TD 10 : Équations différentielles linéaires

Sauf mention explicite du contraire, les fonctions cherchées sont à valeurs réelles.

▸ Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 10.1 Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles I indiqués **PD**

1. $y' + y = e^{2x}$, $I = \mathbf{R}$
2. $2ty'(t) - 3y(t) = t^2$, $I = \mathbf{R}_+^*$
3. $(t-1)y' - 2y = (t-1)^3$, $I =]-\infty, 1[$
4. $\sqrt{1-t^2}y' - y = 2$, $I =]-1, 1[$.
5. $xy' - 2y = x^5 \sin(x)$, $I = \mathbf{R}_-^*$
6. $y' - y = \mathrm{sh}(x)$, $I = \mathbf{R}$
7. $(t^2+1)^2 y' + 2t(t^2+1)y = 2$, $I = \mathbf{R}$
8. $(1+x^2)y' - y = 1$, $I = \mathbf{R}$
9. $y' + y\tan x = \sin(2x)$, $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 10.2 Avec des conditions initiales **PD**

Déterminer les solutions aux problèmes de Cauchy suivants :

1. $y' + y = \cos(t)e^t$, $y(0) = -1$
2. $(x+1)y' + (x^2+x+1)y = x$, $y(1) = e$
3. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$, $y(0) = 0$

Exercice 10.3 Non annulation des solutions d'une équation homogène **F**

Soit $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ une équation différentielle linéaire homogène d'ordre un, où $a : I \to \mathbf{R}$ est une fonction continue sur un intervalle I, et soit y_0 une solution de l'équation.

Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_0(t_0) = 0$, alors y_0 est la fonction nulle.

Exercice 10.4 Raccordement de solutions **AD**

Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbf{R}$:

1. $xy' - 2y = 2x^4$.
2. $x(x^2+1)y' - (x^2-1)y = -2x$
3. $xy' - y = x^2$
4. $x^2y' - y = (x^2-1)e^x$

Exercice 10.5 (Oral Mines PSI) **AD**

Existe-t-il des solutions sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle $y'\sin x + y\cos x = \sin^2 x$?

Exercice 10.6 Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f'(t) + f(t) = \int_0^1 f(x)\,dx \quad (E)$. **AD**

▸ Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 10.7 Équations homogènes **F**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = 0$
2. $y'' + y' + y = 0$, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ puis $\mathbf{K} = \mathbf{R}$
3. $y'' + 4y' - 6y = 0$
4. $y'' - 4y' + ay = 0$, $a \in \mathbf{R}$.
5. $y'' + (-1+i)y' + (i-2)y = 0$
6. $y'' + 2y' + 10y = 0$, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{R}$

Exercice 10.8 Une équation à coefficients complexes **F**

Résoudre l'équation complexe suivante : $y'' - (1-i)y' - 2(1+i)y = 0$.

Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = y'(0) = 1$.

Exercice 10.9 Équations avec second membre **PD**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + y = \mathrm{sh}(x)$
2. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x}\sin(x)$
3. $y'' - 3y' + 2y = \sin x + \cos x$.
4. $y'' - y = e^x\cos(2x)$
5. $y'' + y = \sin(x)$

Exercice 10.10 AD

1. Résoudre $y'' + 2y' = x^2 - x + 2\,\mathrm{ch}(x)$.
2. Résoudre $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

Exercice 10.11 Équation différentielle d'Euler AD

Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, et $c : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ continue. On cherche à résoudre, sur $\mathbf{R}_+^*$, l'équation différentielle (linéaire, d'ordre 2, à coefficients non constants)

$$x^2y'' + axy' + by = c(x) \qquad (E).$$

1. On procède au «changement de variable $t = \ln(x)$», c'est-à-dire que pour y deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, on définit une fonction z sur $\mathbf{R}$ par $z : t \mapsto y(e^t)$.
   (a) Calculer z' et z''. Exprimer y, y' et y'' en fonction de z, z' et z''.
   (b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation à coefficients constants que l'on précisera.
2. Résoudre l'équation $x^2y'' + xy' + y = x^2 + x + 1$.

► Divers

Exercice 10.12 AD

1. Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = -f(-x)$.
2. Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R},\ f'(x) = f(-x) + xe^{-x}$.

Exercice 10.13 D

Trouver toutes les fonctions continues sur $\mathbf{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) + \int_0^x (x - t)f(t)\,dt = 1.$$

Exercice 10.14 Changement de fonction inconnue AD

Résoudre l'équation différentielle (non linéaire, du 1er ordre) $y' = e^{x+y}$ en posant $z = e^{-y}$.

► Suites récurrentes linéaires

Exercice 10.15 F

Donner les termes généraux des suites suivantes :

1. $u_0 = 7,\ u_{n+1} = 3u_n + 4,$
2. $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_{n+2} + 4u_n = 4u_{n+1}$
3. $u_0 = 1, u_1 = -1,\ 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
4. $u_0 = 1, u_1 = 2,\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Exercice 10.16 PD

Soit $\theta \in]0, \pi[$, et soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, u_{n+2} = 2\cos(\theta)u_{n+1} - u_n$$

Déterminer le terme général de (u_n).

Exercice 10.17 PD

Montrer qu'une suite arithmético-géométrique (v_n) vérifiant $\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+1} = av_n + b$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Déterminer les racines de son polynôme caractéristique.

Retrouver alors le terme général de la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_{v+1} = 2v_n - 3 \end{cases}$.

Exercice 10.18 (ENS MP) TD

Déterminer l'ensemble des applications $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ telles que

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x)$$

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 10

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.1

Par facilité, nous nommerons à chaque fois (E) l'équation de l'énoncé et (E_0) l'équation homogène associée.

1. L'équation homogène est $y' + y = 0$, dont les solutions sont les $x \mapsto \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière de (E) par variation de la constante, sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$, où λ est une fonction dérivable.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(x)e^{-x} - \cancel{\lambda(x)e^{-x}} + \cancel{\lambda(x)e^{-x}} = e^{2x} \Leftrightarrow \lambda'(x) = e^{3x}.$$

Donc par exemple $\lambda(x) = \dfrac{e^{3x}}{3}$ convient, de sorte que $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{3}$ est solution de (E).
Et donc les solutions de (E) sont les $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{3} + \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Commençons par mettre l'équation sous forme normalisée : $y'(t) - \dfrac{3}{2t}y(t) = \dfrac{t}{2}$.
Les solutions de l'équation homogène $y'(t) - \dfrac{3}{2t}y(t) = 0$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{\frac{3}{2}\ln(t)} = \lambda t\sqrt{t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)t\sqrt{t}$.
Alors $y'(t) = \lambda'(t)t\sqrt{t} + \lambda(t)\dfrac{3}{2}\sqrt{t}$.
Et donc y est solution de l'équation si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$2t^2\sqrt{t}\lambda'(t) + \cancel{3\lambda(t)t\sqrt{t}} - \cancel{3\lambda(t)t\sqrt{t}} = t^2 \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

On peut donc choisir $\lambda(t) = \sqrt{t}$, et donc une solution de l'équation de départ est $t \mapsto t^2$.
Et donc les solutions de (E) sont exactement les fonctions de la forme $t \mapsto t^2 + \lambda t\sqrt{t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

3. L'équation sous forme normalisée est $y' - \dfrac{2}{t-1}y = (t-1)^2$.
Les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{2\ln(1-t)} = \lambda(1-t)^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante, sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)(t-1)^2$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(t)(t-1)^2 + \cancel{2\lambda(t)(t-1)} - \cancel{2\lambda(t)(t-1)} = (t-1)^2 \Leftrightarrow \lambda'(t) = 1.$$

Et donc $\lambda(t) = t$ convient, de sorte que les solutions de (E) sont les $t \mapsto (t-1)^2(\lambda+t)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

4. On a $(E_0) : y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}y = 0$.
Or une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est la fonction Arcsin, de sorte que les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{\text{Arcsin}(t)}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Plutôt que d'appliquer la méthode de variation de la constante, notons que la fonction constante $t \mapsto -2$ est solution.
Et donc les solutions de (E) sont les $t \mapsto -2 + \lambda e^{\text{Arcsin}(t)}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

> **Astuce**
> Le but de la méthode de variation de la constante est de trouver une solution particulière. Si on en voit une directement, il ne faut pas se priver de l'utiliser.

