TD 11 : Réels

Exercice 11.1 Soient A, B deux parties de $\mathbf{R}$, non vides, avec B majorée et $A \subset B$. **PD**
Montrer que A admet une borne supérieure, et que $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.

Exercice 11.2 Montrer que les parties de $\mathbf{R}$ suivantes sont bornées. Déterminer leurs bornes inférieures et supérieures : **PD**

1. $A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbf{N}\right\}$
2. $B = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p},\ (n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*, n \leqslant p\right\}$
3. $C = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbf{N}^*\right\}$

Exercice 11.3 Un cas particulier du théorème de Knaster-Tarski **AD**
Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. Le but de l'exercice est de prouver que f admet un point fixe.

1. On pose $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geqslant x\}$. Prouver que A est non vide et majorée.
2. Soit $c = \sup A$. Montrer que $c \in [0,1]$, puis que $c \leqslant f(c)$.
3. Prouver que $f(c) \in A$. Conclure.

Exercice 11.4 Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbf{R}$. **AD**

1. Montrer que $A \cup B$ est minorée, et montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
2. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $\max(\inf(A), \inf(B)) \leqslant \inf(A \cap B)$. Est-ce toujours une égalité ?
3. On pose $A + B = \{a + b,\ (a,b) \in A \times B\}$. Montrer que $A + B$ est minorée et que $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Exercice 11.5 Parties adjacentes de R **D**
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbf{R}$. On suppose que

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leqslant b \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B, b - a < \varepsilon.$$

Montrer que A admet une borne supérieure, b admet une borne inférieure et $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 11.6 Soit A une partie majorée de $\mathbf{R}$ contenant au moins deux éléments. On suppose que $x \in A$ et $x \neq \sup A$. **AD**
Montrer que $\sup(A \setminus \{x\}) = \sup A$.

Exercice 11.7 Endomorphismes croissants de $(\mathbf{R}, +)$ **AD**
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
On pose $\alpha = f(1)$.

1. Déterminer $f(0)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \alpha n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(n) = \alpha n$.
4. Montrer que pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = \alpha r$.
5. Soit $x \in \mathbf{R}$.
   (a) Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n), à valeurs rationnelles, de limite x, telle que $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant x \leqslant b_n$.
   (b) On suppose f croissante. Montrer que $f(x) = \alpha x$.
6. Déterminer toutes les applications croissantes $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 11.8 Un critère de densité **AD**
Soit A une partie de $\mathbf{R}$ telle que :

i) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists (a,b) \in A^2, a < x < b$

ii) $\forall (a,b) \in A^2, \frac{a+b}{2} \in A$.

Prouver que A est dense dans $\mathbf{R}$.

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 11

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.1

Soit $M = \sup(B)$. Alors M est un majorant de B, et donc de A, qui est donc une partie majorée de $\mathbf{R}$.
Elle admet donc une borne supérieure, qui est le plus petit de ses majorants.
Mais M étant un majorant de A, $\sup(A) \leqslant M$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.2

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{1}{1} \leqslant 2$.
Donc déjà A est bornée, et étant non vide, admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Puisque $2 \in A$, c'est un majorant de A qui est dans A : c'est le plus grand élément de A, et donc sa borne supérieure.
Prouvons que $-1 = \inf(A)$. Nous savons déjà qu'il s'agit d'un minorant de A.
Utilisons la caractérisation epsilonesque de la borne inférieure. Soit $\varepsilon > 0$.
Soit alors $n \in \mathbf{N}$ tel que $\dfrac{1}{2n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \dfrac{1}{2\varepsilon}$.
Alors $(-1)^{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} = -1 + \dfrac{1}{2n+2} < -1 + \varepsilon$.
Et donc nous venons de prouver qu'il existe $a \in A$ tel que $-1 \leqslant a < -1 + \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, $-1 = \inf(A)$.

2. Pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, on a $0 \leqslant \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} < 1$, et donc B est bornée.
Elle est évidemment non vide, donc admet une borne supérieure et une borne inférieure.
Montrons que $1 = \sup(A)$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{p} < \varepsilon$. Alors $\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{p} > 1 - \varepsilon$.
Et puisque 1 est un majorant de B, nous venons de prouver qu'il existe $b \in B$ tel que $1 - \varepsilon < b \leqslant 1$, et donc $\sup B = 1$.

