

# TD 13 : SUITES NUMÉRIQUES

## ► Convergence des suites

**EXERCICE 13.1** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites à valeurs dans  $[0, 1]$ , telles que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$ .

F

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ .

**EXERCICE 13.2** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ .

F

Est-il vrai que si  $(v_n)$  converge, alors  $(u_n)$  converge ? Et si on ajoute l'hypothèse que  $(u_n)$  est croissante ?

**EXERCICE 13.3** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites, et soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq a$  et  $v_n \leq b$ .

PD

Montrer que si  $u_n + v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + b$ , alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  et  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ .

**EXERCICE 13.4** Montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  à valeurs dans  $\mathbf{Z}$  est convergente si et seulement si elle est stationnaire. Que dire alors de la limite de  $(u_n)$  ?

PD

**EXERCICE 13.5 Vrai ou Faux ?**

PD

Toutes les suites considérées ici sont réelles.

- |  |  |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.</li> <li>2. le produit de deux suites minorées est minorée.</li> <li>3. une suite qui tend vers <math>-\infty</math> est majorée.</li> <li>4. si <math>\forall n \in \mathbf{N}</math>, <math>u_n &gt; \alpha &gt; 0</math> et si <math>(u_n)</math> converge vers <math>\ell</math>, alors <math>\ell &gt; 0</math>.</li> <li>5. toute suite convergente est minorée.</li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>6. une suite strictement croissante et minorée tend vers <math>+\infty</math>.</li> <li>7. soit <math>(u_n)</math> une suite réelle. Si <math>u_n^4 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0</math>, alors <math>u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0</math>.</li> <li>8. Soit <math>(u_n)</math> une suite réelle. Si <math>u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1</math>, alors <math>u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1</math>.</li> <li>9. <math> u_n  \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty</math> si et seulement si <math>u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty</math> ou <math>u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty</math>.</li> </ol> |
|--|--|

**EXERCICE 13.6** Déterminer les limites des suites dont le terme général est donné par :

PD

- |   |  |   |
|---|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\frac{1 - \sin^2(2n)}{\sqrt{n}}</math></li> <li>2. <math>\sqrt{n} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. <math>\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}</math></li> <li>4. <math>\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>5. <math>\sum_{k=1}^n \frac{n^2 + 2kn \sin(k)}{2n^4 + n^2 \ln(k)}</math></li> <li>6. <math>\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}</math>, <math>a, b \in \mathbf{R}_+^*</math></li> </ol> |
|---|--|---|

**EXERCICE 13.7** Quelques séries de Riemann

PD

1. Soit  $\alpha \geq 2$ . On pose, pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ .

Montrer que pour tout  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ , et en déduire que  $(u_n)$  converge.

2. On pose, pour tout  $n \geq 1$ ,  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

**EXERCICE 13.8**

PD

1. Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ . En déduire la limite de  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

2. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ .

Montrer que la suite  $(u_n)_n$  converge, et calculer sa limite.

**EXERCICE 13.9** Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_0 \in \mathbf{R}_+^*$  et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}$ .

AD

1. Prouver que  $(u_n)$  est convergente, puis déterminer sa limite.

2. En calculant de deux manières la somme  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} \right)$ , montrer que  $\sqrt{n} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

**EXERCICE 13.10** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite définie par :  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

AD

1. Montrer que  $(u_n)$  est convergente, et que sa limite  $\ell$  est dans le segment  $[0, 1]$ .
2. Montrer que pour tout  $n$ ,  $u_{2n} < \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$ . En déduire la valeur de  $\ell$ .

**EXERCICE 13.11** Soit  $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$ . On pose pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n = \cos(n\alpha)$  et  $v_n = \sin(n\alpha)$ .

1. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et  $v_n$ . Même question pour  $v_{n+1}$ .
2. En déduire que si l'une des deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  converge, alors l'autre aussi.
3. Prouver alors que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  divergent.

**EXERCICE 13.12**

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , l'équation  $x^n = \cos(x)$ , d'inconnue  $x \in [0, 1]$  possède une unique solution, que l'on notera  $x_n$ .
2. Étudier la convergence de la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$ , et le cas échéant, préciser sa limite.

**EXERCICE 13.13** Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $u_n = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ .

1. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .
2. On pose  $v_n = (n+1)u_n^2$ . Montrer que  $(v_n)$  converge.
3. En déduire la limite de  $(u_n)$ .

**EXERCICE 13.14 Règle de d'Alembert**

Soit  $(u_n)$  une suite à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe  $\ell \in \mathbf{R}$  tel que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

1. On suppose que  $\ell > 1$ . Montrer qu'il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $u_{n+1} > \frac{1+\ell}{2}u_n$ .  
En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .
2. On suppose que  $\ell < 1$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .
3. Donner des exemples de suites  $(u_n)$  pour lesquelles  $\ell = 1$ , qui tendent vers 0, qui tendent vers un réel non nul, ou encore qui tendent vers  $+\infty$ .

**EXERCICE 13.15 Suites sous-additives et lemme de Fekete (Oral ENS)**

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite réelle telle que  $\forall (m, n) \in \mathbf{N}^2$ ,  $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ .

Montrer que  $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell = \inf \left\{ \frac{u_n}{n}, n \geq 1 \right\}$  si  $\ell$  existe et vers  $-\infty$  sinon.

## ► Suites adjacentes

**EXERCICE 13.16** Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ .

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes, et en déduire la limite de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

**EXERCICE 13.17 Théorème des segments emboîtés**

Soit  $([a_n, b_n])_n$  une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments non vides de  $\mathbf{R}$  et dont les longueurs tendent vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$  est un singleton.

**EXERCICE 13.18** Soit  $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ . Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $u_n = 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$  et  $v_n = 2^n \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ .

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

**EXERCICE 13.19 Critère des séries alternées**

Soit  $(u_n)$  une suite décroissante de limite nulle.

Pour  $n \in \mathbf{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ .

1. Étudier les monotonicités de  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$ .
2. En déduire que  $(S_n)$  converge.

### EXERCICE 13.20 Moyenne arithmético-géométrique

Soient  $a > b$  deux réels positifs. On définit deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  en posant  $a_0 = a$ ,  $b_0 = b$ , et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers une même limite qu'on ne cherchera pas à calculer.

**AD**

#### ► Suites complexes

**EXERCICE 13.21** Soit  $(z_n)_n$  une suite à valeurs complexes vérifiant, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $z_{n+1} = \frac{z_n - 3\overline{z_n}}{2}$ .

Donner l'expression de  $z_n$  en fonction de  $n$ , et étudier la convergence de la suite  $(z_n)$ .

**F**

**EXERCICE 13.22** Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on pose  $z_n = e^{i \ln n}$ . Montrer que  $(z_n)$  diverge.

**AD**

#### ► Suites extraites

**EXERCICE 13.23** Soit  $(u_n)_n$  une suite (réelle ou complexe). Parmi les suites suivantes, toutes extraites de  $(u_n)$ , trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{2n})_n, (u_{3n})_n, (u_{6n})_n, (u_{6^n})_n, (u_{6^{n+1}})_n, (u_{2^{n+1}})_n, (u_{3 \times 2^n})_n.$$

**EXERCICE 13.24** Soit  $(u_n)$  une suite telle que les trois suites extraites  $(u_{2n})$ ,  $(u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  convergent. Montrer que  $(u_n)$  converge.

**AD**

**EXERCICE 13.25** Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite de terme général  $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ . Autrement dit,  $u_n$  est la partie fractionnaire de  $\sqrt{n}$ .

**D**

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$ .
2. Étudier  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n^2+n}$ . En déduire que la suite  $(u_n)$  n'a pas de limite (finie ou infinie).
3. Déterminer, pour  $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ ,  $a \leq b$ , la limite de  $u_{n^2 b^2 + 2na}$ .
4. Soit  $x \in [0, 1]$ . Montrer qu'il existe une suite extraite de  $(u_n)$  qui converge vers  $x$ .
5. Prouver que  $\{\sqrt{n} - \sqrt{m}, (m, n) \in \mathbf{N}^2\}$  est dense dans  $\mathbf{R}$ .