5. Sous forme normalisée, l'équation s'écrit $y' - \dfrac{2}{x}y = x^4\sin(x)$.
L'équation homogène est alors $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$. Or, une primitive de $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ sur $\mathbf{R}_-^*$ est $x \mapsto -2\ln(-x) = -\ln(x^2)$.
Donc les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{\ln(x^2)} = \lambda x^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Pour trouver une solution particulière, utilisons la méthode de variation de la constante en la cherchant sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)x^2$.
La fonction y est alors solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(x)x^2 + \cancel{2x\lambda(x)} - \cancel{2x\lambda(x)} = x^4\sin(x) \Leftrightarrow \lambda'(x) = x^2\sin(x).$$

Pour déterminer une primitive de $x \mapsto x^2\sin(x)$ réalisons deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x\, dx &= \left[-x^2\cos x\right] + 2\int x\cos(x)\,dx \\ &= -x^2\cos(x) + 2[x\sin(x)] - 2\int \sin(x)\,dx \\ &= -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C.\end{aligned}$$

Et donc une solution particulière de (E) est $x \mapsto x^2\left((2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x)\right)$.
Et par conséquent, les solutions de (E) sont les

$$x \mapsto x^2\left((2-x^2)\cos(x) + 2x\sin(x) + \lambda\right),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

6. L'équation homogène est $y' - y = 0$, qui possède pour solutions les $\lambda \mapsto \lambda e^x$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto \lambda(x)e^x$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(x)e^x + \cancel{\lambda(x)e^x} - \cancel{\lambda(x)e^x} = \mathrm{sh}(x) \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2x}\right).$$

Et donc $\lambda(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{e^{-2x}}{2}\right)$ convient.

Par conséquent, une solution de (E) est $x \mapsto \dfrac{xe^x}{2} + \dfrac{e^{-x}}{4}$ et donc les solutions de (E) sont les

$$x \mapsto e^x\left(\lambda + \frac{x}{2}\right) + \frac{e^{-x}}{4},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

7. L'équation sous forme normalisée s'écrit $y' + \dfrac{2t}{1+t^2}y = \dfrac{2}{(1+t^2)^2}$.

L'équation homogène est $y' + \dfrac{2t}{1+t^2}y = 0$.

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{2t}{1+t^2}$ est $t \mapsto \ln\left(1+t^2\right)$, de sorte que les solutions de (E_0) sont les $t \mapsto \lambda e^{-\ln(1+t^2)} = \dfrac{\lambda}{1+t^2}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y(t) = \dfrac{\lambda(t)}{1+t^2}$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\frac{\lambda'(t)}{1+t^2} - \cancel{\frac{2t\lambda(t)}{(1+t^2)^2}} + \cancel{\frac{2t\lambda(t)}{(1+t^2)^2}} = \frac{2}{(1+t^2)^2} \Leftrightarrow \lambda'(t) = -\frac{2}{1+t^2}.$$

Et donc $\lambda(t) = 2\operatorname{Arctan}(t)$ convient, de sorte qu'une solution particulière de (E) est $y : t \mapsto \dfrac{2\operatorname{Arctan}(t)}{1+t^2}$.
Et donc les solutions de (E) sont les

$$t \mapsto \frac{2\operatorname{Arctan}(t) + \lambda}{1+t^2},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

8. La forme normalisée de l'équation est $y' - \dfrac{1}{1+t^2}y = \dfrac{1}{1+t^2}$.
Les solutions de (E_0) sont les $t \mapsto \lambda e^{\operatorname{Arctan}(t)}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{\operatorname{Arctan}(t)}$. Alors y est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lambda'(t)e^{\operatorname{Arctan}(t)} + \cancel{\lambda(t)\frac{1}{1+t^2}e^{\operatorname{Arctan}(t)}} - \cancel{\lambda(t)\frac{1}{1+t^2}e^{\operatorname{Arctan}(t)}} = \frac{1}{1+t^2} \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{1}{1+t^2}e^{-\operatorname{Arctan}(t)}.$$

Or, une primitive de $\dfrac{1}{1+t^2}e^{-\operatorname{Arctan}(t)}$ est $t \mapsto -e^{-\operatorname{Arctan}(t)}$, et donc une solution particulière de (E) est $t \mapsto -e^{-\operatorname{Arctan}(t)}e^{\operatorname{Arctan}(t)} = -1$.
On en déduit que les solutions de (E) sont les

$$t \mapsto \lambda e^{\operatorname{Arctan}(t)} - 1,\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

> **Remarque**
> Si on remarquait dès le départ que la fonction constante égale à -1 était solution, alors il ne fallait pas se priver de l'utiliser !

9. Rappelons qu'une primitive de $t \mapsto \tan(t)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est $t \mapsto -\ln(\cos t)$.
Et donc les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{\ln(\cos t)} = \lambda \cos t$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)\cos t$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\lambda'(t)\cos(t) - \cancel{\lambda(t)\sin(t)} + \cancel{\tan(t)\lambda(t)\cos(t)} = \sin(2t) \Leftrightarrow \lambda'(t) = \frac{\sin(2t)}{\cos(t)}.$$

Mais $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, de sorte que $\lambda'(t) = 2\sin(t)$. Donc $\lambda(t) = -2\cos(t)$ convient, et donc les solutions de (E) sont les $t \mapsto \lambda \cos t - 2\cos^2 t$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Signe

Notons qu'il n'y a pas besoin de valeur absolue dans le logarithme car sur I, le cosinus est positif.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.2

1. Les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda e^{-t}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière sous la forme $y : t \mapsto \lambda(t)e^{-t}$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\lambda'(t)e^{-t} - \cancel{e^{-t}\lambda(t)} + \cancel{e^{-t}\lambda(t)} = \cos(t)e^{t} \Leftrightarrow \lambda'(t) = \cos(t)e^{2t}.$$

Utilisons les nombres complexes pour trouver une primitive de $t \mapsto \cos(t)e^{2t} = \mathrm{Re}(e^{(2+i)t})$.
Une primitive de $t \mapsto e^{(2+i)t}$ est

$$t \mapsto \frac{1}{2+i}e^{(2+i)t} = \frac{2-i}{5}e^{2t}\left(\cos(t) + i\sin(t)\right).$$

Donc une primitive de sa partie réelle est $t \mapsto \frac{e^{2t}}{5}\left(2\cos(t) + \sin(t)\right)$.
Et donc les solutions de (E) sont les

$$y : t \mapsto \lambda e^{-t} + \frac{e^{t}}{5}\left(2\cos(t) + \sin(t)\right), \lambda \in \mathbf{R}.$$

En particulier, on a $y(0) = \lambda + \frac{2}{5}$ et donc $y(0) = -1 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{7}{5}$.
Donc l'unique solution au problème de Cauchy posé est $t \mapsto \frac{1}{5}\left(-7e^{-t} + e^{t}\left(2\cos(t) + \sin(t)\right)\right)$.

