

TD 12 : NOMBRES RÉELS

EXERCICE 12.1 Soient A, B deux parties de \mathbf{R} , non vides, avec B majorée et $A \subset B$.
Montrer que A admet une borne supérieure, et que $\sup(A) \leq \sup(B)$.

PD

EXERCICE 12.2 Montrer que les parties de \mathbf{R} suivantes sont bornées. Déterminer leurs bornes inférieures et supérieures :

PD

$$1. A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbf{N} \right\} \quad 2. B = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{p}, (n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, n \leq p \right\} \quad 3. C = \left\{ (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n} \right), n \in \mathbf{N}^* \right\}$$

EXERCICE 12.3 Soient A et B deux parties non vides minorées de \mathbf{R} .

AD

1. Montrer que $A \cup B$ est minorée, et montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
2. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $\max(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(A \cap B)$. Est-ce toujours une égalité ?
3. On pose $A + B = \{a + b, (a, b) \in A \times B\}$. Montrer que $A + B$ est minorée et que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

EXERCICE 12.4 Parties adjacentes de \mathbf{R}

D

Soient A et B deux parties non vides de \mathbf{R} . On suppose que

$$\forall (a, b) \in A \times B, a \leq b \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \exists (a, b) \in A \times B, b - a < \varepsilon.$$

Montrer que A admet une borne supérieure, B admet une borne inférieure et $\sup(A) = \inf(B)$.

EXERCICE 12.5 Soit A une partie majorée de \mathbf{R} contenant au moins deux éléments. On suppose que $x \in A$ et $x \neq \sup A$.
Montrer que $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.

AD

EXERCICE 12.6 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction bornée. On définit deux fonctions g et h sur \mathbf{R} en posant, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

PD

$$g(x) = \inf\{f(y), y \geq x\} \text{ et } h(x) = \sup\{f(y), y \geq x\}.$$

Montrer que g et h sont bien définies, que $g \leq h$, et étudier les monotonies de g et h .

EXERCICE 12.7 Montrer que $E = \{r^3, r \in \mathbf{Q}\}$ est dense dans \mathbf{R} .

PD

EXERCICE 12.8 Soit A une partie majorée de \mathbf{R} , et soit $M = \sup A$. On suppose par ailleurs que A ne possède pas de plus grand élément. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments de A .
Ce résultat reste-t-il vrai si $M \in A$?

AD

EXERCICE 12.9 Endomorphismes croissants de $(\mathbf{R}, +)$

AD

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

On pose $\alpha = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, f(n) = \alpha n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}, f(n) = \alpha n$.
4. Montrer que pour tout $r \in \mathbf{Q}, f(r) = \alpha r$.
5. Soit $x \in \mathbf{R}$.
 - (a) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) , à valeurs rationnelles, de limite x , telle que $\forall n \in \mathbf{N}, a_n \leq x \leq b_n$.
 - (b) On suppose f croissante. Montrer que $f(x) = \alpha x$.
6. Déterminer toutes les applications croissantes $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

EXERCICE 12.10 Un critère de densité

AD

Soit A une partie de \mathbf{R} telle que :

$$\text{i) } \forall x \in \mathbf{R}, \exists (a, b) \in A^2, a < x < b$$

$$\text{ii) } \forall (a, b) \in A^2, \frac{a+b}{2} \in A.$$

Prouver que A est dense dans \mathbf{R} .

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 12

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.1

Soit $M = \sup(B)$. Alors M est un majorant de B , et donc de A , qui est donc une partie majorée de \mathbf{R} .

Elle admet donc une borne supérieure, qui est le plus petit de ses majorants.

Mais M étant un majorant de A , $\sup(A) \leq M$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.2

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-1 \leq (-1)^n + \frac{1}{n+1} \leq 1 + \frac{1}{1} \leq 2$.

Donc déjà A est bornée, et étant non vide, admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Puisque $2 \in A$, c'est un majorant de A qui est dans A : c'est le plus grand élément de A , et donc sa borne supérieure.

Prouvons que $-1 = \inf(A)$. Nous savons déjà qu'il s'agit d'un minorant de A .

Utilisons la caractérisation epsilonuse de la borne inférieure. Soit $\varepsilon > 0$.

Soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{2n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{2\varepsilon}$.

Alors $(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = -1 + \frac{1}{2n+2} < -1 + \varepsilon$.

Et donc nous venons de prouver qu'il existe $a \in A$ tel que $-1 \leq a < -1 + \varepsilon$.

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $-1 = \inf(A)$.

2. Pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, on a $0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p} < 1$, et donc B est bornée.

Elle est évidemment non vide, donc admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Montrons que $1 = \sup(A)$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Alors $\frac{1}{1} - \frac{1}{p} > 1 - \varepsilon$.