**EXERCICE 13.26** Soit  $\alpha \neq 0 \pmod{\pi}$ .

**AD**

1. Montrer que si  $(\sin(n\alpha))_n$  converge, alors  $(\cos(n\alpha))_n$  converge également, et donner une relation entre leurs deux limites.
2. En déduire que  $(\sin(n\alpha))_n$  et  $(\cos(n\alpha))_n$  divergent.

**EXERCICE 13.27** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  une suite telle que  $u_1 > 0$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_{n+1} = \frac{\sqrt{nu_n}}{n+1}$ .

**AD**

Montrer que la suite  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.

**EXERCICE 13.28** Soit  $(u_n)$  une suite telle que  $u_0 \geq 1$  et  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} - (-1)^n$ .  
Montrer que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

**AD**

**EXERCICE 13.29** Oral ENS

**TD**

1. Soit  $(u_n)$  une suite bornée. On suppose qu'il existe un réel  $\ell$  tel que toute suite convergente extraite de  $(u_n)$  possède  $\ell$  pour limite. Montrer que  $(u_n)$  est convergente.
2. Soit  $(v_n)$  une suite bornée telle que  $v_n + \frac{v_{2n}}{2}$  converge vers un réel  $\ell$ . Montrer que  $(v_n)$  est convergente.

#### ► Bornes supérieures

**EXERCICE 13.30** Déterminer les bornes supérieures et inférieures, si elles existent, des ensembles de réels suivants :

**PD**

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1}, n \in \mathbf{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{pq}{p^2 + q^2}, (p, q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N} \right\}, \quad C = \left\{ \frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}}, (m, n) \in \mathbf{N}^2 \right\}$$

## CORRECTION DES EXERCICES DU TD 13

**SOLUTION DE L'EXERCICE 13.1**

Puisque pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $0 \leq v_n \leq 1$ , alors  $0 \leq u_n v_n \leq u_n \leq 1$ .

Et donc par le théorème des gendarmes,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

On prouve de même que  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

**SOLUTION DE L'EXERCICE 13.2**

C'est faux, par exemple si on prend les suites définies pour tout  $n \in \mathbf{N}$  par  $u_n = (-1)^n$  et  $v_n = 2$ .

C'est en revanche vrai si on ajoute l'hypothèse que  $(u_n)$  est croissante, et cela découle du théorème de la limite monotone.

En effet,  $(v_n)$  étant convergente, elle est majorée, et donc tout majorant de  $(v_n)$  est aussi un majorant de  $(u_n)$ .

Puisque  $(u_n)$  est croissante et majorée, alors elle converge.

**SOLUTION DE L'EXERCICE 13.3**

Là encore, l'erreur à ne pas commettre serait de supposer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  existent : rien ne permet de garantir a priori que ces suites sont convergentes !

**Première option :** pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n \leq b$  et donc  $-v_n \geq -b$ .

On en déduit que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$u_n + v_n - b \leq \underbrace{u_n + v_n - v_n}_{=u_n} \leq a.$$

Mais  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n - b = a + b - b = a$ , et donc par le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ .

On a alors  $v_n = u_n + v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a + b - a = b$ .

**Deuxième option :** en «epsilonant».

Soit  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n + v_n > a + b - \varepsilon$ .

Et puisque pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $v_n \leq b \Leftrightarrow -v_n \geq -b$ , alors pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$u_n = u_n + v_n - v_n > a + b - \varepsilon + b = a - \varepsilon.$$

Et donc pour tout  $n \geq n_0$ ,  $a - \varepsilon < u_n \leq a$ , si bien que  $|u_n - a| < \varepsilon$ .

Nous venons donc de prouver que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon$ , c'est-à-dire que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ .

Et alors  $v_n = u_n + v_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a + b - a = b$ .

**SOLUTION DE L'EXERCICE 13.4**

Il est évident qu'une suite stationnaire<sup>1</sup>, est convergente.

Inversement, soit  $(u_n)_n$  une suite convergente d'entiers, et notons  $\ell$  sa limite.

Soit alors  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ . Par définition de la convergence, alors il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour

$$n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2}.$$

Et alors pour  $n \geq n_0$ , on a

$$|u_n - u_{n_0}| = |(u_n - \ell) + (\ell - u_{n_0})| \leq |u_n - \ell| + |u_{n_0} - \ell| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ainsi, pour  $n \geq n_0$ ,  $u_n - u_{n_0} \in \mathbf{Z}$  et  $|u_n - u_{n_0}| < 1$ .

On en déduit<sup>2</sup> que  $u_n - u_{n_0} = 0$ , et donc  $u_n = u_{n_0}$ . Et donc  $(u_n)$  est stationnaire.

**SOLUTION DE L'EXERCICE 13.5**

1. **Faux.** La suite de terme général  $1 + \frac{1}{n}$  est décroissante, minorée par 0, et tend vers 1.

2. **Faux.** Posons  $u_n = -1$  et  $v_n = n$ . Alors  $(u_n)$  est minorée, puisque constante, et  $(v_n)$  est minorée, puisqu'elle tend vers  $+\infty$ .

Pourtant  $u_n v_n = -n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ , et donc ne saurait être minorée.

**! Danger !**

On ne sait pas encore que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent. Il est hors de question d'utiliser alors les limites de ces suites avant d'avoir prouvé leur existence !

**! Danger !**

L'inégalité  $u_n \leq v_n$  ne suffit pas à prouver que  $(u_n)$  est majorée, puisque  $v_n$  n'est pas une constante indépendante de  $n$ .

**Remarque**

Ce qui garantit ici la convergence de  $(v_n)$  c'est que la somme de deux suites convergentes est convergente (résultat prouvé en cours).

<sup>1</sup> À valeurs entières ou non.

**Méthode**

Dans la définition de suite convergente, la condition est valable **pour tout**  $\varepsilon > 0$ . On peut donc le choisir comme bon nous chante !

<sup>2</sup> Bien entendu, si on ne suppose plus la suite à valeurs dans  $\mathbf{Z}$ , ce passage n'est plus valable.

**Remarque**

Notons au passage que ceci prouve un résultat assez intuitif :  $\ell = u_{n_0} \in \mathbf{Z}$ . Mais on ne peut pas partir du principe que  $\ell \in \mathbf{Z}$  pour prouver le résultat. Ou alors il faut le justifier.

3. **Vrai.** C'est du cours.
4. **Vrai.** En effet, on a  $l \geq \alpha > 0$ .
5. **Vrai.** Nous savons que toute suite convergente est même bornée.
6. **Faux.** Toute suite croissante est minorée par son premier terme. Mais nous savons qu'il existe des suites strictement croissantes convergentes, par exemple  $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ .
7. **Vrai.** Nous pourrions utiliser la racine carrée, mais nous n'avons pour l'instant rien prouvé au sujet des limites des racines.  
Notons plutôt que puisque  $u_n^4 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$ , alors à partir d'un certain rang  $n_0$ ,  $0 \leq u_n^4 \leq 1$ .  
On a alors nécessairement
8. **Faux.** Par exemple  $u_n = (-1)^n$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.6

1. Posons  $u_n = \frac{1 - \sin^2(2n)}{\sqrt{n}}$ . Alors  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ .  
Or,  $\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . Ceci peut sembler évident, mais n'a pas encore été prouvé avec les outils à notre disposition cette année...  
Soit donc  $A > 0$ . Alors pour  $n \geq \lfloor A^2 \rfloor + 1$ , on a  $n^2 \geq A$  et donc  $\sqrt{n} \geq A$ . Donc  $\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , de sorte que  $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et donc par le théorème des gendarmes,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
2. Pour  $n \geq 2$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}} < 1$ , et donc  $\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor = 0$ . Et donc  $n \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{n}} \right\rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
3. Nous savons que  $0 \leq \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Donc comme à la question 1,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} = 0$ .
4. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $0 \leq \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n^2}$ .  
Et donc en sommant ces inégalités,  $0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ . On en déduit par le théorème des gendarmes,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
5. Par l'inégalité triangulaire,

$$0 \leq |u_n| \leq \sum_{k=1}^n \left| \frac{n^2 + 2nk \sin k}{2n^4 + n^2 \ln(k)} \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{n^2 + 2n^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^n \frac{3n^2}{2n^4} \leq \frac{3n^3}{2n^4}.$$