Intervalle

Notons qu'on n'a pas vraiment le choix dans l'intervalle de résolution, puisque nous voulons que 1 en soit un élément au vu de la condition initiale.

2. Résolvons l'équation normalisée $y' + \frac{x^2+x+1}{x+1}y = \frac{x}{x+1}$ sur $]-1, +\infty[$.
L'équation homogène est $y' + \frac{x^2+x+1}{x+1}y = 0$.
Mais une division euclidienne nous donne $\frac{x^2+x+1}{x+1} = x + \frac{1}{x+1}$.
Une primitive de $x \mapsto x + \frac{1}{x+1}$ est alors $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \ln(x+1)$.
Et donc les solutions de l'équation homogène sont les

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x+1}e^{-x^2/2}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Cherchons une solution particulière par variation de la constante, sous la forme $y(x) = \frac{\lambda(x)}{x+1}e^{-x^2/2}$ où λ est une fonction dérivable.
On a alors $y'(x) = \lambda'(x)\frac{e^{-x^2/2}}{x+1} + \lambda(x)e^{-x^2/2}\frac{-x(x+1)-1}{(x+1)^2}$.
Et donc $y'(x) + \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}y(x) = \frac{x}{x+1}$ si et seulement si

$$\lambda'(x)\frac{e^{-x^2/2}}{x+1} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \lambda'(x) = xe^{x^2/2}.$$

Une solution est alors $\lambda(x) = e^{x^2/2}$, de sorte qu'une solution particulière de l'équation complète[1] est $x \mapsto \frac{1}{x+1}$.
Donc les solutions de l'équation complète sont les

$$x \mapsto \frac{\lambda e^{-x^2/2} + 1}{x+1}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

[1] Avec second membre.

En particulier, on a $y(1)=e \Leftrightarrow 2e=\lambda e^{-1/2}+1 \Leftrightarrow \lambda=(2e-1)e^{1/2}$.
Et donc l'unique solution de l'équation satisfaisant à la condition initiale est

$$x \mapsto \frac{1+(2e-1)e^{(1-x^2)/2}}{x+1}.$$

3. L'équation homogène est $y'+2xy=0$, qui est facile à résoudre : ses solutions sont les $x \mapsto \lambda e^{-x^2}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière par variation de la constante, sous la forme $y(x)=\lambda(x)e^{-x^2}$.
Alors y est solution si et seulement si $\lambda'(x)e^{-x^2}=e^{x-x^2} \Leftrightarrow \lambda'(x)=e^x$.
Donc $\lambda(x)=e^x$ convient.
On en déduit que $x \mapsto e^{x-x^2}$ est une solution particulière, et donc que les solutions de l'équation sont les

$$x \mapsto \lambda e^{-x^2}+e^{x-x^2},\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Et donc l'unique solution telle que $y(0)=0$ correspond à $\lambda=-1$, c'est donc $x \mapsto e^{-x^2}(e^x-1)$.

Solution de l'exercice 10.3

Une solution simple consiste à remarquer qu'il y a unicité de la solution vérifiant $y(t_0)=0$, et que la fonction nulle satisfait cette condition.
Donc si $y_0(t_0)=0$, nécessairement y_0 est la fonction nulle.
Plus simplement, nous savons que les solutions de l'équation sont les $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ où A est une primitive de a.
Donc il existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\forall t \in I,\ y_0(t)=\lambda_0 e^{-A(t)}$.
Et une exponentielle n'étant jamais nulle, il vient $y_0(t_0)=0 \Leftrightarrow \lambda_0=0$, de sorte que y_0 est la fonction nulle.

Solution de l'exercice 10.4

1. Une solution y de l'équation sur $\mathbf{R}$ tout entier doit toujours vérifier $y(0)=0$.
Et sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, elle doit satisfaire l'équation normalisée (E') : $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$.

Sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, les solutions de l'équation homogène (E_0') sont les $x \mapsto \lambda x^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Et une solution particulière est $x \mapsto x^4$.
Donc sur chacun des deux intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, l'ensemble des solutions de (E_0') est $\left\{x \mapsto \lambda x^2+x^4,\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}$.

Si y est une solution de (E) sur $\mathbf{R}$ tout entier, alors il existe deux réels λ_1, λ_2 tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$y(x)=\begin{cases}\lambda_1 x^2+x^4 & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ \lambda_2 x^2+x^4 & \text{si } x<0\end{cases}$$

Une telle fonction est toujours continue en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} y(x)=0=y(0)$.
Et mieux, elle est toujours dérivable en 0 car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lambda x^2+x^4}{x}=0$ quelle que soit la valeur de λ.
Et donc, pour tout $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{R}^2$, $x \mapsto \begin{cases}\lambda_1 x^2+x^4 & \text{si } x \geqslant 0\\ \lambda_2 x^2+x^4 & \text{si } x<0\end{cases}$ est solution de l'équation sur $\mathbf{R}$.

2. Soit $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une solution de (E). Alors nécessairement, $y(0)=0$.
Sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, y est solution de l'équation différentielle linéaire sous forme normalisée $y'-\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}y=-\frac{2}{x^2+1}$.
Une décomposition en éléments simples nous donne $\frac{X^2-1}{X(X^2+1)}=-\frac{1}{X}+\frac{2X}{X^2+1}$.
Et donc les solutions (sur $\mathbf{R}_+^*$ comme sur $\mathbf{R}_-^*$) de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda\frac{x^2+1}{x}$.
En procédant à la variation de la constante, en cherchant une solution particulière sous la

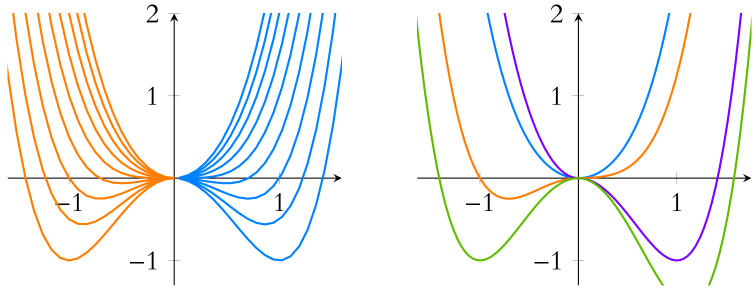


Figure 10.1 – Question 1 : toute solution sur $\mathbf{R}_+^*$ se raccorde en 0 à toute solution sur $\mathbf{R}_-^*$.

forme $x \mapsto \lambda(x)\dfrac{x^2+1}{x}$, on arrive à $\lambda'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, qui s'intègre en $\lambda(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Et donc une solution particulière est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
Ainsi, sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, l'ensemble des solutions est $\left\{x \mapsto \lambda\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\}$.

Donc il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} \lambda_1\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \lambda_2\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{R}^2$$

Mais une telle fonction est continue en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
Donc la seule solution possible sur $\mathbf{R}$ est $x \mapsto -x$, qui est évidemment dérivable et satisfait l'équation originelle.