Puisque $0 \in B$, et que nous avons déjà prouvé que 0 est un minorant de B, 0 est le plus petit élément de B, et donc sa borne inférieure.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-1 \leqslant (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \leqslant 1$, donc C est majorée.
Et pour tout $\varepsilon > 0$, si n est tel que $\frac{1}{2n} < \varepsilon$, alors $1 - \varepsilon < \underbrace{(-1)^{2n}\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)}_{\in C} \leqslant 1$ et $-1 \leqslant$ $(-1)^{2n+1}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) < -1 + \varepsilon$.
Et donc comme pour les questions précédentes, on en conclut que $\inf C = -1$ et $\sup C = 1$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.3

1. La partie A est non vide puisque f étant à valeurs dans $[0, 1]$, on a $f(0) \leqslant 0$ et donc $0 \in A$.
De plus elle est évidemment majorée par 1.

2. Puisque 1 est un majorant de A, nécessairement[1] $c \leqslant 1$.
Et puisque $0 \in A$, $c \geqslant 0$ (la borne supérieure est un majorant de A, donc plus grande que tout élément de A).
Donc déjà, $c \in [0, 1]$, de sorte que $f(c)$ est bien défini.
Soit x un élément de A. Alors $x \leqslant c$, et donc par croissance de f, $f(x) \leqslant f(c)$.
Et donc pour tout $x \in A$, $x \leqslant f(x) \leqslant f(c)$, si bien que $f(c)$ est un majorant de A. Et donc[2] $c \leqslant f(c)$.

3. Puisque $c \leqslant f(c)$, par croissance de f, $f(c) \leqslant f(f(c))$. Et donc $f(c) \in A$. Mais alors $f(c) \leqslant c$, puisque c est un majorant de A. Et donc par double inégalité, $f(c) = c$, donc c est un point fixe de f.

[1] La borne supérieure est le plus petit des majorants.

[2] Encore une fois : la borne sup. est le plus petit des majorants.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.4

1. Soit $m = \min(\inf A, \inf B)$, et soit alors $x \in A \cup B$.
► Si $x \in A$, alors $x \geqslant \inf A \geqslant m$.
► Si $x \in B$, alors $x \geqslant \inf B \geqslant m$.

Donc m est un minorant de $A \cup B$, de sorte que $\inf(A \cup B)$ existe, et $\inf(A \cup B) \geqslant m$.

Considérons à présent M un minorant $A \cup B$.
Alors il s'agit d'un minorant de A, et donc[3] $M \leqslant \inf(A)$.
Et de même il s'agit d'un minorant de B, donc $M \leqslant \inf(B)$.
Et donc $M \leqslant m$.
On en déduit que m est plus grand que tout minorant de $A \cup B$: c'est le plus grand minorant de $A \cup B$, à savoir $\inf(A \cup B)$.

[3] $\inf(A)$ est le plus grand des minorants de A.

2. Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$, et donc $x \geqslant \inf(A)$ et $x \in B$ donc $x \geqslant \inf B$.
Par conséquent, $x \geqslant \max(\inf A, \inf B)$
Ainsi, $A \cap B$ est minorée par $\max(\inf A, \inf B)$, et en particulier est minorée et possède une borne inférieure.
Cette borne inférieure étant le plus grand des minorants, on a donc $\inf(A \cap B) \geqslant \max(\inf A, \inf B)$.
Il ne s'agit pas toujours d'une égalité, comme le prouve l'exemple $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 2\}$, car alors $\inf(A \cap B) = \min(A \cap B) = 2$ et $\max(\inf A, \inf B) = 1$.

> **Logique !**
> Être plus grand que deux nombres c'est être plus grand que le maximum des deux.

3. Soit $x \in A + B$. Alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$.
Et donc $x \geqslant \inf(A) + \inf(B)$. Donc $A + B$ est minorée, par $\inf(A) + \inf(B)$, et donc possède une borne supérieure, qui est donc[4] supérieure ou égale à $\inf(A) + \inf(B)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $\inf(A) \leqslant a < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$.
De même, il existe $b \in B$ tel que $\inf(B) \leqslant b < \inf(B) + \frac{\varepsilon}{2}$.
Et donc si on pose $x = a + b \in A + B$ tel que $\inf(A) + \inf(B) \leqslant a + b < \inf(A) + \inf(B) + \varepsilon$.
On reconnaît alors la caractérisation d'une borne inférieure : $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

[4] Encore une fois : la borne inférieure est le plus grand des minorants.