Et puisque 1 est un majorant de B , nous venons de prouver qu'il existe $b \in B$ tel que $1 - \varepsilon < b \leq 1$, et donc $\sup B = 1$.

Puisque $0 \in B$, et que nous avons déjà prouvé que 0 est un minorant de B , 0 est le plus petit élément de B , et donc sa borne inférieure.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-1 \leq (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 1$, donc C est majorée.

Et pour tout $\varepsilon > 0$, si n est tel que $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, alors $1 - \varepsilon < \underbrace{(-1)^{2n} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)}_{\in C} \leq 1$ et $-1 \leq$

$(-1)^{2n+1} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < -1 + \varepsilon$.

Et donc comme pour les questions précédentes, on en conclut que $\inf C = -1$ et $\sup C = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.3

1. Soit $m = \min(\inf A, \inf B)$, et soit alors $x \in A \cup B$.

► Si $x \in A$, alors $x \geq \inf A \geq m$.

► Si $x \in B$, alors $x \geq \inf B \geq m$.

Donc m est un minorant de $A \cup B$, de sorte que $\inf(A \cup B)$ existe, et $\inf(A \cup B) \geq m$.

Considérons à présent M un minorant $A \cup B$.

Alors il s'agit d'un minorant de A , et donc¹ $M \leq \inf(A)$.

Et de même il s'agit d'un minorant de B , donc $M \leq \inf(B)$.

Et donc $M \leq m$.

On en déduit que m est plus grand que tout minorant de $A \cup B$: c'est le plus grand minorant de $A \cup B$, à savoir $\inf(A \cup B)$.

2. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$, et donc $x \geq \inf(A)$ et $x \in B$ donc $x \geq \inf B$.

Par conséquent, $x \geq \max(\inf A, \inf B)$

Ainsi, $A \cap B$ est minorée par $\max(\inf A, \inf B)$, et en particulier est minorée et possède une borne inférieure.

Cette borne inférieure étant le plus grand des minorants, on a donc $\inf(A \cap B) \geq$

¹ $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A .

Logique !

Être plus grand que deux nombres c'est être plus grand que le maximum des deux.

$\max(\inf A, \inf B)$.

Il ne s'agit pas toujours d'une égalité, comme le prouve l'exemple $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, car alors $\inf(A \cap B) = \min(A \cap B) = 2$ et $\max(\inf A, \inf B) = 1$.

3. Soit $x \in A + B$. Alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$.
Et donc $x \geq \inf(A) + \inf(B)$. Donc $A + B$ est minorée, par $\inf(A) + \inf(B)$, et donc possède une borne supérieure, qui est donc² supérieure ou égale à $\inf(A) + \inf(B)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $\inf(A) \leq a < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$.

De même, il existe $b \in B$ tel que $\inf(B) \leq b < \inf(B) + \frac{\varepsilon}{2}$.

Et donc si on pose $x = a + b \in A + B$ tel que $\inf(A) + \inf(B) \leq a + b < \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$.
On reconnaît alors la caractérisation d'une borne inférieure : $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

² Encore une fois : la borne inférieure est le plus grand des minorants.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.4

Puisque B est non vide, il existe au moins un élément dans B , qui est alors un majorant de A . Donc A est majorée, non vide par hypothèse, et par conséquent admet une borne supérieure.

De même, tout élément de A est un minorant de B , qui admet donc une borne inférieure.

On a alors, $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \leq b$.

Et donc, tout élément a de A est un minorant de B .

Mais par définition, $\inf B$ est le plus grand des minorants de B , donc pour tout $a \in A$, $a \leq \inf B$.

Et donc $\inf B$ est un majorant de A . Or $\sup A$ est le plus petit des majorants de A , donc $\sup A \leq \inf B$.

Prouvons à présent que l'inégalité que nous venons d'obtenir ne peut être stricte, et supposons par l'absurde que $\sup(A) < \inf(B)$, et soit alors $\varepsilon = \inf(B) - \sup(A) > 0$.

Alors, $\exists (a, b) \in A \times B$ tels que $b - a < \varepsilon \Leftrightarrow b < a + \varepsilon$. Mais alors

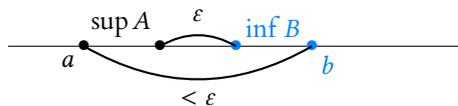


FIGURE 12.1 – On ne peut avoir $\sup A < \inf B$.

$$\inf(B) \leq b < a + \varepsilon \leq \sup(A) + \varepsilon = \inf(B).$$

Ceci est absurde, donc $\sup(A) = \inf(B)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.5

On a déjà $A \setminus \{x\} \subset A$, donc si $y \in A \setminus \{x\}$, alors $y \leq \sup A$.

Donc $A \setminus \{x\}$ est borné, et $\sup(A \setminus \{x\}) \leq \sup A$.