Donc par le théorème des gendarmes,  $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

6. Distinguons plusieurs cas. Il est clair que si  $a = b$ , alors pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .  
► Si  $a < b$ , alors le terme « le plus fort » est  $b^n$ . Donc factorisons numérateur et dénominateur par  $b^n$  :

$$\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} = \frac{b^n \left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}{b^n \left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.$$

► De même, si  $a > b$ , en factorisant par  $a^n$ , il vient  $\frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.7

1. Pour  $k \geq 2$ , on a

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2} \geq \frac{1}{k^\alpha}.$$

En sommant ces inégalités, on a donc, pour  $n \geq 2$ ,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$

Or, cette dernière somme est une somme télescopique, qui vaut  $1 - \frac{1}{n} \leq 1$ .

On en déduit que  $u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + 1 \leq 2$ .

#### Remarque

► Pas de forme indéterminée ici : on a la suite nulle !

#### Détails

Puisque  $a < b$ ,  $0 \leq \frac{a}{b} < 1$ , donc

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'autre part,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0$ , de sorte que  $(u_n)$  est croissante.

Par le théorème de la limite monotone,  $(u_n)$  étant croissante et majorée, elle converge.

2. On a

$$v_{2n} - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Puisque  $(v_n)$  est croissante, par le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers une limite finie  $\ell$ , soit elle tend vers  $+\infty$ .

Or, si  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , alors la suite extraite  $(v_{2n})_n$  converge également vers  $\ell$ .

Et donc  $v_{2n} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Mais puisque  $v_{2n} - v_n \geq \frac{1}{2}$ , en passant à la limite, il vient  $0 \geq \frac{1}{2}$ , ce qui est absurde.

On en déduit donc que  $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.8

1. Étudions la fonction  $f : x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$  sur  $\mathbf{R}_+$ .

Elle est dérivable, avec  $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1-x^2-1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$ .

Donc  $f$  est décroissante, avec  $f(0) = 0$ , de sorte que pour tout  $x \geq 0$ ,  $f(x) \leq 0$ , et donc

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x).$$

De même, une étude de  $x \mapsto \ln(1+x) - x$  prouve que pour tout  $x \geq 0$ ,  $\ln(1+x) \leq x$ .

Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1+\frac{1}{n})}$ .

D'après ce qui précède, on a

$$n \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) \leq n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \leq n \frac{1}{n}$$

et donc par le théorème des gendarmes,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) = 1$ .

On en déduit<sup>3</sup>, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln(1+\frac{1}{n})} = e^1 = e$ .

2. On a  $\ln(u_n) = \sum_{k=1}^n \ln \left( 1 + \frac{k}{n^2} \right)$ .

Par la question 1, on a donc

$$\sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \right) \leq \ln(u_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}.$$

$$\text{Mais } \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

De même,

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2n^4} = \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{2n^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Et donc par le théorème des gendarmes,  $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ .

On en déduit alors que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{1/2} = \sqrt{e}$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.9

1. Une récurrence facile prouve que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \geq 0$ .

Et alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ , de sorte que  $(u_n)$  est décroissante. Étant minorée par 0, elle est convergente.

Notons  $\ell$  sa limite. Alors  $\frac{u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$ .

Mais d'autre part,  $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

#### Remarque

Notons au passage que sa limite est alors inférieure ou égale à 2, le majorant obtenu précédemment.

#### Croissance

La croissance de  $(v_n)$  se prouve de la même manière que celle de  $(u_n)$  à la question précédente, mais elle est assez intuitive : pour passer de  $v_n$  à  $v_{n+1}$ , il faut ajouter  $\frac{1}{n+1} \geq 0$ , donc  $v_{n+1} \geq v_n$ .

<sup>3</sup> Car la fonction exponentielle est continue en 1.

#### Remarque

Ceci est trivial lorsqu'on dispose de résultats sur les suites extraites, mais la preuve que nous en donnons ici prouve qu'il n'est pas indispensable de disposer de résultats généraux pour étudier certaines suites extraites.

En effet, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|u_n - \ell| < \varepsilon$ .

Et donc pour  $n \geq n_0$ ,  $n+1 \geq n_0$ , et donc  $|u_{n+1} - \ell| < \varepsilon$ .

Ainsi, on a nécessairement  $\ell = \frac{\ell}{\sqrt{1+\ell^2}}$ , et donc  $\ell = 0$ .

2. D'une part, en reconnaissant une somme télescopique, on a

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} \right) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right).$$

Et d'autre part, en notant que pour  $k \geq 1$ ,  $u_k^2 = \frac{u_{k-1}^2}{1+u_{k-1}^2}$ , et donc

$$\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = \frac{1+u_{k-1}^2}{u_{k-1}^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} = 1.$$

Et donc  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = 1$ .

Donc  $\frac{1}{nu_n^2} = S_n + \frac{1}{nu_0^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

On en déduit donc que  $nu_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , et donc  $\sqrt{nu_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.10

1. Étudions la monotonie de  $(u_n)$  : on a, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\ &\leq -\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\ &\leq -\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left( \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $(u_n)$  est décroissante. Puisqu'elle est clairement positive, elle est minorée<sup>4</sup> et donc par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel  $\ell$ .

Puisque de plus on a, pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 \leq u_n \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1}_{=1}$ , alors, par passage à la limite dans

l'inégalité, il vient  $0 \leq \ell \leq 1$ .

2. Pour  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &< \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

#### Détails

Pour tout  $k \leq n$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et on prend bien soin de changer le sens de l'inégalité en raison de la présence du signe  $-$ .

<sup>4</sup> Par 0.

Relation de Chasles.

$$\leq \frac{u_n}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, il vient donc  $\ell \leq \frac{\ell}{2}$ .  
Soit encore  $\ell \leq 0$ , mais  $\ell \in [0, 1]$ , donc nécessairement,  $\ell = 0$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.11

1. Soit  $n \in \mathbf{N}$ . Alors par les formules d'addition, on a

$$u_{n+1} = \cos(n\alpha + \alpha) = u_n \cos(\alpha) - v_n \sin(\alpha) \text{ et } v_{n+1} = \sin(n\alpha + \alpha) = u_n \sin(\alpha) + v_n \cos(\alpha).$$

2. Supposons que  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$ .

$$\text{Alors en utilisant } v_n = \frac{u_n \cos(\alpha) - u_{n+1}}{\sin(\alpha)} \text{ il vient } v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell(\cos(\alpha) - 1)}{\sin(\alpha)}.$$

$$\text{Et de même, si } (v_n) \text{ converge vers un réel } \ell', \text{ alors } u_n = \frac{v_{n+1} - v_n \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell'(1 - \cos(\alpha))}{\sin(\alpha)}.$$

3. Supposons par l'absurde que l'une de ces deux suites converge.

Alors par la question précédente, l'autre aussi, et leurs limites respectives sont liées par les relations  $\ell' = \ell \frac{\cos(\alpha) - 1}{\sin(\alpha)}$  et  $\ell = \ell' \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ .

$$\text{On a donc } \ell' = \ell' \frac{(1 - \cos(\alpha))^2}{\sin^2(\alpha)}.$$

$$\text{Soit encore } \ell' \left( 1 + \frac{(1 - \cos(\alpha))^2}{\sin^2(\alpha)} \right) = 0.$$

Et donc nécessairement,  $\ell' = 1$ , et donc  $\ell = 1$ . Or, on a toujours  $u_n^2 + v_n^2 = 1$ , ce qui par passage à la limite nous donne  $\ell^2 + \ell'^2 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ , ce qui est absurde.