Solution de l'exercice 11.5

Puisque B est non vide, il existe au moins un élément dans B, qui est alors un majorant de A. Donc A est majorée, non vide par hypothèse, et par conséquent admet une borne supérieure.
De même, tout élément de A est un minorant de B, qui admet donc une borne inférieure.

On a alors, $\forall (a, b) \in A \times B$, $a \leqslant b$.
Et donc, tout élément a de A est un minorant de B.
Mais par définition, $\inf B$ est le plus grand des minorants de B, donc pour tout $a \in A$, $a \leqslant \inf B$.
Et donc $\inf B$ est un majorant de A. Or $\sup A$ est le plus petit des minorants de A, donc $\sup A \leqslant \inf B$.

> **Remarque**
> À ce stade, nous n'avons pas utilisé l'hypothèse impliquant des ε, et uniquement le fait que tout élément de A est plus petit que tout élément de B.

Prouvons à présent que l'inégalité que nous venons d'obtenir ne peut être stricte, et supposons par l'absurde que $\sup(A) < \inf(B)$, et soit alors $\varepsilon = \inf(B) - \sup(A) > 0$.
Alors, $\exists (a, b) \in A \times B$ tels que $b - a < \varepsilon \Leftrightarrow b < a + \varepsilon$. Mais alors

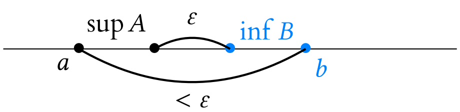

Figure 11.1 – On ne peut avoir $\sup A < \inf B$.

$$\inf(B) \leqslant b < a + \varepsilon \leqslant \sup(A) + \varepsilon = \inf(B).$$

Ceci est absurde, donc $\sup(A) = \inf(B)$.

Solution de l'exercice 11.6

On a déjà $A \setminus \{x\} \subset A$, donc si $y \in A \setminus \{x\}$, alors $y \leqslant \sup A$.
Donc $A \setminus \{x\}$ est borné, et $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant \sup A$.

Par ailleurs, $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de $A \setminus \{x\}$. Si on avait $\sup(A \setminus \{x\}) \leqslant x$, alors x serait un majorant de A tout entier, puisque $x \leqslant x$ et pour tout $y \in A \setminus \{x\}$, $y \leqslant \sup(A \setminus \{x\}) \leqslant x$.
Donc x serait le plus grand élément de A, et donc $x = \sup(A)$.

> **Rappel**
> Un plus grand élément, lorsqu'il existe, est toujours une borne supérieure.

Ceci est contraire à l'hypothèse de l'énoncé, donc $x < \sup(A \setminus \{x\})$.
Et donc $\sup(A \setminus \{x\})$ est un majorant de A. Puisque $\sup(A)$ est le plus petit de ces majorant $\sup(A) \leqslant \sup(A \setminus \{x\})$ et donc $\sup(A) = \sup(A \setminus \{x\})$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.7

1. On a doit avoir, en prenant $x = y = 0$, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$.
Et donc $f(0) = 0$.

2. On a déjà $f(0) = 0 = 0\alpha$ et $f(1) = \alpha$.
Il vient ensuite $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2\alpha$.
Prouvons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.
La récurrence est largement initialisée. Supposons donc que $f(n) = n\alpha$.
Alors $f(n+1) = f(n) + f(1) = n\alpha + \alpha = (n+1)\alpha$.
Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n\alpha$.

3. Pour $n \in \mathbf{N}$, le résultat a déjà été prouvé.
Soit donc n un entier négatif.
Alors $f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(0) = 0$.
Et donc $f(n) = -f(-n)$. Mais $-n \in \mathbf{N}$, et donc d'après la question précédente, $f(-n) = -n\alpha$.
Et donc $f(n) = n\alpha$.