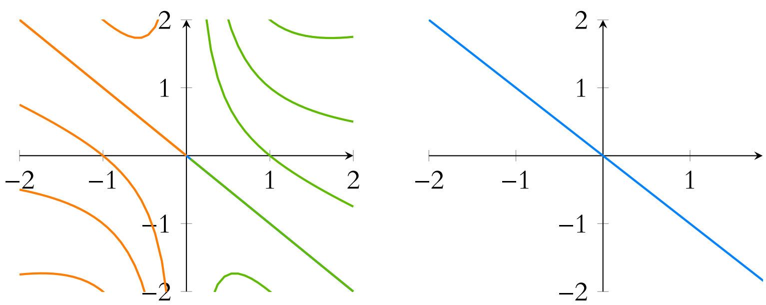


Figure 10.2 – Question 2 : une seule option pour le raccord.

3. Il est facile de constater que les solutions, sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$ sont les $x \mapsto \lambda x + x^2$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$.
Puisque toutes ces fonctions s'annulent en 0, il n'y a donc de pas de problème de continuité en 0 : toute solution sur $\mathbf{R}_+^*$ se recolle de manière continue avec toute solution sur $\mathbf{R}_-^*$.
Par contre, un tel recollement est-il toujours dérivable en 0 ?

Soient donc $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, et soit $y : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \lambda x + x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mu x + x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$.
Alors il est clair que y est continue sur $\mathbf{R}$ (car en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} y(x) = \lim\limits_{y \to 0^-} y(x) = 0 = y(0)$).
Et on a $\dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \lambda + x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \lambda$ et de même, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{y(x)-y(0)}{x} = \mu$.
Donc y est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda = \mu$, et alors $y'(0) = \lambda$.
Ainsi, si y est solution, alors il existe λ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $y(x) = \lambda x + x^2$.

Et inversement, s'il existe λ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $y(x) = \lambda x + x^2$, alors y est dérivable, et il est facile de voir que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $xy'(x) - y(x) = x^2$.
Donc les solutions de l'équation $xy' - y = x^2$ sont les $x \mapsto \lambda x + x^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

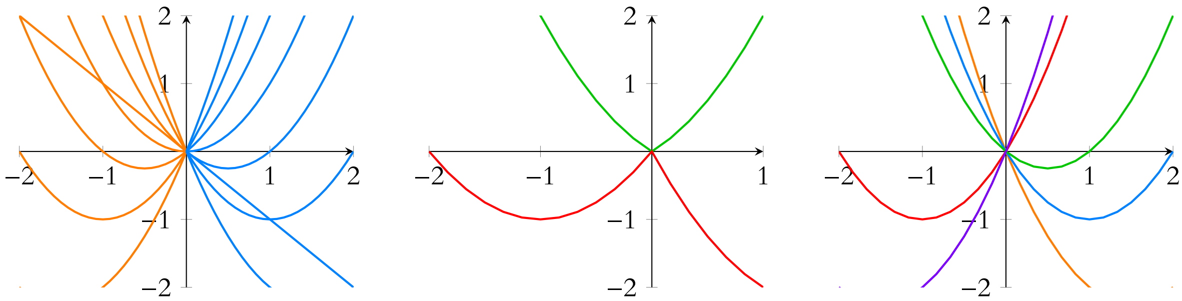


FIGURE 10.3 – Beaucoup de raccords continus (deuxième figure) ne sont pas dérivables, et toute solution sur $\mathbf{R}_-^*$ se raccorde à une unique solution sur $\mathbf{R}_+^*$.

4. Sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{-1/x}$.
Et la variation de la constante nous amène à chercher une primitive de $x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}}$.
Une telle primitive est $x \mapsto e^{x+\frac{1}{x}}$, et donc une solution particulière[2] est $x \mapsto e^x$.
Ainsi, sur $\mathbf{R}_+^*$, les solutions de l'équation sont[3] les

$$x \mapsto \lambda e^{-1/x} + e^x,\ \lambda \in \mathbf{R}$$

et de même les solutions sur $\mathbf{R}_-^*$ sont les$x \mapsto \mu e^{-1/x} + e^x$, $\mu \in \mathbf{R}$.
Donc une solution éventuelle y sur $\mathbf{R}$ vérifie

$$y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-1/x} + e^x & \text{si } x < 0 \\ \mu e^{-1/x} + e^x & \text{si } x > 0 \end{cases},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$$

Or, $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{-1/x} = +\infty$, et donc y admet une limite finie en 0^- si et seulement si $\lambda = 0$, et cette limite vaut alors 1.
En revanche, pour tout $\mu \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \mu e^{-1/x} + e^x = 1$.

Donc toute fonction de la forme $y \mapsto y(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \mu e^{-1/x} + e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est continue en 0.

Il reste à s'assurer de la dérivabilité.
Mais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = e^0 = 1$, et $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^{-1/x}}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} X e^{-X} = 0$.
Donc une telle fonction est toujours dérivable en 0, et donc les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbf{R}$ tout entier sont les $x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \mu e^{-1/x} + e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

[2] Sur $\mathbf{R}_+^*$, mais aussi sur $\mathbf{R}_-^*$.
[3] Somme de la solution particulière et des solutions de l'équation homogène.

Rappel
La limite de $\frac{e^x - 1}{x}$ est la dérivée de e^x en 0.

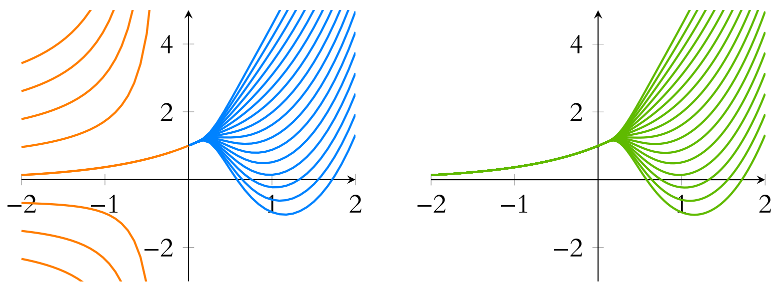


FIGURE 10.4 – Seule $x \mapsto e^x$ sur $\mathbf{R}_-^*$ se raccorde à une (et en fait à toutes) les solutions sur $\mathbf{R}_+^*$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.5

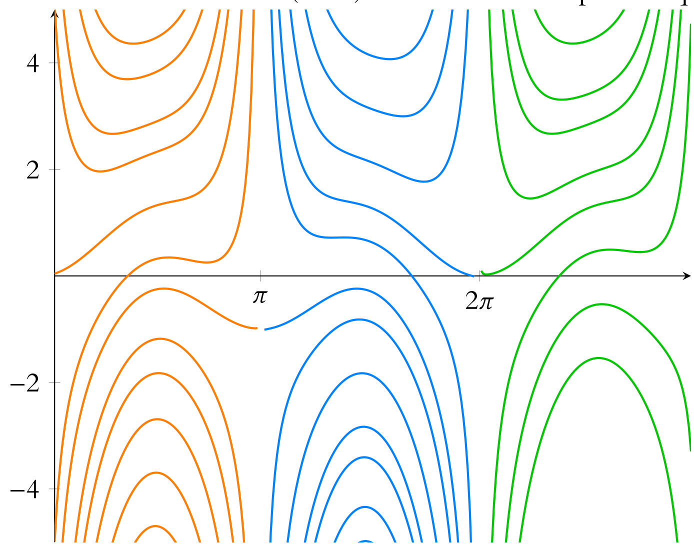
Commençons par mettre l'équation sous forme normalisée : $y' + y\dfrac{\cos x}{\sin x} = \sin x$, ce qui n'est valable que sur un intervalle de la forme $]k\pi, (k+1)\pi[$.

Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^{-\ln|\sin x|} = \dfrac{\lambda}{\sin x}$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Cherchons une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, sous la forme $y(x) = \dfrac{\lambda(x)}{\sin x}$.
Alors $y'(x) = \lambda'(x)\dfrac{1}{\sin x} - \lambda(x)\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.
Et donc on a $y'(x) + \dfrac{\cos x}{\sin x}y(x) = \sin x \Leftrightarrow \lambda'(x) = \sin^2(x)$.
Mais $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, et donc on peut prendre $\lambda(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin(2x)}{4} = \dfrac{x - \sin x \cos x}{2}$.
Soit encore $y(x) = \dfrac{x}{2\sin x} - \dfrac{\cos x}{2}$.

Et donc les solutions de l'équation sont les $x \mapsto \dfrac{x+2\lambda}{2\sin x} - \dfrac{\cos(2x)}{2}$.
Une telle fonction ne peut admettre de limite finie en $k\pi$ que pour $2\lambda = k\pi \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{k\pi}{2}$.
Et de même, y ne peut avoir de limite en $(k+1)\pi$ que pour $\lambda = -\dfrac{(k+1)\pi}{2}$.
Donc quel que soit λ, y n'a pas de limite en au moins l'une des bornes de $]k\pi, -(k+1)\pi[$.

Remarque
Nous ne prouvons même pas que pour un tel λ, y admet une limite finie en $k\pi$, et nous contentons de dire qu'il s'agit d'une condition nécessaire à l'existence d'une limite.

Or, une solution sur $\mathbf{R}$, si elle existait, devrait être solution sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, et en particulier être continue en $k\pi$ et en $(k+1)\pi$. Nous venons de prouver que ceci n'est pas possible.



SOLUTION DE L'EXERCICE 10.6

Supposons que f soit une solution. Alors $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ est une constante, notons la A.
Donc f satisfait l'équation différentielle $y' + y = A$, dont les solutions sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t} + A$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) = \lambda e^{-t} + A$.
D'autre part, on a alors

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = \lambda \int_0^1 e^{-x}\,dx + A.$$

Et donc nécessairement, $\lambda = 0$, de sorte que f est constante, égale à A.

Inversement, pour tout $A \in \mathbf{R}$, on a $\displaystyle\int_0^1 A\,dx = A$, et donc la fonction constante égale à A est solution de (E).
Donc les solutions de (E) sont les fonctions constantes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.7

1. Puisque 1 est racine double du polynôme caractéristique, les solutions sont les

$$y : t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

Astuce
Ces racines se retrouvent sans calcul si vous vous souvenez que la somme des racines cubiques de l'unité est nulle.

2. Le polynôme caractéristique est r^2+r+1 qui possède j et $\overline{j}$ comme racines.
Donc les solutions complexes sont les $t \mapsto \lambda e^{jt}+\mu e^{\bar{j}t}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2$.

Pour obtenir les solutions réelles, il faut se souvenir que $j=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Et donc les solutions réelles sont les

$$t \mapsto e^{-t/2}\left(\lambda\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\mu\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right),\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2.$$

3. Les racines (réelles) du polynôme caractéristique sont $-2-\sqrt{10}$ et $-2+\sqrt{10}$, donc les solutions sont les

$$t \mapsto \lambda e^{(-\sqrt{10}-2)t}+\mu e^{(\sqrt{10}-2)t},\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2.$$

4. Le discriminant du polynôme caractéristique est $\Delta=4(4-a)$, dont le signe est celui de $4-a$.
Si $a\leqslant 4$, alors il y a deux racines réelles qui sont $2+\pm\sqrt{4-a}$ et donc les solutions sont les

$$t \mapsto \lambda e^{(2+\sqrt{4-a})t}+\mu e^{(2-\sqrt{4-a})t},\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2.$$

En revanche, si $a>4$, alors le polynôme caractéristique possède deux racines complexes conjuguées qui sont $2+\pm i\sqrt{a-4}$, et donc les solutions de l'équation différentielle sont les

$$t \mapsto e^{2t}\left(\lambda\cos\left(\sqrt{4-a}t\right)+\mu\sin\left(\sqrt{4-a}t\right)\right),\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2.$$

5. Les racines complexes du polynôme caractéristique sont -1 et $2-i$, de sorte que les solution sont les

$$y : t\mapsto \lambda e^{-t}+\mu e^{(2-i)}t,\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2.$$

6. Le discriminant du polynôme caractéristique vaut -36, donc ses racines sont $-1\pm 3i$.
On en déduit que les solutions complexes de l'équation sont les

$$y : t\mapsto \lambda e^{(-1+3i)t}+\mu e^{(-1-3i)t},\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2.$$

Et les solutions réelles sont les

$$t\mapsto e^{-t}\left(\lambda\cos(3t)+\mu\sin(3t)\right),\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2.$$

Solution de l'exercice 10.8

Le polynôme caractéristique est $r^2-(1-i)r-2(1+i)$.
Son discriminant est $\Delta=(1-i)^2+8(1+i)=8-6i$.
Une racine carrée en est $\delta=3+i$, donc les racines en sont 2 et $-1-i$.
Donc les solutions de l'équation sont les

$$y : t\mapsto \lambda e^{2t}+\mu e^{-(1+i)t},\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2.$$

En particulier, on a $y(0)=y'(0)=1$ si et seulement si

$$\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ 2\lambda-(1+i)\mu=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\dfrac{7+i}{10}\\ \mu=\dfrac{3-i}{10}\end{cases}$$

Donc la solution cherchée est

$$t\mapsto \frac{7+i}{10}e^{2t}+\frac{3-i}{10}e^{-(1+i)t}.$$

Solution de l'exercice 10.9

1. Le polynôme caractéristique est $r^2+2r+1=(r+1)^2$, qui possède -1 comme racine double.
Donc les solutions de l'équation homogène sont les $x\mapsto(\lambda x+\mu)e^{-x}$, $(\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2$.

Puisque $\operatorname{sh}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, cherchons des solutions particulières aux équations

$$(E_1) : y''+2y'+y=\frac{e^x}{2} \text{ et } (E_2) : y''+2y'+y=-\frac{e^{-x}}{2},$$

puis appliquons le principe de superposition.
Puisque 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique, il existe une solution de (E_1) sous la forme $y(x) = \lambda e^x$.
On a alors $y'' + 2y' + y = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow 4\lambda e^x = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{8}$.
Donc une solution de (E_1) est $x \mapsto \frac{e^x}{8}$.
D'autre part, -1 étant racine double du polynôme caractéristique, il existe une solution de (E_2) sous la forme $y : x \mapsto \lambda x^2 e^{-x}$.
y est alors solution de (E_2) si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lambda(x^2 - 4x + 2)e^{-x} + 2\lambda(-x^2 + 2x)e^{-x} + \lambda x^2 e^{-x} = -\frac{e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2\lambda = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{4}.$$

Et donc une solution de (E_2) est $x \mapsto -\frac{x^2 e^{-x}}{4}$.
Par le principe de superposition, une solution de (E) est $x \mapsto \frac{e^x}{8} - \frac{x^2 e^{-x}}{4}$, et donc les solutions de (E) sont les

$$x \mapsto \left((\lambda x + \mu) - \frac{x^2}{4}\right) e^{-x} + \frac{e^x}{8},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

2. Les racines[4] de l'équation caractéristique sont $-2 \pm i$, donc l'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x} \cos(x) + \mu e^{-2x} \sin(x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$$

[4] Conjuguées bien entendu.

