TD 12 : Nombres réels

Exercice 12.1 Soient A, B deux parties de $\mathbf{R}$, non vides, avec B majorée et $A \subset B$. **PD**
Montrer que A admet une borne supérieure, et que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

Exercice 12.2 Montrer que les parties de $\mathbf{R}$ suivantes sont bornées. Déterminer leurs bornes inférieures et supérieures : **PD**

1. $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1},\ n \in \mathbf{N}\right\}$
2. $B = \left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p},\ (n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, n \leqslant p\right\}$
3. $C = \left\{(-1)^n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right),\ n \in \mathbf{N}^*\right\}$

Exercice 12.3 Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbf{R}$. **AD**

1. Montrer que $A \cup B$ est minorée, et montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
2. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $\max(\inf(A), \inf(B)) \leqslant \inf(A \cap B)$. Est-ce toujours une égalité ?
3. On pose $A + B = \{a + b,\ (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que $A + B$ est minorée et que $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Exercice 12.4 Parties adjacentes de R **D**
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$. On suppose que

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B, b - a < \varepsilon.$$

Montrer que A admet une borne supérieure, B admet une borne inférieure et $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 12.5 Soit A une partie majorée de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux éléments. On suppose que $x \in A$ et $x \neq \sup A$. **AD**
Montrer que $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.

Exercice 12.6 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction bornée. On définit deux fonctions g et h sur $\mathbf{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbf{R}$, **PD**

$$g(x) = \inf\{f(y),\ y \geqslant x\} \text{ et } h(x) = \sup\{f(y),\ y \geqslant x\}.$$

Montrer que g et h sont bien définies, que $g \leqslant h$, et étudier les monotonies de g et h.

Exercice 12.7 Montrer que $E = \{r^3,\ r \in \mathbf{Q}\}$ est dense dans $\mathbf{R}$. **PD**

Exercice 12.8 Soit A une partie majorée de $\mathbf{R}$, et soit $M = \sup A$. On suppose par ailleurs que A ne possède pas de plus grand élément. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments de A. **AD**
Ce résultat reste-t-il vrai si $M \in A$?

Exercice 12.9 Endomorphismes croissants de $(\mathbf{R}, +)$ **AD**
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
On pose $\alpha = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(n) = \alpha n$.
4. Montrer que pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha r$.
5. Soit $x \in \mathbf{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n), à valeurs rationnelles, de limite x, telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
   (b) On suppose f croissante. Montrer que $f(x) = \alpha x$.
6. Déterminer toutes les applications croissantes $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 12.10 Un critère de densité **AD**
Soit A une partie de $\mathbf{R}$ telle que :

i) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists (a,b) \in A^2, a < x < b$

ii) $\forall (a,b) \in A^2, \dfrac{a+b}{2} \in A$.

Prouver que A est dense dans $\mathbf{R}$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 12

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.1

Soit $M = \sup(B)$. Alors M est un majorant de B, et donc de A, qui est donc une partie majorée de $\mathbf{R}$.
Elle admet donc une borne supérieure, qui est le plus petit de ses majorants.
Mais M étant un majorant de A, $\sup(A) \leqslant M$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.2

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n+1} \leqslant 1 + \frac{1}{1} \leqslant 2$.
Donc déjà A est bornée, et étant non vide, admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Puisque $2 \in A$, c'est un majorant de A qui est dans A : c'est le plus grand élément de A, et donc sa borne supérieure.
Prouvons que $-1 = \inf(A)$. Nous savons déjà qu'il s'agit d'un minorant de A.
Utilisons la caractérisation epsilonesque de la borne inférieure. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{2n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{2\varepsilon}$.
Alors $(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = -1 + \frac{1}{2n+2} < -1 + \varepsilon$.
Et donc nous venons de prouver qu'il existe $a \in A$ tel que $-1 \leqslant a < -1 + \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $-1 = \inf(A)$.

2. Pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, on a $0 \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{p} < 1$, et donc B est bornée.
Elle est évidemment non vide, donc admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Montrons que $1 = \sup(A)$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Alors $\frac{1}{1} - \frac{1}{p} > 1 - \varepsilon$.
Et puisque 1 est un majorant de B, nous venons de prouver qu'il existe $b \in B$ tel que $1 - \varepsilon < b \leqslant 1$, et donc $\sup B = 1$.

