \dfrac{\ln(v_1)}{2^{n-1}}$, de sorte que $v_n = e^{\frac{\ln(v_1)}{2^{n-1}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Et donc $u_n = \dfrac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Solution de l'exercice 13.29

Notons qu'il n'est pas totalement évident que (u_n) soit bien définie, et il faut pour cela s'assurer que pour tout n, $u_n^2 + u_n + (-1)^n$ est bien positif, afin que sa racine soit définie.

Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n \geqslant 1$.
La récurrence est initialisée grâce à l'hypothèse faite sur u_0.
Supposons alors $u_n \geqslant 1$. Alors

$$u_n^2 + u_n + (-1)^n \geqslant u_n^2 + u_n - 1 \geqslant u_n^2 \geqslant 1.$$

Et donc u_{n+1} est bien défini et par croissance de la fonction racine, $u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} \geqslant 1$.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 1$.

Mais alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n^2 + u_n + (-1)^n \geqslant u_n^2 + u_n - 1 \geqslant u_n^2$.
Et donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{u_n^2} \geqslant u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.
Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$.

Supposons par l'absurde que $(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbf{R}$. Notons que nécessairement, $\ell \geqslant 1$, puisque $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 1$.
Alors les deux suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent également vers ℓ.
Or nous savons que $u_{2n+1} = \sqrt{u_{2n}^2 + u_{2n} + 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\ell^2 + \ell + 1}$.
Or, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et donc par unicité de la limite, $\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell + 1}$.
Soit encore $\ell^2 = \ell^2 + \ell + 1 \Leftrightarrow \ell = -1$, ce qui est impossible.
Donc forcément, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

> **$(-1)^n$**
> Notons que si n est pair, on peut faire bien mieux que la majoration que nous venons de donner, mais peu importe, l'essentiel étant que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(-1)^n \geqslant -1$.

Solution de l'exercice 13.30

1. Si (u_n) converge vers un réel L, alors toute suite extraite de (u_n) convergente doit converger vers L. Mais il existe de telles suites extraites par Bolzano-Weierstrass. Puisqu'une suite extraite convergente a pour limite ℓ, par unicité de la limite $L = \ell$.

   Supposons donc par l'absurde que (u_n) ne converge pas vers ℓ.
   Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbf{N}$, $\exists n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$.

   Et alors, il existe une infinité de termes de la suite (u_n) tels que $|u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$.
   Construisons alors une extractrice φ de la manière suivante :
   $\varphi(0) = \min\{k \in \mathbf{N},\ |u_k - \ell| \geqslant \varepsilon\}$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n+1) = \min\{k \geqslant \varphi(n) \mid |u_k - \ell| \geqslant \varepsilon\}$.
   Autrement dit, $(u_{\varphi(n)})$ est la suite formée des termes de (u_n) tels que $|u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$.
   Alors cette suite extraite est encore bornée, et donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice ψ telle que $(u_{\varphi(\psi(n))})$ converge.
   Comme il s'agit d'une suite extraite de (u_n), sa limite est nécessairement ℓ.
   Mais pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{\varphi(\psi(n))} - \ell| \geqslant \varepsilon$, et donc par passage à la limite, $|\ell - \ell| \geqslant \varepsilon$, ce qui est absurde. Et donc (u_n) converge vers ℓ.

> **Détails**
> En effet, nous venons de dire que pour tout N, il existe un $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.
> S'il n'existait qu'un nombre fini de tels termes, cette propriété ne serait pas vérifiée pour N plus grand que tous ces termes.

2. Il semble légitime d'utiliser la première question.
   Considérons une suite $(v_{\varphi(n)})$ extraite de (v_n), que l'on suppose convergente, de limite α.
   Notons alors $w_n = v_n + \dfrac{v_{2n}}{2}$, de sorte que $w_n \to \ell$.
   Alors $w_{\varphi(n)} = v_{\varphi(n)} + \dfrac{v_{2\varphi(n)}}{2}$.
   Donc $v_{2\varphi(n)} = 2(w_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2(\ell - \alpha)$.
   Et $(v_{2\varphi(n)})$ est bien une suite extraite de (v_n), de sorte que nous venons de prouver qu'il existe une suite extraite de (v_n) de limite $\alpha_1 = 2(\ell - \alpha)$.

   Mais alors le procédé peut être itéré : il existe une suite extraite de (v_n) de limite $\alpha_2 = 2(\ell - \alpha_1)$.

   Et ainsi de suite : la suite définie par $\begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_{n+1} = 2(\ell - \alpha_n) \end{cases}$ est formée de limites de suite extraites de (v_n).
   Mais il s'agit là d'une suite arithmético-géométrique de raison -2, dont nous savons donc trouver le terme général.
   Le point fixe de $x \mapsto 2(\ell - x)$ est $x = \frac{2\ell}{3}$, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n = (-2)^n\left(\alpha_0 - \dfrac{2\ell}{3}\right) + \dfrac{2\ell}{3}$.

> **⚠ Attention !**
> $(v_{2\varphi(n)})$ n'est pas (en général) une suite extraite de $(v_{\varphi(n)})$.
> Donc nous ne pouvons rien dire de sa convergence.