Mais les solutions complexes sont également connues, ce sont les $x \mapsto \lambda e^{(-2+i)x} + \mu e^{(-2-i)x}$, où $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$.
Puisque $e^{-2x}\sin(x) = \mathrm{Im}\left(e^{(-2+i)x}\right)$, cherchons une solution particulière de $y'' + 4y + 5y = e^{(-2+i)x}$, il suffira ensuite d'en considérer la partie imaginaire.
Puisque $-2+i$ est racine simple du polynôme caractéristique, il existe une solution sous la forme $y : x \mapsto axe^{(-2+i)x}$.
On a alors $y'(x) = ae^{(-2+i)x} + a(-2+i)xe^{(-2+i)x} = ae^{(-2+i)x}(1 + (-2+i)x)$.
Et de même, $y''(x) = ae^{(-2+i)x}\left(-2 + i - 2 + i(-2+i)^2 x\right) = a\left(-4 + 2i + (3 - 4i)x\right)e^{(-2+i)x}$.
Ainsi, il vient

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = a2ie^{(-2+i)x}.$$

Et donc ceci est égal à $e^{(-2+i)x}$ si et seulement $2ai = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$.
Et dans ce cas, la partie imaginaire de $-\frac{i}{2}xe^{(-2+i)x}$ est $-\frac{e^{-2x}x\cos x}{2}$, qui est donc une solution particulière de l'équation.
Enfin, les solutions de l'équation sont les

$$x \mapsto e^{-2x}\left(\cos(x)\frac{\lambda - x}{2} + \mu \sin(x)\right)$$

où λ et μ sont deux réels.

Alternative *: une autre méthode est de remarquer que* $e^{-2x}\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{(-2+i)x} - e^{(-2-i)x}\right)$, *de chercher des solutions (complexes) aux deux équations*

$$y'' + 4y' + 5y = \frac{1}{2i}e^{(-2+i)x} \text{ et } y'' + 4y' + 5y = \frac{1}{2i}e^{(-2+i)x}$$

puis d'appliquer le principe de superposition.

3. Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Pour trouver une solution particulière, utilisons les complexes, en notant que

$$\cos x + \sin x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2}\left(e^{ix}(1-i) + e^{-ix}(1+i)\right).$$

Par le principe de superposition, il suffit de trouver des solutions à $y''-3y'+2y=\frac{e^{ix}}{2}(1-i)$ et $y''-3y'+2y=\frac{e^{-ix}}{2}(1+i)$.
Traitons en détails la première, la seconde étant du même tonneau : i n'est pas racine du polynôme caractéristique, donc il existe une solution sous la forme $x\mapsto ae^{ix}$, $a\in\mathbf{C}$.
On a alors $y'(x)=iae^{ix}$ et $y''(x)=-ae^{ix}$, de sorte que

$$y''(x)-3y'(x)+2y(x)=ae^{ix}\left(-1-3i+2\right).$$

Et donc y est solution de $y''-3y'+2y=\frac{e^{ix}}{2}(1-i)$ si et seulement si

$$a(1-3i)=\frac{1-i}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{5}+\frac{i}{10}.$$

De même, on prouve que $x\mapsto\left(\frac{1}{5}-\frac{i}{10}\right)e^{-ix}$ est solution de $y''-3y'+2y=\frac{e^{-ix}}{2}(1+i)$.
Et donc par le principe de superposition, une solution de l'équation de départ est

$$x\mapsto\frac{1}{10}\left(e^{ix}(2+i)+e^{-ix}(2-i)\right)=\frac{2}{5}\cos(x)-\frac{\sin x}{5}.$$

Remarque
Notons que cette solution est bien à valeurs réelles.

Et donc enfin, les solutions de l'équation sont les

$$x\mapsto\lambda e^{x}+\mu e^{2x}+\frac{2\cos x}{5}-\frac{\sin x}{5},\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2.$$

4. Passer par les complexes, en notant que $e^x\cos(2x)=\frac{1}{2}\left(e^{(1+2i)x}+e^{(1-2i)x}\right)$ et que ni $1+2i$, ni $1-2i$ ne sont racines du polynôme caractéristique.
On trouve alors pour solutions les

$$x\mapsto\lambda e^{-x}+\mu e^{x}-\frac{e^x}{8}\left(\cos(2x)+\sin(2x)\right).$$

5. Cette fois, i et $-i$ sont racines. On trouve

$$x\ \mapsto\ \lambda\cos(x)+\mu\sin(x)-\frac{x}{2}\cos(x).$$

Solution de l'exercice 10.10

1. Par le principe de superposition, il suffit de résoudre

$$(E_1)\ :y''+2y'=x^2-x,\ (E_2)\ :y''+2y'=e^x \text{ et } (E_3)\ :y''+2y=e^{-x}.$$

Si pour $1\leqslant i\leqslant 3$, y_i est une solution de (E_i), alors $y_1+y_2+y_3$ est une solution de notre équation complète.

▸ **Résolution de** (E_1) : le second membre est polynomial[5] et 0 est racine simple de X^2+2X, donc il existe une solution de (E_1) qui est un polynôme de degré 3.
Cherchons donc une solution sous la forme $y:x\mapsto ax^3+bx^2+cx+d$.
On a alors $y':x\mapsto 3ax^2+2bx+c$ et $y'':x\mapsto 6ax+2b$.
Et donc y est solution de l'équation si et seulement si pour tout $x\in\mathbf{R}$,

$$y''(x)+2y'(x)=x^2-x\Leftrightarrow 6ax^2+(6a+2b)x+c+2b=x^2-x.$$

[5] Donc de la forme $P(t)e^{0t}$.

Par identification des coefficients, c'est le cas si et seulement si

$$\begin{cases}6a=1\\ 6a+2b=-1\\ c+2b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{6}\\ b=-\frac{1}{2}\\ c=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Et d ?
Puisque d n'intervient pas dans ce système, on peut le choisir comme bon nous semble.

Donc $y_1:x\mapsto\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}$ convient.

▸ **Résolution de** (E_2) : puisque 1 n'est pas racine de X^2+2X, il suffit de chercher y_2 sous la forme $y_2\ : x \mapsto \lambda e^x$.
Après calcul, $y_2 : x \mapsto \dfrac{e^x}{3}$ convient.

▸ **Résolution de** (E_3) : suivant le même principe, puisque -1 n'est pas racine de X^2+2X, on peut chercher y_3 sous la forme $x \mapsto \mu e^{-x}$, et après calculs, $y_3 : x \mapsto e^{xt}$ convient.