On en déduit que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont divergentes.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.12

1. Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , posons  $f_n : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x^n - \cos(x) \end{cases}$

Alors  $f_n$  est continue<sup>5</sup> sur  $[0, 1]$ , strictement croissante car somme de deux fonctions qui le sont<sup>6</sup>, et on a  $f_n(0) = -1$  et  $f_n(1) = 1 - \cos(1) > 0$ .

Donc par le théorème de la bijection, l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une unique solution dans  $[0, 1]$ .

2. Notons que  $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - \cos(x_n)$ .

$$\text{Mais } \cos(x_n) = x_n^n, \text{ donc } f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - x_n^n = x_n^n(x_n - 1) < 0.$$

Or,  $f_n$  est strictement croissante, et  $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ , donc on en déduit que  $x_n \leq x_{n+1}$ .

Ainsi, la suite  $(x_n)$  est croissante. Étant majorée (par 1), elle converge vers un réel  $\ell \in [0, 1]$ .  
Supposons que  $\ell < 1$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $x_n \leq \ell$  et donc  $0 \leq x_n^n \leq \ell^n$ , si bien que  $x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Donc  $\cos(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , ce qui n'est pas possible puisque pour  $x \in [0, 1]$ ,  $\underbrace{\cos(1)}_{>0} \leq \cos(x) \leq 1$ .

On en déduit donc que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .



On n'en déduit pas que  $x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = \cos(1)$ , ce qui serait absurde<sup>7</sup>.

En effet,  $1^\infty$  est une forme indéterminée, et donc même si  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , on n'a pas  $x_n^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.13

1. On a, en notant que  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{2n} (2n+2)! n!^2}{2^{2n+2} (n+1)!^2 (2n)!} = \frac{1}{4} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

La suite  $(u_n)$  étant positive, on a donc  $(u_n)$  décroissante. Étant positive, elle est minorée, donc converge par le théorème de la limite monotone.

#### Rappel

Si  $u_n \rightarrow \ell$ , alors  $u_{2n} \rightarrow \ell$  car il s'agit d'une suite extraite de  $(u_n)$ .

#### Remarque

Puisque  $\alpha$  n'est pas nul modulo  $\pi$ ,  $\sin(\alpha) \neq 0$ .

<sup>5</sup> Car dérivable.

<sup>6</sup>  $-\cos$  est strictement croissante sur  $[0, \pi]$ .

#### Rappel

Puisque  $f_{n+1}$  est strictement croissante, pour  $a, b \in [0, 1]$ ,

$$a \leq b \Leftrightarrow f_{n+1}(a) \leq f_{n+1}(b).$$

<sup>7</sup> Puisque  $\cos(1) \in ]0, 1[$ .



2. Sur le même principe, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1} \frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2}{4n^3 + 12n^2 + 2n + 4} < 1.$$

Et donc  $(v_n)$  est décroissante, et minorée, donc elle converge.

3. Notons  $\ell$  la limite de  $(u_n)$ .

Si on avait  $\ell > 0$ , alors  $(v_n)$  tendrait vers  $+\infty$ , ce qui n'est pas le cas, puisqu'il s'agit d'une suite convergente.

Et donc nécessairement,  $\ell = 0$ .

#### Remarque

Étant limite d'une suite positive, on a nécessairement  $\ell \geq 0$ .

**Alternative** :  $u_n = \sqrt{u_n^2} = \sqrt{\frac{v_n}{n+1}}$ .

Mais  $\frac{v_n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

#### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.14

1. Il s'agit donc de prouver qu'à partir d'un certain rang,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{1+\ell}{2}$ .

Posons  $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$ .

Puisque  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ , alors il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \varepsilon$ .

En particulier, pour  $n \geq n_0$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \varepsilon \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{1+\ell}{2}$ , et donc  $u_{n+1} \geq \frac{1+\ell}{2} u_n$ .

Une récurrence rapide sur  $n$  prouve alors que pour  $n \geq n_0$ , on a

$$u_n \geq \left( \frac{1+\ell}{2} \right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Mais puisque  $\frac{1+\ell}{2} > 1$ ,  $\left( \frac{1+\ell}{2} \right)^{n-n_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**Alternative** : une fois qu'on a  $u_{n+1} \geq \frac{1+\ell}{2} u_n$ , il est clair que  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante.

Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers une limite finie, nécessairement strictement positive car supérieure à  $u_{n_0}$ , soit elle diverge vers  $+\infty$ .

Mais si elle convergerait vers  $L > 0$ , alors on aurait  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{L}{L} = 1 \neq \ell$ .

Donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

2. Sur le même principe, on prouve que pour  $n$  suffisamment grand,  $u_n$  est inférieur au terme général d'une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1, et donc de limite nulle.

Plus précisément, posons  $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$ . Alors il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell \right| \leq \varepsilon, \text{ et en particulier, } u_{n+1} \leq \frac{1+\ell}{2} u_n.$$

Une récurrence aisée prouve alors que pour  $n \geq n_0$ ,  $0 \leq u_n \leq \left( \frac{1+\ell}{2} \right)^{n-n_0} u_{n_0}$ .

Et donc par le théorème des gendarmes,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

3. Les deux questions précédentes ne tirent aucune conclusion lorsque  $\ell = 1$ . Et pour cause :

► si  $u_n = \frac{1}{n}$ , alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , et  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

► si  $u_n = n$ , alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , et  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

► enfin, si  $(u_n)$  est constante, égale à 2, alors  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ , et évidemment,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ .

#### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.15

Notons qu'une récurrence immédiate prouve que pour tout  $(n, k) \in \mathbf{N}^2$ ,  $u_{kn} \leq k u_n$ .

Commençons par supposer que  $\ell$  existe, et soit  $\varepsilon > 0$ . Alors, par définition d'une borne inférieure, il existe  $n_0 \in \mathbf{N}^*$  tel que  $\ell \leq \frac{u_{n_0}}{n_0} < \ell + \varepsilon$ .

#### Remarque

Le même résultat reste valable si  $\ell = +\infty$ .

Soit alors  $n \in \mathbf{N}^*$ , et soit  $n = qn_0 + r$  la division euclidienne de  $n$  par  $n_0$ , avec  $r \in \llbracket 0, n_0 - 1 \rrbracket$ .

On a donc

$$u_n = u_{qn_0+r} \leq u_{qn_0} + u_r \leq qu_{n_0} + u_r.$$

$$\text{Et donc } \frac{u_n}{n} \leq \frac{q}{n} u_{n_0} + \frac{u_r}{n} \leq \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{qn_0}{n} + \frac{u_r}{n}.$$

$$\text{De plus, } \frac{qn_0}{n} = \frac{n-r}{n} = 1 - \frac{r}{n}.$$

$$\text{Donc } \frac{u_n}{n} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{r}{n}\right) + \frac{u_r}{n}.$$

Notons alors  $M = \max\{u_0, u_1, \dots, u_{n_0-1}\}$ , qui est bien défini puisque plus grand élément d'un ensemble fini.

$$\text{Alors } \frac{u_r}{n} \leq \frac{M}{n}.$$

$$\text{Donc } \ell \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{M}{n}.$$

Or, le terme de droite tend vers  $\ell + \varepsilon$ , donc pour  $n$  suffisamment grand<sup>8</sup>, on a

$$\left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{M}{n} \leq \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\text{Et donc } \ell \leq \frac{u_n}{n} \leq \ell + 2\frac{\varepsilon}{2} \leq \ell + \varepsilon.$$

C'est donc la définition de  $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

Supposons à présent que  $\ell$  n'existe pas, c'est-à-dire que  $\left(\frac{u_n}{n}\right)$  n'est pas majorée.

Soit alors  $A \in \mathbf{R}$ . Il existe donc  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $\frac{u_{n_0}}{n_0} \leq A$ .