Puisque $0 \in B$, et que nous avons déjà prouvé que 0 est un minorant de B, 0 est le plus petit élément de B, et donc sa borne inférieure.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant 1$, donc C est majorée.
Et pour tout $\varepsilon > 0$, si n est tel que $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, alors $1 - \varepsilon < \underbrace{(-1)^{2n}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}_{\in C} \leqslant 1$ et $-1 \leqslant$ $(-1)^{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < -1 + \varepsilon$.
Et donc comme pour les questions précédentes, on en conclut que $\inf C = -1$ et $\sup C = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.3

1. Soit $m = \min(\inf A, \inf B)$, et soit alors $x \in A \cup B$.
► Si $x \in A$, alors $x \geqslant \inf A \geqslant m$.
► Si $x \in B$, alors $x \geqslant \inf B \geqslant m$.
Donc m est un minorant de $A \cup B$, de sorte que $\inf(A \cup B)$ existe, et $\inf(A \cup B) \geqslant m$.

Considérons à présent M un minorant $A \cup B$.
Alors il s'agit d'un minorant de A, et donc[1] $M \leqslant \inf(A)$.
Et de même il s'agit d'un minorant de B, donc $M \leqslant \inf(B)$.
Et donc $M \leqslant m$.
On en déduit que m est plus grand que tout minorant de $A \cup B$: c'est le plus grand minorant de $A \cup B$, à savoir $\inf(A \cup B)$.

[1] $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.

2. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$, et donc $x \geqslant \inf(A)$ et $x \in B$ donc $x \geqslant \inf B$.
Par conséquent, $x \geqslant \max(\inf A, \inf B)$
Ainsi, $A \cap B$ est minorée par $\max(\inf A, \inf B)$, et en particulier est minorée et possède une borne inférieure.
Cette borne inférieure étant le plus grand des minorants, on a donc $\inf(A \cap B) \geqslant$

Logique !
Être plus grand que deux nombres c'est être plus grand que le maximum des deux.

$\max(\inf A, \inf B)$.
Il ne s'agit pas toujours d'une égalité, comme le prouve l'exemple $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, car alors $\inf(A \cap B) = \min(A \cap B) = 2$ et $\max(\inf A, \inf B) = 1$.

3. Soit $x \in A + B$. Alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$.
Et donc $x \geqslant \inf(A) + \inf(B)$. Donc $A + B$ est minorée, par $\inf(A) + \inf(B)$, et donc possède une borne supérieure, qui est donc[2] supérieure ou égale à $\inf(A) + \inf(B)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $\inf(A) \leqslant a < \inf(A) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
De même, il existe $b \in B$ tel que $\inf(B) \leqslant b < \inf(B) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Et donc si on pose $x = a + b \in A + B$ tel que $\inf(A) + \inf(B) \leqslant a + b < \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$.
On reconnaît alors la caractérisation d'une borne inférieure : $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

[2] Encore une fois : la borne inférieure est le plus grand des minorants.

Solution de l'exercice 12.4

Puisque B est non vide, il existe au moins un élément dans B, qui est alors un majorant de A. Donc A est majorée, non vide par hypothèse, et par conséquent admet une borne supérieure.
De même, tout élément de A est un minorant de B, qui admet donc une borne inférieure.

On a alors, $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \leqslant b$.
Et donc, tout élément a de A est un minorant de B.
Mais par définition, $\inf B$ est le plus grand des minorants de B, donc pour tout $a \in A$, $a \leqslant \inf B$.
Et donc $\inf B$ est un majorant de A. Or $\sup A$ est le plus petit des minorants de A, donc $\sup A \leqslant \inf B$.

Remarque
À ce stade, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse impliquant des ε, et uniquement le fait que tout élément de A est plus petit que tout élément de B.

Prouvons à présent que l'inégalité que nous venons d'obtenir ne peut être stricte, et supposons par l'absurde que $\sup(A) < \inf(B)$, et soit alors $\varepsilon = \inf(B) - \sup(A) > 0$.
Alors, $\exists (a, b) \in A \times B$ tels que $b - a < \varepsilon \Leftrightarrow b < a + \varepsilon$. Mais alors

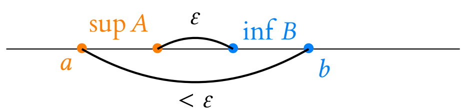

Figure 12.1 – On ne peut avoir $\sup A < \inf B$.

$$\inf(B) \leqslant b < a + \varepsilon \leqslant \sup(A) + \varepsilon = \inf(B).$$

Ceci est absurde, donc $\sup(A) = \inf(B)$.

Solution de l'exercice 12.5

On a déjà $A \setminus \{x\} \subset A$, donc si $y \in A \setminus \{x\}$, alors $y \leqslant \sup A$.
Donc $A \setminus \{x\}$ est borné, et $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant \sup A$.