Par ailleurs, $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de $A \setminus \{x\}$. Si on avait $\sup(A \setminus \{x\}) \leq x$, alors x serait un majorant de A tout entier, puisque $x \leq x$ et pour tout $y \in A \setminus \{x\}$, $y \leq \sup(A \setminus \{x\}) \leq x$. Donc x serait le plus grand élément de A , et donc $x = \sup(A)$.

Ceci est contraire à l'hypothèse de l'énoncé, donc $x < \sup(A \setminus \{x\})$.

Et donc $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de A . Puisque $\sup(A)$ est le plus petit de ces majorant $\sup(A) \leq \sup(A \setminus \{x\})$ et donc $\sup(A) = \sup(A \setminus \{x\})$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.6

Commençons par remarquer que les deux fonctions g et h sont bien définies puisque si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f , alors pour tout $y \in \mathbf{R}$, $m \leq f(y) \leq M$.

Et donc en particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $y \geq x$, $m \leq f(y) \leq M$.

Donc $\{f(y), y \geq x\}$ est une partie de \mathbf{R} non vide (elle contient $f(x)$), à la fois majorée et minorée, donc elle possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Remarque

À ce stade, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse impliquant des ε , et uniquement le fait que tout élément de A est plus petit que tout élément de B .

Rappel

Un plus grand élément, lorsqu'il existe, est toujours une borne supérieure.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $f(x) \in \{f(y), y \geq x\}$, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, et donc en particulier $g(x) \leq h(x)$, si bien que $g \leq h$.

Par ailleurs, si $x \leq x'$, alors $A_{x'} = \{f(y), y \geq x'\} \subset \{f(y), y \geq x\} = A_x$.

Et donc $g(x)$, qui est³ un minorant A_x est également un minorant de $A_{x'}$. Et par conséquent, $g(x')$, qui est le plus grand des minorants de $A_{x'}$ est plus grand que $g(x)$.

Donc $g(x) \leq g(x')$, si bien que g est croissante.

³ Par définition.

Et sur le même principe, $h(x)$ est un majorant de A_x , et donc de $A_{x'}$, si bien qu'il est plus grand que le plus petit des minorants de $A_{x'}$, à savoir $h(x')$. Et donc $h(x') \leq h(x)$, donc h est décroissante.

Remarque

Puisque $A_{x'} \subset A_x$, c'est un cas particulier de l'exercice 1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.7

Soient donc $a < b$ deux réels distincts.

Alors, par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, on a $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

Et donc par densité de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} , il existe $r \in \mathbf{Q}$ tel que $\sqrt[3]{a} < r < \sqrt[3]{b}$.

Et par stricte croissance de la fonction cube, on a donc $a < r^3 < b$, avec $r^3 \in E$.

Ainsi, entre deux réels distincts se trouve toujours un élément de E , si bien que E est dense dans \mathbf{R} .

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.8

Puisque A ne possède pas de plus grand élément, c'est donc que $M \notin A$.

Notons également que par la caractérisation «épsilonlesque» des bornes supérieures, pour tout $\varepsilon > 0$, $]M - \varepsilon, M[$ contient au moins un élément de A , et puisque $M \notin A$, $]M - \varepsilon, M[\cap A \neq \emptyset$. Supposons alors par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]M - \varepsilon, M[\cap A$ soit fini.

Notons alors $x = \max(]M - \varepsilon, M[\cap A)$ le plus grand de ces éléments.

Alors $x < M$, si bien que x n'est pas un majorant de A , et donc il existe $y \in A$ tel que $x < y$.

Mais alors $M - \varepsilon < x < y < M$, si bien que $y \in]M - \varepsilon, M[\cap A$, avec $y > x$. Ceci vient contredire le fait que x soit le plus grand élément de $]M - \varepsilon, M[\cap A$.

On en déduit donc que pour tout $\varepsilon > 0$, $]M - \varepsilon, M[\cap A$ est infini.

Si $M \in A$, ce résultat peut rester vrai (par exemple si $A = [0, 1]$), mais peut aussi être faux par exemple dès que A est fini (puisqu'alors pour tout $\varepsilon > 0$, $]M - \varepsilon, M[\cap A \subset A$ est fini).

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.9

1. On a doit avoir, en prenant $x = y = 0$, $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$.

Et donc $f(0) = 0$.

2. On a déjà $f(0) = 0 = 0\alpha$ et $f(1) = \alpha$.

Il vient ensuite $f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2\alpha$.

Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.

La récurrence est largement initialisée. Supposons donc que $f(n) = n\alpha$.

Alors $f(n + 1) = f(n) + f(1) = n\alpha + \alpha = (n + 1)\alpha$.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}$, le résultat a déjà été prouvé.

Soit donc n un entier négatif.

Alors $f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(0) = 0$.

Et donc $f(n) = -f(-n)$. Mais $-n \in \mathbf{N}$, et donc d'après la question précédente, $f(-n) = -n\alpha$.