Et alors le même raisonnement que précédemment, avec les mêmes notations, on prouve

$$\text{que pour tout } n, \frac{u_n}{n} \leq A + \frac{M}{n}.$$

Et puisque  $\frac{M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , il existe un rang  $N$  tel que pour  $n \geq N$ ,  $\frac{M}{n} \leq 1$ .

Et donc pour  $n \geq N$ ,  $\frac{u_n}{n} \leq A + 1$ , et donc  $\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.16

1. Notons qu'il n'est pas forcément immédiat de savoir quelle suite sera croissante, et laquelle sera décroissante. Mais :

—il n'y a pas besoin de le savoir, l'étude du signe de  $u_{n+1} - u_n$  nous donnera sa monotonie.

—si l'une des deux est clairement plus grand que l'autre (et c'est ici le cas de  $u_n$ ), c'est forcément celle qui est décroissante !

Soit donc  $n \in \mathbf{N}^*$ . Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{2\sqrt{n+1} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Or, on a  $2n+1 \geq 2\sqrt{n(n+1)} \Leftrightarrow (2n+1)^2 \geq 4n(n+1) \Leftrightarrow 4n^2 + 4n + 1 \geq 4n^2 + 4n$ , ce qui est toujours le cas.

Donc  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ , et donc  $(u_n)$  est décroissante.

De même, on prouve que  $(v_n)$  est croissante puisque pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} \\ &= \frac{1 + 2n + 2 - 2\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

### Remarque

Même si la notation que nous employons ne le fait pas clairement apparaître,  $r$  dépend de  $n$ . Et donc il n'est pas directement possible d'affirmer que  $\frac{u_r}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

En revanche, maintenant,  $M$  est une constante, et donc  $\frac{M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

<sup>8</sup> C'est-à-dire qu'il existe un  $n_1$  tel que pour  $n \geq n_1$ ...

Mais  $2n + 3 \geq 2\sqrt{n+2} \Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 9 \geq 4n + 8 \Leftrightarrow 4n^2 + 8n + 1 \geq 0$ , ce qui est vrai.

Enfin, on a

$$u_n - v_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2 \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 2 \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc les deux suites sont adjacentes, et par conséquent tendent vers une même limite  $\ell \in \mathbf{R}$ .

Supposons par l'absurde que  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  possède une limite finie  $\ell_1$ .

Alors,  $2\sqrt{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1 - \ell$ , ce qui est impossible puisque  $2\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Donc  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  ne possède pas de limite finie.

Puisqu'il s'agit d'une suite croissante, elle tend vers  $+\infty$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.17

Notons que la décroissance au sens de l'inclusion signifie que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n].$$

En particulier,  $a_{n+1} \geq a_n$ , et donc la suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est croissante.

De même, la suite  $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est décroissante.

Enfin, l'hypothèse faite sur la longueur des segments est que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = 0$ .

Et donc les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une même limite  $\ell$ . On a alors  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $a_n \leq \ell \leq b_n$ , et donc

$\ell \in [a_n, b_n]$ , de sorte que  $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$ .

Inversement, si  $x \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n]$ , alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_n \leq x \leq b_n$ .

Et donc par passage à la limite,  $\ell \leq x \leq \ell$ , de sorte que  $x = \ell$ .

Ceci prouve donc que  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] \subset \{\ell\}$ .

Et donc par double inclusion,  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} [a_n, b_n] = \{\ell\}$ , qui est donc bien un singleton.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.18

Nous allons montrer que les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.

On a

$$u_{n+1} = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = 2^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \geq 2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \text{ car } \frac{1}{\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \geq 1.$$

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante.

De même, on a,  $\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$ , donc  $2 \tan(x) = (1 - \tan^2(x)) \tan(2x)$ .

En particulier, si  $|x| < \frac{\pi}{4}$ , alors  $\tan(2x) \geq 2 \tan(x)$ .

Donc pour  $x = \frac{\theta}{2^{n+1}}$ ,  $2 \tan\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \leq \tan\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ .

En multipliant par  $2^n$ , il vient  $v_{n+1} \leq v_n$  : la suite  $(v_n)$  est décroissante.

Enfin,  $u_n = \theta \frac{\sin \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta$ .

Et de même, en utilisant le fait que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$$

alors on a  $v_n = \theta \frac{\tan \frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \theta$ .

Et donc  $v_n - u_n \rightarrow 0$ . On en déduit que les suites sont adjacentes, et nous connaissons déjà leur limite commune : c'est  $\theta$ .

#### Plus simplement

Il a été dit en cours que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est toujours divergente.

#### Rappel

Il est classique que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**SOLUTION DE L'EXERCICE 13.19**

$$1. \text{ Soit } n \in \mathbf{N}. \text{ Alors } S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k u_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0.$$

Donc  $(S_{2n})$  est décroissante.

De même, on prouve que  $(S_{2n+1})$  est croissante.

$$2. \text{ On a } S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent, les deux suites  $(S_{2n})$  et  $(S_{2n+1})$  sont adjacentes; et donc convergent vers **une même limite**.

Ceci implique alors que  $(S_n)$  converge.

**SOLUTION DE L'EXERCICE 13.20**

Prouvons par récurrence que  $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ .

$$\text{Pour } n = 0, \text{ on a } a_1 = \frac{a+b}{2} \leq a = a_0 \text{ et } b_1 = \sqrt{ab} \geq b = b_0.$$

Et il est classique<sup>9</sup> que  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , si bien que  $b_1 \leq a_1$ .

Supposons donc  $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ .

$$\text{Alors } a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} \leq a_{n+1} \text{ car } b_{n+1} \leq a_{n+1}.$$

De même,  $b_{n+2} = \sqrt{b_{n+1} a_{n+1}} \geq b_{n+1}$  car  $a_{n+1} \geq b_{n+1}$ .

Enfin, toujours à l'aide de  $\sqrt{uv} \leq \frac{u+v}{2}$ ,  $\sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}$  soit encore  $b_{n+2} \leq a_{n+2}$ .

Et donc on a bien  $b_{n+1} \leq b_{n+2} \leq a_{n+2} \leq a_{n+1}$ , si bien que la propriété est héréditaire.

Donc par le principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$ .

Ainsi,  $(a_n)$  est décroissante et  $(b_n)$  est croissante.

Puisque  $(a_n)$  est minorée par  $b_0 = b$  et  $(b_n)$  est majorée par  $a_0 = a$ , par le théorème de la limite monotone, ces deux suites convergent.

Notons  $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  et  $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$ .

$$\text{Alors } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}.$$

Et donc par unicité de la limite<sup>10</sup>,  $\ell_1 = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}$ , si bien que  $\ell_1 = \ell_2$ .

Donc  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent vers une même limite.

**Commentaire** : cette limite commune aux deux suites (notons la  $M(a, b)$ ) est appelée la moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ .

On peut prouver qu'elle a les propriétés qu'on attend pour une moyenne, par exemple que  $M(a, a) = a$  et que  $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ , mais on ne sait pas l'exprimer facilement<sup>11</sup> à l'aide de  $a$  et  $b$ .

**SOLUTION DE L'EXERCICE 13.21**

Notons  $a_n = \operatorname{Re}(z_n)$  et  $b_n = \operatorname{Im}(z_n)$ .

Alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$z_{n+1} = a_{n+1} + ib_{n+1} = \frac{a_n + ib_n - 3a_n + 3ib_n}{2} = \frac{-2a_n + 4ib_n}{2} = -a_n + 2ib_n.$$

Et donc<sup>12</sup>  $a_{n+1} = -a_n$  et  $b_{n+1} = 2b_n$ .

Donc pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_n = (-1)^n a_0$  et  $b_n = 2^n b_0$ .

Ces deux suites<sup>13</sup> sont donc convergentes si et seulement si  $a_0 = b_0 = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $z_0 = 0$ , auquel cas  $(z_n)$  est la suite nulle, qui converge vers 0.

**SOLUTION DE L'EXERCICE 13.22**

Supposons par l'absurde que  $(z_n)$  converge vers un complexe  $\ell$ .