Par ailleurs, $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de $A \setminus \{x\}$. Si on avait $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant x$, alors x serait un majorant de A tout entier, puisque $x \leqslant x$ et pour tout $y \in A \setminus \{x\}$, $y \leqslant \sup(A \setminus \{x\}) \leqslant x$.
Donc x serait le plus grand élément de A, et donc $x = \sup(A)$.
Ceci est contraire à l'hypothèse de l'énoncé, donc $x < \sup(A \setminus \{x\})$.
Et donc $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de A. Puisque $\sup(A)$ est le plus petit de ces majorant $\sup(A) \leqslant \sup(A \setminus \{x\})$ et donc $\sup(A) = \sup(A \setminus \{x\})$.

Rappel
Un plus grand élément, lorsqu'il existe, est toujours une borne supérieure.

Solution de l'exercice 12.6

Commençons par remarquer que les deux fonctions g et h sont bien définies puisque si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f, alors pour tout $y \in \mathbf{R}$, $m \leqslant f(y) \leqslant M$.
Et donc en particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $y \geqslant x$, $m \leqslant f(y) \leqslant M$.
Donc $\{f(y),\ y \geqslant x\}$ est une partie de $\mathbf{R}$ non vide (elle contient $f(x)$), à la fois majorée et minorée, donc elle possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque $f(x) \in \{f(y),\ y \geqslant x\}$, on a $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, et donc en particulier $g(x) \leqslant h(x)$, si bien que $g \leqslant h$.
Par ailleurs, si $x \leqslant x'$, alors $A_{x'} = \{f(y),\ y \geqslant x'\} \subset \{f(y),\ y \geqslant x\} = A_x$.
Et donc $g(x)$, qui est[3] un minorant A_x est également un minorant de $A_{x'}$. Et par conséquent, $g(x')$, qui est le plus grand des minorants de $A_{x'}$ est plus grand que $g(x)$.
Donc $g(x) \leqslant g(x')$, si bien que g est croissante.

[3] Par définition.

Et sur le même principe, $h(x)$ est un majorant de A_x, et donc de $A_{x'}$, si bien qu'il est plus grand que le plus petit des minorants de $A_{x'}$, à savoir $h(x')$. Et donc $h(x') \leqslant h(x)$, donc h est décroissante.

Remarque
Puisque $A_{x'} \subset A_x$, c'est un cas particulier de l'exercice 1.·

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.7

Soient donc $a < b$ deux réels distincts.
Alors, par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, on a $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.
Et donc par densité de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$, il existe $r \in \mathbf{Q}$ tel que $\sqrt[3]{a} < r < \sqrt[3]{b}$.
Et par stricte croissance de la fonction cube, on a donc $a < r^3 < b$, avec $r^3 \in E$.
Ainsi, entre deux réels distincts se trouve toujours un élément de E, si bien que E est dense dans $\mathbf{R}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.8

Puisque A ne possède pas de plus grand élément, c'est donc que $M \notin A$.

Rappel
Un majorant de A qui est dans A est nécessairement le plus grand élément de A.

Notons également que par la caractérisation «epsilonesque» des bornes supérieures, pour tout $\varepsilon > 0$, $]M-\varepsilon, M]$ contient au moins un élément de A, et puisque $M \notin A$, $]M-\varepsilon, M[\cap A \neq \emptyset$.
Supposons alors par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]M-\varepsilon, M[\cap A$ soit fini.
Notons alors $x = \max\left(]M-\varepsilon, M[\cap A\right)$ le plus grand de ces éléments.
Alors $x < M$, si bien que x n'est pas un majorant de A, et donc il existe $y \in A$ tel que $x < y$.
Mais alors $M - \varepsilon < x < y < M$, si bien que $y \in]M-\varepsilon, M[\cap A$, avec $y > x$. Ceci vient contredire le fait que x soit le plus grand élément de $]M-\varepsilon, M[\cap A$.

On en déduit donc que pour tout $\varepsilon > 0$, $]M-\varepsilon, M[\cap A$ est infini.

Si $M \in A$, ce résultat peut rester vrai (par exemple si $A = [0, 1]$), mais peut aussi être faux par exemple dès que A est fini (puisqu'alors pour tout $\varepsilon > 0$, $]M-\varepsilon, M[\cap A \subset A$ est fini).