Et donc $f(n) = n\alpha$.

4. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$. Alors $f(3r) = f(r) + f(r) = 2f(r)$.

Puis $f(2r) = f(r + r) = f(r) + f(r) = 2f(r)$.

Une récurrence facile prouve alors que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f(kr) = kf(r)$.

Et donc en particulier, $f(p) = f(qr) = qf(r)$. Puisque $p \in \mathbf{Z}$, nous savons⁴ que $f(p) = \alpha p$,

et donc $f(r) = \frac{1}{q}f(p) = \alpha \frac{p}{q} = \alpha r$.

- 5.a. Nous pourrions prendre pour a_n l'approximation décimale par défaut de x , et pour b_n son approximation décimale par excès. Mais il nous faudrait alors prouver qu'elles convergent vers x . Ce n'est pas bien dur, mais essayons autre chose.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors l'intervalle ouvert $\left]x - \frac{1}{n}, x\right[$ contient au moins un rationnel. Choisissons-en un, et appelons-le a_n .

Rappel

Un majorant de A qui est dans A est nécessairement le plus grand élément de A .

⁴ Par la question précédente.

On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x - \frac{1}{n} \leq a_n \leq x$, de sorte que par le théorème des gendarmes, nécessairement $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. De même, en choisissant b_n rationnel dans $\left] x, x + \frac{1}{n} \right[$, on construit une suite de rationnels, supérieure à x , de limite x .

- 5.b. Si f est croissante, alors on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(a_n) \leq f(x) \leq f(b_n)$.
 Mais a_n et b_n étant rationnels, on peut leur appliquer le résultat de la question 4 : $f(a_n) = \alpha a_n$ et $f(b_n) = \alpha b_n$.
 Donc $\alpha a_n \leq f(x) \leq \alpha b_n$.
 En passant à la limite, il vient donc $f(x) = \alpha x$.
6. Nous venons de prouver qu'une telle fonction est nécessairement de la forme $x \mapsto \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$.
 Inversement, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $f : x \mapsto \alpha x$ vérifie bien

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x + y) = \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y = f(x) + f(y)$$

et elle est croissante si et seulement si $\alpha \geq 0$.
 Donc les fonctions cherchées sont les $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.10

Notons que la seconde hypothèse signifie que A est «stable par milieux» : la moyenne de deux éléments de A est encore dans A .

Soit donc A une telle partie, et soient $x < y$ deux réels distincts. On souhaite prouver qu'il existe $a \in A$ tel que $a \in I =]x, y[$.

Soient a, b deux éléments de A tels que $a < x < y < b$, et posons $y_1 = \frac{a+b}{2}$.

Il y a alors trois cas de figure :

- soit $y_1 \in]x, y[$, auquel cas on a bien élément de A dans I .
- soit $y_1 > y$. Dans ce cas, on peut poser $y_2 = \frac{a+y_1}{2} = \frac{3a+b}{4}$, et espérer qu'il tombe dans $]x, y[$.
- soit $y_1 < x$. Dans ce cas on peut pose $y_2 = \frac{y_1+b}{2} = \frac{a+3b}{4}$, et espérer qu'il tombe dans $]x, y[$.

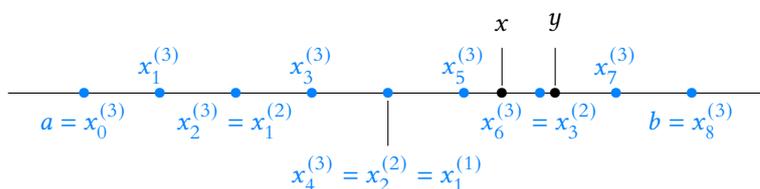
Mais que faire dans les deux derniers cas si y_2 n'est pas là où on l'attend ?

En considérant des milieux successifs, il est facile de prouver⁵ que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket$, $x_k^{(n)} = a + k \frac{b-a}{2^n} \in A$.

Autrement dit, les points $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ partagent le segment $[a, b]$ en 2^n segments de même longueur.

Et alors si n est tel que $\frac{b-a}{2^n} < y - x$, alors nécessairement, l'un au moins des $x_k^{(n)}$, pour $0 \leq k \leq n$ est dans $]x, y[$.

Ceci prouve donc qu'entre deux réels distincts se trouve toujours un élément de A , et donc que A est dense dans \mathbf{R} .



⚠ Attention !
 Ne pas oublier la synthèse !

Autrement dit
 Les solutions sont exactement les fonctions linéaires.

⁵ En réalité, il est facile de s'en convaincre, bien plus désagréable de l'écrire...

Détails
 Je vous laisse le soin d'essayer d'écrire les détails, mais il n'est pas trop dur d'obtenir une formule (avec une partie entière) pour obtenir un tel k .