Notons que ce complexe sera nécessairement de module 1 puisque les  $z_n$  le sont. En effet, si  $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a + ib$ ,  $\operatorname{Re}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$  et  $\operatorname{Im}(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ , de sorte que

$$|z_n| = \sqrt{\operatorname{Re}(z_n)^2 + \operatorname{Im}(z_n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sqrt{a^2 + b^2} = |\ell|.$$

Et donc si pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $|z_n| = 1$ , alors  $|\ell| = 1$ .

Mais  $(z_{2n})$  converge également vers  $\ell$ .

**⚠ Attention !**

Le terme de  $(u_{2n})$  qui suit  $u_{2n}$  n'est sûrement pas  $u_{2n+1}$ , qui n'est pas un terme de  $(u_{2n})$ , mais  $u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$ .

<sup>9</sup> Cela découle d'une identité remarquable :  $4ab \leq (a+b)^2$  car  $(a-b)^2 \geq 0$ .

<sup>10</sup> On a également  $a_{n+1} \rightarrow \ell_1$ .

<sup>11</sup> Il existe tout de même des formules à base d'intégrales.

<sup>12</sup> Par identification des parties réelles et imaginaires.

<sup>13</sup> Géométriques.

Or  $z_{2n} = e^{i \ln(2) + i \ln(n)} = e^{i \ln(2)} z_n$ .

Et donc  $\ell = e^{i \ln(2)} \ell \Leftrightarrow e^{i \ln(2)} = 1 \Leftrightarrow \ln(2) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

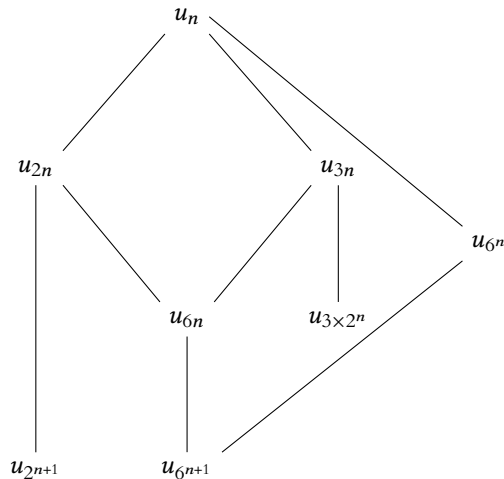
Mais  $\frac{\ln(2)}{2\pi} \in ]0, 1[$  ne peut être entier, ce qui est absurde.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.23

Le dessin suivant représente les liens entre les différentes suites : un trait entre deux suites signifiant que celle du bas est extraite de celle du haut.

La relation «être extraite de» étant transitive, certaines flèches sont implicites et ne sont donc pas dessinées (par exemple,  $(u_{6n+1})$  est extraite de  $(u_{2n})$ ).

Je vous laisse le soin de chercher les extractrices si vous en éprouvez le besoin.



### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.24

Nous savons que si  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  convergent vers une même limite, alors  $(u_n)$  converge. Malheureusement, ici nous ne savons rien des limites de  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ , si ce n'est qu'elles existent.

Prouvons qu'elles sont égales.

Notons  $\ell_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n}$ ,  $\ell_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$  et  $\ell_3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{3n}$ .

Alors la suite  $(u_{6n})$  est extraite à la fois de  $(u_{2n})$  et de  $(u_{3n})$ .

Étant extraite de  $(u_{2n})$ , elle converge vers  $\ell_1$ . Mais étant extraite de  $(u_{3n})$ , elle converge vers  $\ell_3$ . Et par unicité de sa limite, on a donc  $\ell_1 = \ell_3$ .

De même, la suite  $(u_{6n+3})$  est à la fois extraite de  $(u_{2n+1})$  (la suite des termes d'ordre impair) et de  $(u_{6n})$ . Donc par le même raisonnement,  $\ell_2 = \ell_3$ .

On en déduit que  $\ell_1 = \ell_2$ , et donc que  $(u_n)$  converge vers  $\ell_1 = \ell_2$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.25

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = \sqrt{1+x}$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $[0, 1]$ , et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

En particulier, il vient

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \frac{1}{2}.$$

2. Puisque  $n^2 \leq n^2 + n < (n+1)^2$ , on a  $n \leq \sqrt{n^2 + n} < n+1$ , et donc  $\lfloor \sqrt{n^2 + n} \rfloor = n$ .

$$\text{Et donc } u_{n^2+n} = \sqrt{n^2 + n} - n = n \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right).$$

Utilisons alors le résultat préliminaire :

$$u_{n^2+n} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

Autrement dit, nous venons de prouver qu'il existe une suite extraite de  $(u_n)_n$  qui tend vers  $\frac{1}{2}$ .

#### Détails

Nous avons ici utilisé le fait que  $\ell \neq 0$ , ce qui découle du fait que  $|\ell| = 1$ .

#### Détails

Un multiple de 6 est à la fois un multiple de 2 et un multiple de 3.

#### Détails

La suite extraite en question est  $(u_{\varphi(n)})$ , avec  $\varphi(n) = n^2 + n$ .

Donc si  $(u_n)$  possède une limite, celle-ci vaut nécessairement  $\frac{1}{2}$ .

Or, on a  $u_{n^2} = \sqrt{n^2} - \lfloor \sqrt{n^2} \rfloor = n - \lfloor n \rfloor = 0$ .

Autrement dit, il existe également une suite extraite de  $(u_n)$  qui converge vers 0, contredisant le fait que la limite<sup>14</sup> de  $(u_n)$  ne peut que valoir  $\frac{1}{2}$ .

<sup>14</sup> Si elle existe !

Et donc  $(u_n)$  ne possède pas de limite.

3. On a  $b^2 n^2 \leq b^2 n^2 + 2an < \underbrace{b^2 n^2 + 2bn + 1}_{=(bn+1)^2}$ , de sorte que  $bn \leq \sqrt{n^2 b^2 + 2an} < bn + 1$ .

Et donc  $u_{n^2 b^2 + 2an} = \sqrt{n^2 b^2 + 2an} - bn = bn \left( \sqrt{1 + \frac{2a}{nb^2}} - 1 \right)$ .

Utilisons encore une fois la première question :

$$u_{n^2 b^2 + 2an} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2a}{nb^2}} - 1}{\frac{2a}{nb^2}} \frac{2a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{2a}{b} = \frac{a}{b}.$$

4. Si  $x$  est rationnel, c'est facile : il suffit d'utiliser la question précédente : il existe deux entiers  $a$  et  $b$  avec  $a \leq b$  tels que  $x = \frac{a}{b}$ , et alors la suite  $(u_{n^2 b^2 + 2an})_n$  fait l'affaire.

En revanche, la situation est plus complexe dans le cas où  $x$  est irrationnel.

Nous allons utiliser à la fois la densité des rationnels dans  $\mathbf{R}$  et la question précédente qui permet d'approcher un rationnel par des éléments de  $(u_n)$ .

Commençons par fixer une suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  de rationnels de  $[0, 1]$  telle que  $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ,  $|\alpha_n - x| \leq \frac{1}{n}$ .

Puisqu'il existe une suite extraite de  $(u_n)$  convergeant vers  $\alpha_1$ , il existe donc un entier  $n_1$  tel que  $|u_{n_1} - \alpha_1| \leq 1$ . Posons alors  $\varphi(1) = n_1$ .

Par l'inégalité triangulaire, on a alors  $|u_{\varphi(1)} - x| \leq |u_{n_1} - \alpha_1| + |\alpha_1 - x| \leq 2$ .

On définit alors les  $\varphi(k)$  de proche en proche de la manière suivante : supposons  $\varphi(1), \dots, \varphi(k-1)$  déjà définis.

Notons  $\alpha_k = \frac{a_k}{b_k}$ , avec  $0 \leq a_k \leq b_k$ .

Par la question précédente, la suite  $(u_{n^2 b_k^2 + 2a_k n})_n$  converge vers  $\alpha_k$ .