Donc $x \mapsto \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{e^x}{3} + e^{-x}$ est une solution particulière de (E).
Puisque les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda + \mu e^{-2x}$, avec $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{e^x}{3} - e^{-x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\right\}$$

2. Cette fois le second membre est de la forme $P(x)e^x$, et 1 est racine simple du polynôme caractéristique de l'équation.
Donc on cherchera une solution sous la forme $x \mapsto (ax^2+bx+c)e^x$.
Après calculs, $x \mapsto -e^x\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)$ est une solution particulière, et les racines du polynôme caractéristique étant 1 et 2, l'ensemble des solutions de (E) est

$$\left\{-\left(\frac{x^2}{2}+x+\lambda\right)e^x + \mu e^{2x},\ (\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.11

1.a. Par dérivation d'une composée, z est dérivable, et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et donc $y'(e^t) = e^{-t}z'(t)$.
Et de même, $z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^t y'(e^t)$, de sorte que $y''(e^t) = e^{-2t}(z''(t)-z'(t))$.
Pour $x \in \mathbf{R}$, on a donc $y(x) = y\left(e^{\ln x}\right) = z(\ln x)$, et de même,

$$y'(x) = y'(e^{\ln x}) = \frac{z'(\ln x)}{x} \text{ et } y''(x) = y''(e^{\ln x}) = \frac{z''(\ln x)-z'(\ln x)}{x^2}.$$

1.b. La fonction y est solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$x^2y''(x)+axy'(x)+by(x) = c(x) \Leftrightarrow x^2y''(x)+axy'(x)+by(x) = c\left(e^{\ln x}\right).$$

Soit si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$x^2\frac{z''(\ln x)-z'(\ln x)}{x^2} + ax\frac{z'(\ln x)}{x} + bz(\ln x) = c(e^{\ln x}) \Leftrightarrow z''(\ln x)+(a-1)z'(\ln x)+bz(\ln x) = c(e^{\ln x}).$$

Mais puisque la fonction ln réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, c'est le cas si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$z''(t)+(a-1)z'(t)+bz(t) = c(e^t).$$

En effet, si pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $z''(\ln x)+(a-1)z'(\ln x)+bz(\ln x) = c(e^x)$, alors pour tout $t \in \mathbf{R}$, il existe $x \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $t = \ln(x)$, et donc $z''(t)+(a-1)z'(t)+bz(t) = c(e^t)$.
Et inversement, si pour tout $t \in \mathbf{R}$, $z''(t)+(a-1)z'(t)+bz(t) = c(e^t)$, alors en particulier pour $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $t = \ln x$, on a

$$z''(\ln x)+(a-1)z'(\ln x)+bz(\ln x) = c(x).$$

Et donc c'est le cas si et seulement si z est solution sur $\mathbf{R}$, de l'équation à coefficients constants $f''+(a-1)f'+bf = c(e^t)$, de fonction inconnue f.

2. Avec le changement de variable précédent, il s'agit donc de résoudre

$$z''(t)+z(t) = e^{2t}+e^t+1.$$

Les solutions de l'équation homogène sont les $t \mapsto \lambda\cos t + \mu\sin t$, $(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2$.
La recherche d'une solution particulière peut se faire à l'aide du principe de superposition,

en notant que $2, 1$ et 0 ne sont pas racines du polynôme caractéristique.
Après calcul, une solution particulière est $t \mapsto \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{1}{2}e^t + 1$.
Ne reste alors plus qu'à revenir à la fonction de départ : pour $x > 0$, on a $y(x) = z(\ln(x))$, et donc les solutions de l'équation sont les

$$x \mapsto \lambda \cos(\ln x) + \mu \sin(\ln x) + \frac{x^2}{5} + \frac{x}{2} + 1,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2.$$

Solution de l'exercice 10.12

1. Soit f une fonction satisfaisant à la condition de l'énoncé. Alors f' est dérivable puisque f l'est.
Et alors en dérivant la relation donnée, on obtient : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f''(x) = f'(-x)$. Or, $f'(-x) = -f(x)$ et donc $f''(x) + f(x) = 0$.
Et donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. Son polynôme caractéristique possède i et $-i$ comme racines, de sorte que f est de la forme $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.

Inversement, soit f une fonction de la forme $x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Alors $f'(x) = -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$ et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = -f(-x) \Leftrightarrow -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = -\lambda \underbrace{\cos(-x)}_{=\cos(x)} - \mu \underbrace{\sin(-x)}_{=\sin(x)} \quad (\star).$$

En particulier, en évaluant en $x = 0$, il vient $\mu = -\lambda$, et donc f est de la forme $x \mapsto \lambda\left(\cos(x) - \sin(x)\right)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
Et inversement, il est clair qu'une fonction de cette forme vérifie $(\star)$ et donc satisfait à la condition initiale.
En résumé, les fonctions vérifiant la condition sont exactement les $x \mapsto \lambda(\cos x - \sin x)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Si f est une solution, alors en dérivant la relation de l'énoncé, il vient

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = -f'(-x) + e^{-x} - xe^{-x}.$$

Mais par hypothèse, $f'(-x) = f(x) - xe^x$, donc f vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f''(x) = -f(x) + xe^x + (1-x)e^{-x}.$$

Donc f est solution de $y'' + y = xe^x + (1-x)e^{-x} \quad (E)$.
Les solutions de l'équation homogène sont les $x \mapsto \lambda \cos x + \mu \sin x$, $(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Pour trouver des solutions particulières, cherchons des solutions de

$$(E_1) \quad y'' + y = (1-x)e^{-x} \text{ et } (E_2) \quad y'' + y = xe^x.$$

Cherchons des solutions sous la forme $y_1 : x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ et $y_2 : (cx+d)e^x$.
On a alors $y_1'(x) = e^{-x}(a - ax - b)$ et $y_1''(x) = e^{-x}(a - a + ax + b)$.
Et donc y_1 est solution de (E_1) si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$y_1''(x) + y_1(x) = (1-x)e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x}(ax + b + ax + b) = (1-x)e^{-x} \Leftrightarrow 2ax + 2b = 1 - x.$$

Par identification, on a donc $2a = -1$ et $2b = 1$, de sorte que $a = -\frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$.
Sur le même principe, on obtient $y_2 : x \mapsto -\frac{x}{2}e^{-x}$.
Donc f est de la forme $x \mapsto \frac{x-1}{2}e^x - \frac{x}{2}e^{-x} + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{2}e^x - \frac{x}{2}e^{-x} + \lambda \cos(x) + \mu \sin(x).$$

Alors $f'(x) = \frac{x}{2}e^x + \frac{x-1}{2}e^{-x} - \lambda \sin(x) + \mu \cos(x)$.
Et donc on a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = f(-x) + xe^{-x}$ si et seulement si

$$\frac{x}{2}e^x + \frac{x-1}{2}e^{-x} - \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = \frac{-x-1}{2}e^{-x} + \frac{x}{2}e^x + \lambda \cos(x) - \mu \sin(x) + xe^{-x}.$$

Soit si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$-\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = \lambda \cos x - \mu \sin(x).$$

Une évaluation en 0 nous donne $\lambda = \mu$, et inversement, si $\lambda = \mu$, alors l'équation est satisfaite.
Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble[6] des fonctions de la forme

[6] Infini.

$$f : x \mapsto \frac{x-1}{2}e^x - \frac{x}{2}e^{-x} + \lambda\left(\cos(x) + \sin(x)\right),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.13

Soit f une fonction vérifiant la relation de l'énoncé.
Commençons par noter que $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$.
Or, par le théorème fondamental de l'analyse, $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)\,,dt$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, et ont pour dérivées respectives f et $t \mapsto tf(t)$.
Et donc la fonction $g : x \mapsto x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et sa dérivée est donnée par :

$$g'(x) = \int_0^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Le théorème fondamental de l'analyse s'applique de nouveau, de sorte que g' est dérivable et $\forall x \in \mathbf{R}$, $g''(x) = f(x)$.
Et donc $f = 1 - g$ est deux fois dérivable, et

$$f''(x) = -g''(x) = -f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f(x) = 0.$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $f'' + f = 0$, de sorte qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.
Par ailleurs, $f(0)+\int_0^0 (0-t)f(t)\,dt = 1 \Leftrightarrow f(0) = 1$, et $f'(0) = -g'(0) = -\int_0^0 f(t)\,dt = 0$.
Donc nécessairement, $\lambda = 1$ et $\mu = 0$.
Inversement, soit $f : x \mapsto \cos x$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

Synthèse
N'oublions pas la synthèse : nous avons pour l'instant uniquement procédé à l'analyse : il existe au plus une solution. Reste à voir si $f = \cos$ est solution.