SOLUTION DE L'EXERCICE 12.9

1. On a doit avoir, en prenant $x = y = 0$, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$.
Et donc $f(0) = 0$.

2. On a déjà $f(0) = 0 = 0\alpha$ et $f(1) = \alpha$.
Il vient ensuite $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2\alpha$.
Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.
La récurrence est largement initialisée. Supposons donc que $f(n) = n\alpha$.
Alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = n\alpha + \alpha = (n+1)\alpha$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}$, le résultat a déjà été prouvé.
Soit donc n un entier négatif.
Alors $f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(0) = 0$.
Et donc $f(n) = -f(-n)$. Mais $-n \in \mathbf{N}$, et donc d'après la question précédente, $f(-n) = -n\alpha$.
Et donc $f(n) = n\alpha$.

4. Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$. Alors $f(2r) = f(r) + f(r) = 2f(r)$.
Puis $f(2r) = f(r + 2r) = f(r) + f(2r) = f(r) + 2f(r) = 3f(r)$.
Une récurrence facile prouve alors que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f(kr) = kf(r)$.
Et donc en particulier, $f(p) = f(qr) = qf(r)$. Puisque $p \in \mathbf{Z}$, nous savons que $f(p) = \alpha p$, et donc $f(r) = \dfrac{1}{q} f(p) = \alpha \dfrac{p}{q} = \alpha r$.

5.a. Nous pourrions prendre pour a_n l'approximation décimale par défaut de x, et pour b_n son approximation décimale par excès. Mais il nous faudrait alors prouver qu'elles convergent vers x. Ce n'est pas bien dur, mais essayons autre chose.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors l'intervalle ouvert $\left]x - \dfrac{1}{n}, x\right[$ contient au moins un rationnel. Choisissons-en un, et appelons-le a_n.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x - \dfrac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant x$, de sorte que par le théorème des gendarmes, nécessairement $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$. De même, en choisissant b_n rationnel dans $\left]x, x + \dfrac{1}{n}\right[$, on construit une suite de rationnels, supérieure à x, de limite x.

5.b. Si f est croissante, alors on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(a_n) \leqslant f(x) \leqslant f(b_n)$.
Mais a_n et b_n étant rationnels, on peut leur appliquer le résultat de la question 4 : $f(a_n) = \alpha a_n$ et $f(b_n) = \alpha b_n$.
Donc $\alpha a_n \leqslant f(x) \leqslant \alpha b_n$.
En passant à la limite, il vient donc $f(x) = \alpha x$.

6. Nous venons de prouver qu'une telle fonction est nécessairement de la forme $x \mapsto \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$.
Inversement, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $f : x \mapsto \alpha x$ vérifie bien

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = f(x) + f(y)$$

et elle est croissante si et seulement si $\alpha \geqslant 0$.
Donc les fonctions cherchées sont les $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

⚠ Attention ! Ne pas oublier la synthèse !

Autrement dit : Les solutions sont exactement les fonctions linéaires.

Solution de l'exercice 12.10

Notons que la seconde hypothèse signifie que A est «stable par milieux» : la moyenne de deux éléments de A est encore dans A.
Soit donc A une telle partie, et soient $x < y$ deux réels distincts. On souhaite prouver qu'il existe $a \in A$ tel que $a \in I =]x, y[$.
Soient a, b deux éléments de A tels que $a < x < y < b$, et posons $y_1 = \frac{a+b}{2}$.
Il y a alors trois cas de figure :

- soit $y_1 \in]x, y[$, auquel cas on a bien élément de A dans I.
- soit $y_1 > y$. Dans ce cas, on peut poser $y_2 = \frac{a+y_1}{2} = \frac{3a+b}{4}$, et espérer qu'il tombe dans $]x, y[$.
- soit $y_1 < x$. Dans ce cas on peut pose $y_2 = \frac{y_1+b}{2} = \frac{a+3b}{4}$, et espérer qu'il tombe dans $]x, y[$.

Mais que faire dans les deux derniers cas si y_2 n'est pas là où on l'attend ?
En considérant des milieux successifs, il est facile de prouver[4] que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, 2^n]\!]$, $x_k^{(n)} = a + k\dfrac{b-a}{2^n} \in A$.
Autrement dit, les points $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ partagent le segment $[a, b]$ en 2^n segments de même longueur.
Et alors si n est tel que $\frac{b-a}{2^n} < y - x$, alors nécessairement, l'un au moins des $x_k^{(n)}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$ est dans $]x, y[$.
Ceci prouve donc qu'entre deux réels distincts se trouve toujours un élément de A, et donc que A est dense dans $\mathbf{R}$.

[4] En réalité, il est facile de s'en convaincre, bien plus désagréable de l'écrire...

Détails : Je vous laisse le soin d'essayer d'écrire les détails, mais il n'est pas trop dur d'obtenir une formule (avec une partie entière) pour obtenir un tel k.