Et en particulier, il existe  $n_k$  tel que pour  $n \geq n_k$ ,  $|u_{n^2 b_k^2 + 2a_k n} - \alpha_k| \leq \frac{1}{k}$ .

On pose alors  $N_k = \max(\varphi(k-1), n_k)$  et  $\varphi(k) = N_k^2 b_k^2 + 2a_k N_k$ .

Alors, par l'inégalité triangulaire, il vient

$$|u_{\varphi(k)} - x| \leq |u_{\varphi(k)} - \alpha_k| + |\alpha_k - x| \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2k}.$$

Et donc par le théorème des gendarmes,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |u_{\varphi(k)} - x| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} u_{\varphi(k)} = x$ .

Nous avons donc bien construit une suite extraite de  $(u_n)$  dont la limite vaut  $x$ .

5. Soit  $x \in \mathbf{R}$ . Nous allons prouver que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $(m, n) \in \mathbf{N}^2$  tels que  $|\sqrt{n} - \sqrt{m}| < \varepsilon$ . Ceci suffira bien à prouver la densité annoncée, puisque si  $a < b$  sont deux réels distincts,  $x = \frac{a+b}{2}$  et  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ , il existera bien un couple  $(m, n) \in \mathbf{N}^2$  tel que  $\left| \frac{a+b}{2} - (\sqrt{n} - \sqrt{m}) \right| < \frac{b-a}{2}$ , et donc  $a < \sqrt{n} - \sqrt{m} < b$ .

Soit donc  $x \in \mathbf{R}$  et  $\varepsilon > 0$ .

► Supposons dans un premier temps  $x \leq 0$ . Alors  $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ .

Et donc par la question précédente, il existe  $N \in \mathbf{N}$  tel que  $\left| x - \lfloor x \rfloor - (\sqrt{N} - \lfloor \sqrt{N} \rfloor) \right| < \varepsilon$ .

Soit encore  $\left| x - (\sqrt{N} - (\lfloor \sqrt{N} \rfloor - \lfloor x \rfloor)) \right| < \varepsilon$ .

Mais  $\lfloor x \rfloor \leq 0$ , si bien que  $M = \lfloor \sqrt{N} \rfloor - \lfloor x \rfloor \in \mathbf{N}$ .

Et donc  $\left| x - (\sqrt{N} - \sqrt{M^2}) \right| < \varepsilon$ .

#### Remarque

Une telle suite existe par densité de  $\mathbf{Q}$  dans  $\mathbf{R}$ , ou plus précisément, de  $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$  dans  $[0, 1]$ .

#### Détails

La valeur exacte que l'on choisit pour  $\varphi(k)$  n'a pas vraiment d'importance, du moment qu'elle est strictement plus grande que  $\varphi(k-1)$  et qu'elle est de la forme  $n^2 b_k^2 + 2a_k n$  (pour qu'il s'agisse bien d'un terme de la suite extraite de limite  $\alpha_k$  que nous venons de considérer).

► Dans le cas où  $x \geq 0$ , il faut être un peu plus subtil car le  $M$  du raisonnement ci-dessus peut être négatif si  $N$  n'est pas assez grand. Plus précisément : c'est le cas  $\sqrt{N} < x$ . Mais nous savons qu'il existe une extractrice  $\varphi$  telle que  $u_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x - \lfloor x \rfloor$ .

Or toute extractrice tend vers  $+\infty$ . Autrement dit, il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $|x - \lfloor x \rfloor - u_{\varphi(n)}| < \varepsilon$ .

Soit alors  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq n_0$  et  $\varphi(n) \geq x^2$ .

Notons alors  $N = \varphi(n)$ . Alors comme précédemment,

$$|x - \lfloor x \rfloor - \sqrt{N} + \lfloor \sqrt{N} \rfloor| < \varepsilon$$

soit encore  $|x - (\sqrt{N} - (\lfloor \sqrt{N} \rfloor - \lfloor x \rfloor))| < \varepsilon$ .

Et là encore,  $M = \lfloor \sqrt{N} \rfloor - \lfloor x \rfloor \in \mathbf{N}$ , et donc  $|x - (\sqrt{N} - \sqrt{M^2})| < \varepsilon$ , qui est bien ce que l'on cherchait.

*Commentaire* : nous avons prouvé un résultat plus fort que souhaité, à savoir que  $\{\sqrt{n} - m, (m, n) \in \mathbf{N}^2\}$  est dense dans  $\mathbf{R}$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.26

1. Supposons que  $\sin(n\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

Alors  $\sin((n+1)\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

Mais  $\sin((n+1)\alpha) = \sin(n\alpha) \cos(\alpha) + \cos(n\alpha) \sin(\alpha)$ .

Puisque  $\sin(\alpha) \neq 0$ , on a donc  $\cos(n\alpha) = \frac{\sin((n+1)\alpha) - \sin(n\alpha) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

2. Notons  $\ell' = \ell \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$  la limite de  $(\cos(n\alpha))_n$ .

Comme à la question 1, on a

$$\cos((n+1)\alpha) = \cos(n\alpha) \cos \alpha - \sin(n\alpha) \sin(\alpha) \Leftrightarrow \sin(n\alpha) = \frac{\cos(n\alpha) \cos \alpha - \cos((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Et donc } \ell = \ell' \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} = -\ell \left( \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} \right)^2.$$

$$\text{Donc } \ell \left( 1 + \left( \frac{\cos \alpha - 1}{\sin \alpha} \right)^2 \right) = 0 \Rightarrow \ell = 0.$$

Par ailleurs, on a  $\cos(n\alpha)^2 + \sin(n\alpha)^2 = 1$ , ce qui en passant à la limite nous donne  $\ell^2 + \ell'^2 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ .

Ceci est impossible, et c'est donc que  $(\sin(n\alpha))_n$  diverge.

La suite  $(\cos(n\alpha))$  diverge aussi, puisque le calcul ci-dessus prouve que si elle converge, alors  $(\sin(n\alpha))_n$  converge aussi, ce qui n'est pas le cas.

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.27

Commençons par noter qu'une récurrence rapide prouve que pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n > 0$ .

On a alors, pour tout  $n \geq 1$ ,  $(n+1)u_{n+1} = \sqrt{nu_n}$ .

Posons donc  $v_n = nu_n$ , de sorte que  $v_{n+1} = \sqrt{v_n}$ .

Autrement dit, on a  $\ln(v_{n+1}) = \frac{1}{2} \ln(v_n)$ , de sorte que  $(\ln(v_n))_{n \geq 1}$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ .

Donc pour tout  $n \geq 1$ ,  $\ln(v_n) = \frac{\ln(v_1)}{2^{n-1}}$ , de sorte que  $v_n = e^{\frac{\ln(v_1)}{2^{n-1}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

Et donc  $u_n = \frac{v_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.28

Notons qu'il n'est pas totalement évident que  $(u_n)$  soit bien définie, et il faut pour cela s'assurer que pour tout  $n$ ,  $u_n^2 + u_n + (-1)^n$  est bien positif, afin que sa racine soit définie.

Prouvons par récurrence sur  $n \in \mathbf{N}$  que  $u_n \geq 1$ .

La récurrence est initialisée grâce à l'hypothèse faite sur  $u_0$ .

Supposons alors  $u_n \geq 1$ . Alors

$$u_n^2 + u_n + (-1)^n \geq u_n^2 + u_n - 1 \geq u_n^2 \geq 1.$$

#### Détails

L'existence d'un tel  $n$  est garantie par le fait que  $\varphi(n) \rightarrow +\infty$ .

#### Détails

La suite  $(u_{n+1})$  est toujours une suite extraite de  $(u_n)$ , et donc dans le cas où  $(u_n)$  converge,  $(u_{n+1})$  converge également, et à la même limite.

#### $(-1)^n$

Notons que si  $n$  est pair, on peut faire bien mieux que la majoration que nous venons de donner, mais peu importe, l'essentiel étant que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $(-1)^n \geq -1$ .