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)\cos(t)\,dt &= [(x-t)\sin t]_0^x + \int_0^x \sin t\,dt\\ &= 0 + [-\cos t]_0^x\\ &= 1 - \cos(x) = 1 - f(x).\end{aligned}$$

Et donc on a $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, si bien que f est solution au problème posé.
Donc l'unique fonction f continue sur $\mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = 1$ est la fonction cos.

Alternative : soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue, et notons F_1 l'unique primitive de f qui s'annule en 0, donc $F_1 : x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$. Et notons F_2 l'unique primitive de F_1 qui s'annule en 0.
Alors en procédant par intégration par parties, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,dt &= f(x) + [(x-t)F_1(t)]_0^x + \int_0^x F_1(t)\,dt\\ &= f(x) - x\underbrace{F_1(0)}_{=0} + F_2(x) + \underbrace{F_2(0)}_{=0}\\ &= F_2''(x) + F_2(x).\end{aligned}$$

Donc f est solution du problème de départ si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}$, $F_2''(x) + F_2(x) = 1$.
Les solutions de cette équation différentielle sont les $x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + 1$, pour

$(\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2$.
Comme on a de plus $F_2(0) = F_2'(0) = 0$, f est solution du problème posé si et seulement si[7] pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F_2(x) = 1 - \cos(x)$.
Et donc si f est une solution du problème posé, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \cos(x)$ (la dérivée seconde de $x \mapsto 1 - \cos x$).
Et inversement, la même synthèse que précédemment prouve que $f = \cos$ est solution du problème posé.

[7] Il s'agit de trouver l'unique solution à $y'' + y = 1$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

Solution de l'exercice 10.14

On cherche donc les fonctions y dérivables sur un intervalle I telles que pour tout $x \in I$, $y'(x) = e^{x+y(x)}$.
Pour y fonction dérivable sur I, posons, conformément à l'indication de l'énoncé, $z = e^{-y}$.
Alors z est dérivable sur I, avec $z'(x) = -y'(x)e^{-y(x)}$.
Et donc y est solution de $y' = e^{x+y}$ si et seulement si

$$\forall x \in I,\ z'(x) = -e^{x+y(x)}e^{-y(x)} = -e^x.$$

Soit si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $z(x) = -e^x + \lambda$.
Mais alors, on ne peut avoir $e^{-y(x)} = -e^x + \lambda$ que pour $\lambda > 0$ et $\lambda > e^x \Leftrightarrow x < \ln(\lambda)$.
Et donc les solutions de l'équation de départ sont les $x \mapsto -\ln(\lambda - e^x)$, définies sur $]-\infty, \ln(\lambda)[$, pour $\lambda > 0$.

Solution de l'exercice 10.15

1. $u_n = 9 \times 3^n - 2$
2. $u_n = 2^n(1-n)$
3. $u_n = -3 + \dfrac{4}{2^n}$
4. Le polynôme caractéristique $X^2 - X + 1$ possède deux racines complexes conjuguées, qui sont $\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$.
Donc il existe deux réels λ, μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \lambda \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + \mu \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right).$$

On a alors $1 = u_0 = \lambda$ et $2 = u_2 = \lambda \cos\frac{\pi}{3} + \mu \sin\frac{\pi}{3}$, ce qui après calcul nous donne $\lambda = 1$ et $\mu = \sqrt{3}$.

Notons alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_n &= \underbrace{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}}_{=2}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Rappel

$a \sin x + b \cos x$ s'écrit encore

$$A \cos(x - \varphi)$$

où $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Solution de l'exercice 10.16

Le polynôme caractéristique est $r^2 - 2\cos\theta r + 1$, de discriminant $\Delta = 4(1 - \cos^2\theta) = -4\sin^2\theta < 0$.
Donc les racines[8] en sont $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$. Il existe donc deux réels A et B tels que $u_n = A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)$.
Pour $n = 0$, on obtient $A = 1$, et pour $n = 1$, on a $\cos(\theta) + B\sin(\theta) = 1$, d'où

$$B = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)} = \tan(\theta/2)$$

On a donc

$$u_n = \cos(n\theta) + \tan(\theta/2)\sin(n\theta) = \frac{\cos(\theta/2)\cos(n\theta) + \sin(\theta/2)\sin(n\theta)}{\cos(\theta/2)} = \frac{\cos\left(\frac{(2n-1)\theta}{2}\right)}{\cos(\theta/2)}$$

[8] Complexes.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.17

Soit (u_n) une suite telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
Alors $u_{n+2} = au_{n+1} + b = au_{n+1} + (u_{n+1} - au_n) = (a+1)u_{n+1} - au_n$.
Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} - (a+1)u_{n+1} + au_n = 0$. On reconnaît bien là une relation définissant une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Son polynôme caractéristique est alors $X^2 - (a+1)X + a$, de discriminant

$$\Delta = (a+1)^2 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2.$$

Et donc les deux racines du polynôme caractéristique sont $r_1 = \dfrac{a+1-(a-1)}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{a+1+a-1}{2} = a$.

Remarque

Ces deux racines sont confondues si et seulement si $a = 1$, soit si et seulement si (u_n) est arithmétique.

En particulier, la suite (v_n) donnée par l'énoncé vérifie la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 0.$$

Son polynôme caractéristique possède 1 et 2 comme racines. Il existe donc deux réels λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = \lambda + \mu 2^n$.
En particulier, on a $\begin{cases} v_0 = 2 = \lambda + \mu \\ v_1 = 1 = \lambda + 2\mu \end{cases}$, de sorte que $\lambda = 3$ et $\mu = -1$.
Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n = 3 - 2^n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.18

Supposons que f soit une fonction satisfaisant aux conditions de l'énoncé.
Soit $x > 0$. Définissons une suite u_n en posant $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, de sorte que $u_n = f^n(x) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}})(x)$.
L'équation fonctionnelle de l'énoncé, appliquée à $f^n(x)$ permet de montrer que

$$f(f(f^n(x))) = 6f^n(x) - f(f^n(x)) = 0 \Leftrightarrow u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}.$$

Le polynôme caractéristique de cette suite récurrente linéaire d'ordre 2 est

$$r^2 + r - 6 = (r-2)(r+3).$$

Donc il existe deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = A2^n + B(-3)^n$.
Puisque $u_0 = x$ et $u_1 = f(x)$, on a

$$B = \frac{2x - f(x)}{5} \text{ et } A = \frac{3x + f(x)}{5}$$

Si $B > 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{2n+1} = A2^{2n+1} - B3^{2n+1} = -3^{2n+1}\left(B - A\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Ceci contredit la positivité de f, puisque $f^{2n+1}(x) = f\left(f^{2n}(x)\right)$ doit être positif strictement.
De même, si $B < 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{2n} = 3^{2n}\left(B - A\left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

ce qui n'est pas davantage possible.

On en déduit que $B = 0$, et donc $f(x) = 2x$.

Inversement[9], si f est la fonction $x \mapsto 2x$, alors f est bien à valeurs positives sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$f(f(x)) = 4x = 6x - 2x.$$

Donc la seule solution est $f : x \mapsto 2x$.

[9] N'oublions pas la synthèse !