4. Soit $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}$. Alors $f(2r) = f(r) + f(r) = 2f(r)$.
Puis $f(2r) = f(r + 2r) = f(r) + f(2r) = f(r) + 2f(r) = 3f(r)$.
Une récurrence facile prouve alors que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f(kr) = kf(r)$.
Et donc en particulier, $f(p) = f(qr) = qf(r)$. Puisque $p \in \mathbf{Z}$, nous savons que $f(p) = \alpha p$, et donc $f(r) = \dfrac{1}{q} f(p) = \alpha\dfrac{p}{q} = \alpha r$.

5.a. Nous pourrions prendre pour a_n l'approximation décimale par défaut de x, et pour b_n son approximation décimale par excès. Mais il nous faudrait alors prouver qu'elles convergent vers x. Ce n'est pas bien dur, mais essayons autre chose.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors l'intervalle ouvert $\left]x - \dfrac{1}{n}, x\right[$ contient au moins un rationnel. Choisissons-en un, et appelons-le a_n.
On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x - \dfrac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant x$, de sorte que par le théorème des gendarmes, nécessairement $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$. De même, en choisissant b_n rationnel dans $\left]x, x + \dfrac{1}{n}\right[$, on construit une suite de rationnels, supérieure à x, de limite x.

5.b. Si f est croissante, alors on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(a_n) \leqslant f(x) \leqslant f(b_n)$.
Mais a_n et b_n étant rationnels, on peut leur appliquer le résultat de la question 4 : $f(a_n) = \alpha a_n$ et $f(b_n) = \alpha b_n$.
Donc $\alpha a_n \leqslant f(x) \leqslant \alpha b_n$.
En passant à la limite, il vient donc $f(x) = \alpha x$.

6. Nous venons de prouver qu'une telle fonction est nécessairement de la forme $x \mapsto \alpha x$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$.
Inversement, pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $f : x \mapsto \alpha x$ vérifie bien

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,\ f(x+y) = \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y = f(x) + f(y)$$

et elle est croissante si et seulement si $\alpha \geqslant 0$.
Donc les fonctions cherchées sont les $x \mapsto \alpha x$, $\alpha \in \mathbf{R}_+$.

> ⚠ Attention !
> Ne pas oublier la synthèse !

SOLUTION DE L'EXERCICE 11.8

Notons que la seconde hypothèse signifie que A est «stable par milieux» : la moyenne de deux éléments de A est encore dans A.
Soit donc A une telle partie, et soient $x < y$ deux réels distincts. On souhaite prouver qu'il existe $a \in A$ tel que $a \in I =]x, y[$.
Soient a, b deux éléments de A tels que $a < x < y < b$, et posons $y_1 = \frac{a+b}{2}$.
Il y a alors trois cas de figure :

— soit $y_1 \in]x, y[$, auquel cas on a bien élément de A dans I.

— soit $y_1 > y$. Dans ce cas, on peut poser $y_2 = \frac{a+y_1}{2} = \frac{3a+b}{4}$, et espérer qu'il tombe dans $]x, y[$.

— soit $y_1 < x$. Dans ce cas on peut pose $y_2 = \frac{y_1+b}{2} = \frac{a+3b}{4}$, et espérer qu'il tombe dans $]x, y[$.

Mais que faire dans les deux derniers cas si y_2 n'est pas là où on l'attend ?
En considérant des milieux successifs, il est facile de prouver[5] que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, 2^n]\!]$, $x_k^{(n)} = a + k\dfrac{b-a}{2^n} \in A$.
Autrement dit, les points $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ partagent le segment $[a, b]$ en 2^n segments de même longueur.
Et alors si n est tel que $\frac{b-a}{2^n} < y - x$, alors nécessairement, l'un au moins des $x_k^{(n)}$, pour $0 \leqslant k \leqslant n$ est dans $]x, y[$.
Ceci prouve donc qu'entre deux réels distincts se trouve toujours un élément de A, et donc que A est dense dans $\mathbf{R}$.

[5] En réalité, il est facile de s'en convaincre, bien plus désagréable de l'écrire...

Détails
Je vous laisse le soin d'essayer d'écrire les détails, mais il n'est pas trop dur d'obtenir une formule (avec une partie entière) pour obtenir un tel k.