Et donc  $u_{n+1}$  est bien défini et par croissance de la fonction racine,  $u_{n+1} \geq \sqrt{1} \geq 1$ .  
Donc pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .

Mais alors pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n^2 + u_n + (-1)^n \geq u_n^2 + u_n - 1 \geq u_n^2$ .

Et donc  $u_{n+1} \geq \sqrt{u_n^2} \geq u_n$ . Donc la suite  $(u_n)$  est croissante.

Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge, soit elle tend vers  $+\infty$ .

Supposons par l'absurde que  $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \mathbf{R}$ . Notons que nécessairement,  $\ell \geq 1$ , puisque  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .

Alors les deux suites  $(u_{2n})_n$  et  $(u_{2n+1})_n$  convergent également vers  $\ell$ .

Or nous savons que  $u_{2n+1} = \sqrt{u_{2n}^2 + u_{2n} + 1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{\ell^2 + \ell + 1}$ .

Or,  $u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ , et donc par unicité de la limite,  $\ell = \sqrt{\ell^2 + \ell + 1}$ .

Soit encore  $\ell^2 = \ell^2 + \ell + 1 \Leftrightarrow \ell = -1$ , ce qui est impossible.

Donc forcément,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.29

1. Il est évident que si  $(u_n)$  converge, alors sa limite vaut  $\ell$ .

Raisonnons par l'absurde, et supposons  $(u_n)$  non convergente.

Alors  $\forall L \in \mathbf{R}$ ,  $\exists \varepsilon > 0$ ,  $\forall N \in \mathbf{N}$ ,  $\exists n \geq N$ ,  $|u_n - L| > \varepsilon$ .

Et en particulier, un tel  $\varepsilon$  existe lorsque  $L = \ell$ .

Et alors, il existe une infinité de termes de la suite  $(u_n)$  tels que  $|u_n - \ell| > \varepsilon$ .

Construisons alors une extractrice  $\varphi$  de la manière suivante :

$\varphi(0) = \min\{k \in \mathbf{N}, |u_k - \ell| > \varepsilon\}$ , et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\varphi(n+1) = \min\{k \geq \varphi(n) \mid |u_k - \ell| > \varepsilon\}$ .

Autrement dit,  $(u_{\varphi(n)})$  est la suite formée des termes de  $(u_n)$  tels que  $|u_n - \ell| > \varepsilon$ .

Alors cette suite extraite est encore bornée, et donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice  $\psi$  telle que  $(u_{\varphi(\psi(n))})$  converge.

Comme il s'agit d'une suite extraite de  $(u_n)$ , sa limite est nécessairement  $\ell$ , ce qui est impossible puisque pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $|u_{\varphi(\psi(n))} - \ell| > \varepsilon$ .

Et donc  $(u_n)$  est convergente.

2. Il semble légitime d'utiliser la première question.

Considérons une suite  $(v_{\varphi(n)})$  extraite de  $(v_n)$ , que l'on suppose convergente, de limite  $\alpha$ .

Notons alors  $w_n = v_n + \frac{v_{2n}}{2}$ , de sorte que  $w_n \rightarrow \ell$ .

Alors  $w_{\varphi(n)} = v_{\varphi(n)} + \frac{v_{2\varphi(n)}}{2}$ .

Donc  $v_{2\varphi(n)} = 2(w_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2(\ell - \alpha)$ .

Et  $(v_{2\varphi(n)})$  est bien une suite extraite de  $(v_n)$ , de sorte que nous venons de prouver qu'il existe une suite extraite de  $(v_n)$  de limite  $\alpha_1 = 2(\ell - \alpha)$ .

Mais alors le procédé peut être itéré : il existe une suite extraite de  $(v_n)$  de limite  $\alpha_2 = 2(\ell - \alpha_1)$ .

Et ainsi de suite : la suite définie par  $\begin{cases} \alpha_0 = \alpha \\ \alpha_{n+1} = 2(\ell - \alpha_n) \end{cases}$  est formée de limites de suite extraites de  $(v_n)$ .

Mais il s'agit là d'une suite arithmético-géométrique de raison  $-2$ , dont nous savons donc trouver le terme général.

Le point fixe de  $x \mapsto 2(\ell - x)$  est  $x = \frac{2\ell}{3}$ , et donc pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\alpha_n = (-2)^n \left( \alpha_0 - \frac{2\ell}{3} \right) + \frac{2\ell}{3}$ .

Mais une telle suite n'est bornée que si  $\alpha_0 = \frac{2\ell}{3}$ .

Or si  $(v_n)$  est à valeurs dans  $[-M, M]$ , toute suite extraite de  $(v_n)$  est encore à valeurs dans  $[-M, M]$ , et en particulier, si elle converge, alors sa limite se doit d'être dans  $[-M, M]$ .

Et donc en particulier,  $(\alpha_n)$  est bornée.

On en déduit que  $\alpha = \alpha_0 = \frac{2\ell}{3}$ .

Nous venons ainsi de prouver que toute suite extraite de  $(v_n)$  convergente doit avoir  $\frac{2\ell}{3}$  pour limite.

Par la question 1, on en déduit que  $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{2\ell}{3}$ .

### SOLUTION DE L'EXERCICE 13.30

#### Détails

En effet, nous venons de dire que pour tout  $N$ , il existe un  $n \geq N$  tel que  $|u_n - \ell| > \varepsilon$ . S'il n'existait qu'un nombre fini de tels termes, cette propriété ne serait pas vérifiée pour  $N$  plus grand que tous ces termes.

#### ⚠ Attention !

$(v_{2\varphi(n)})$  n'est pas (en général) une suite extraite de  $(v_{\varphi(n)})$ .  
Donc nous ne pouvons rien dire de sa convergence.

#### Remarque

Il était de toutes façons prévisible que si  $u_n$  possédait une limite  $\ell'$ , celle-ci devait vérifier

$$\ell = \ell' + \frac{\ell'}{2} \Leftrightarrow \ell' = \frac{2\ell}{3}.$$



1. Pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\frac{n}{n+1} \leq 1$ , et donc 1 est un majorant de  $A$ .

De plus, si on pose  $u_n = \frac{2n}{2n+1}$ , alors  $(u_n)$  est une suite d'éléments de  $A$ , qui tend vers 1, et donc  $1 = \sup A$ .

De même, il est facile de constater que  $-1$  est un minorant de  $A$  et que  $-\frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$ , et donc  $-1 = \inf A$ .

2. Il est évident que 0 est le plus petit élément de  $B$ , et donc sa borne inférieure.

D'autre part, il est classique que  $2pq \leq p^2 + q^2$ , et donc  $\frac{pq}{p^2 + q^2} \leq \frac{1}{2}$ , avec égalité si et seulement si  $p = q$ .

Et donc  $\frac{1}{2}$  est le plus grand élément de  $B$ , et donc sa borne supérieure.

3. Il est clair que  $C$  est minorée par 0, et si on pose  $c_n = \frac{2^n}{1+3^n}$ , alors  $(c_n)$  est une suite à valeurs dans  $C$  qui tend vers 0, et donc  $0 = \inf C$ .

D'autre part, pour tout  $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ ,  $\frac{2^n}{2^m + 3^{m+n}} \leq \frac{2^n}{1+3^n}$ .

Or,  $1 + 3^{n+1} \geq 2(1 + 3^n)$ , de sorte que

$$\frac{2^{n+1}}{1+3^{n+1}} = \frac{2 \cdot 2^n}{1+3^{n+1}} \leq \frac{2^n}{1+3^n}.$$

Donc la suite de terme général  $\frac{2^n}{1+3^n}$  est décroissante et donc, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $\frac{2^n}{1+3^n} \leq \frac{2^0}{1+3^0} = \frac{1}{2}$ .

Ainsi, pour tout  $(m, n) \in \mathbf{N}^2$ ,  $\frac{2^n}{2^m + 3^{m+n}} \leq \frac{1}{2}$ , de sorte que  $\frac{1}{2} = \max C$ .