Mais une telle suite n'est bornée que si $\alpha_0 = \dfrac{2\ell}{3}$.

Or si (v_n) est à valeurs dans $[-M, M]$, toute suite extraite de (v_n) est encore à valeurs dans $[-M, M]$, et en particulier, si elle converge, alors sa limite se doit d'être dans $[-M, M]$.
Et donc en particulier, (α_n) est bornée.
On en déduit que $\alpha = \alpha_0 = \frac{2\ell}{3}$.
Nous venons ainsi de prouver que toute suite extraite de (v_n) convergente doit avoir $\frac{2\ell}{3}$ pour limite.
Par la question 1, on en déduit que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2\ell}{3}$.

Remarque

Il était de toutes façons prévisible que si u_n possédait une limite ℓ', celle-ci devait vérifier

$$\ell = \ell' + \frac{\ell'}{2} \Leftrightarrow \ell' = \frac{2\ell}{3}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.31

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{n}{n+1} \leqslant 1$, et donc 1 est un majorant de A.
   De plus, si on pose $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}$, alors (u_n) est une suite d'éléments de A, qui tend vers 1, et donc $1 = \sup A$.
   De même, il est facile de constater que -1 est un minorant de A et que $-\dfrac{2n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$, et donc $-1 = \inf A$.
2. Il est évident que 0 est le plus petit élément de B, et donc sa borne inférieure.
   D'autre part, il est classique que $2pq \leqslant p^2 + q^2$, et donc $\dfrac{pq}{p^2+q^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$, avec égalité si et seulement si $p = q$.
   Et donc $\dfrac{1}{2}$ est le plus grand élément de B, et donc sa borne supérieure.
3. Il est clair que C est minorée par 0, et si on pose $c_n = \dfrac{2^n}{1+3^n}$, alors (c_n) est une suite à valeurs dans C qui tend vers 0, et donc $0 = \inf C$.
   D'autre part, pour tout $(m, n) \in \mathbf{N}^2$, $\dfrac{2^n}{2^m + 3^{m+n}} \leqslant \dfrac{2^n}{1+3^n}$.
   Or, $1 + 3^{n+1} \geqslant 2(1+3^n)$, de sorte que
   $$\frac{2^{n+1}}{1+3^{n+1}} = \frac{2\cdot 2^n}{1+3^{n+1}} \leqslant \frac{2^n}{1+3^n}.$$
   Donc la suite de terme général $\dfrac{2^n}{1+3^n}$ est décroissante et donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{2^n}{1+3^n} \leqslant \dfrac{2^0}{1+3^0} = \dfrac{1}{2}$.
   Ainsi, pour tout $(m, n) \in \mathbf{N}^2$, $\dfrac{2^n}{2^m + 3^{n+m}} \leqslant \dfrac{1}{2}$, de sorte que $\dfrac{1}{2} = \max C$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 13.32

1. On reconnaît le taux d'accroissement en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.
   Mais f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, avec $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$, et donc
   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = f'(0) = \frac{1}{2}.$$

2.a. Il s'agit surtout de s'assurer que pour n suffisamment grand, $q^2n^2 + 2np$ est positif, ce qui n'est pas automatique si $r < 0$ car $p < 0$.
Mais $q^2n^2 + 2np = n\left(q^2n + 2p\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si bien qu'à partir d'un certain rang, $q^2n^2 + 2np > 0$.

2.b. On a donc, pour n suffisamment grand pour que u_n soit défini,
$$u_n = \sqrt{q^2n^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2np}{q^2n^2}} - 1\right) = qn\left(\sqrt{1+\frac{2p}{q^2n}} - 1\right) = \frac{2p}{q} \times \frac{q^2n}{2p}\left(\sqrt{1+\frac{2p}{q^2n}} - 1\right).$$
Mais par la question 1, puisque $\frac{2p}{q^2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
$$\frac{q^2n}{2p}\left(\sqrt{1+\frac{2p}{q^2n}}-1\right) = \frac{\sqrt{1+\frac{2p}{q^2n}}-1}{\frac{2p}{q^2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$
Et donc $\sqrt{q^2n^2+2np} - \sqrt{q^2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2p}{q}\dfrac{1}{2} = \dfrac{p}{q} = r$.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$, et soit $n \in \mathbf{N}^*$. Par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, il existe $r_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbf{Q}$ tel que $x - \frac{1}{2n} < r_n < x + \frac{1}{2n}$.

Et par la question précédente, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\left|\sqrt{q_n^2 n_0^2 + 2n_0 p_n} - \sqrt{q_n^2 n_0^2} - r_n\right| < \frac{1}{2n}$.

Posons alors $v_n = \sqrt{q_n^2 n_0^2 + 2n_0 p_n} - \sqrt{q_n^2 n_0^2}$, qui est un élément de A.

Alors $|v_n - x| \leqslant |v_n - r_n| + |r_n - x| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n}$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = x$, si bien que x est la limite d'une suite d'éléments de A.

Ceci étant vrai pour tout réel x, A est dense dans $\mathbf{R}$.

Rappel

Une partie A est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.