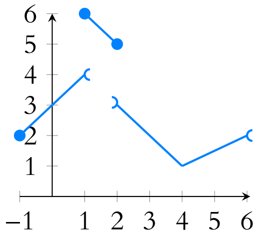
TD 10 : Applications, relations binaires

▸ Généralités sur les applications

Exercice 10.1 **Lecture graphique** F

Soit f la fonction définie sur $[-1,6[$ dont le graphe est ci-contre.
Déterminer



1. $f([-1,6[)$
2. $f([1,2[)$
3. $f^{-1}([0,6])$
4. $f^{-1}([-2,6[)$
5. $f^{-1}([4,5])$
6. $f^{-1}(]2,3])$

Exercice 10.2 Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z^2+z+1 \end{array} \right.$. PD

1. Déterminer $f(\mathbf{C})$, $f(\mathbf{C}^*)$ et $f(\mathbf{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbf{C})$, $f^{-1}(\mathbf{C}^*)$ et $f^{-1}(\mathbf{R})$.

Exercice 10.3 Soit E un ensemble. Pour $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on pose $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. PD

1. Montrer que $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$.
2. Montrer que pour $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$, on a : $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$, $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$ et $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.

Exercice 10.4 Soit $f : E \to F$. Prouver que : AD

1. Pour tout $A \in \mathscr{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$ et pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
2. Pour tout $A, A' \in \mathscr{P}(E), f(A\cup A') = f(A)\cup f(A')$ et $f(A\cap A') \subset f(A)\cap f(A')$.
3. Pour tout $B, B' \in \mathscr{P}(F)$, $f^{-1}(B\cup B') = f^{-1}(B)\cup f^{-1}(B')$ et $f^{-1}(B\cap B') = f^{-1}(B)\cap f^{-1}(B')$.

▸ Injections, surjections, bijections

Exercice 10.5 Soit $f : E \to F$. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes : F

1. «f n'est pas injective»
2. «f n'est pas surjective»
3. «tout élément de F admet au moins deux antécédents par f»

Exercice 10.6 Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ? F

1. $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right.$
2. $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x, x-y, y) \end{array} \right.$
3. $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, y-x) \end{array} \right.$
4. $i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+z, y, -x-4y+z) \end{array} \right.$

Exercice 10.7 Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| \neq 1$. Montrer que $f_a : z \mapsto \dfrac{z+a}{\bar{a}z+1}$ réalise une bijection de $\mathbf{U}$ sur $\mathbf{U}$, et déterminer sa bijection réciproque. PD

Exercice 10.8 Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+y, xy)$. f est-elle injective ? Surjective ? Mêmes questions en changeant espace de départ et d'arrivée en $\mathbf{C}^2$. PD

Exercice 10.9 Soient $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \right.$ et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ PD

1. Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$. Que vaut $f \circ g$?
2. Les applications f et g sont-elle bijectives ?

Exercice 10.10 Soit E un ensemble non vide, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$. AD

On note $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & X\cap A \end{array} \right.$.

1. Déterminer $\operatorname{Im}\psi$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit surjective.

2. Soit $B \in \operatorname{Im} \psi$. Déterminer $\psi^{-1}(\{B\})$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit injective.

Exercice 10.11 Soit $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$. PD

Exercice 10.12 Soit E un ensemble, et soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. AD
Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

Exercice 10.13 Vrai ou faux AD
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $B \in \mathscr{P}(F)$.

1. Si f est surjective, f réalise une bijection de E sur F.
2. f réalise une bijection de E sur $f(E)$
3. Si f est injective, alors f réalise une bijection de E sur $f(E)$.
4. Si f est injective et g surjective, alors $g \circ f$ est bijective.
5. Si $(g \circ f)^3$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.
6. $g \circ f$ est injective si et seulement si f et g sont injectives.
7. Si f est surjective, alors $f(f^{-1}(B)) = B$.
8. $f(A) = B \Leftrightarrow f^{-1}(B) = A$.
9. Si f est injective, alors $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$
10. $f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \overline{f^{-1}(B)}$.

Exercice 10.14 Soient E, F, G trois ensembles non vides et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. AD

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Exercice 10.15 Déterminer toutes les injections $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leqslant n$. AD

Exercice 10.16 Soit $f : E \to F$. Montrer que f est bijective si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$. D

Exercice 10.17 Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E. D
On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$.
Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective (respectivement surjective, resp. bijective).

Exercice 10.18 (Oral Polytechnique 2017) TD
Déterminer toutes les applications $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\mathrm{id}$.

▶ Relations binaires

Exercice 10.19 Sur $\mathbf{Z}$, on définit une relation binaire $\mathscr{R}$ par : $\forall (a,b) \in \mathbf{Z}^2$, $a \mathscr{R} b \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$. PD
Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence d'un élément $a \in \mathbf{Z}$.

Exercice 10.20 On définit une relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbf{N}$ en posant $p \preccurlyeq q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbf{N}, q = p^n$. PD
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 10.21 Soit E un ensemble non vide. On suppose qu'il existe sur E une relation $\mathscr{R}$ qui soit à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence. Que dire des classes d'équivalence de $\mathscr{R}$? PD
Si on suppose de plus que la relation d'ordre $\mathscr{R}$ est totale, que dire de E ?

Exercice 10.22 Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbf{C}$ par $z \mathscr{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ est une relation d'équivalence. F
Décrire géométriquement ses classes d'équivalence.

Exercice 10.23 AD

1. Montrer que la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer le cardinal des classes d'équivalence de la relation $\mathscr{R}$.

Exercice 10.24 Soit E un ensemble, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$. PD
On définit alors une relation $\sim$ sur $\mathscr{P}(E)$ par $X \sim Y \Leftrightarrow X \cap A = Y \cap A$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
2. Prouver que l'application ψ qui à un élément X de $\mathscr{P}(A)$ associe sa classe d'équivalence pour $\sim$ est une bijection de $\mathscr{P}(A)$ sur l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.

Exercice 10.25 Soit E un ensemble non vide, et soit $F = \mathbf{R}^E$. PD
On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur F de la manière suivante : pour $(f,g) \in F^2$, $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) \leqslant g(x)$.
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur F. À quelle condition est-ce un ordre total ?

Exercice 10.26 Sur $E = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$, on définit une relation $\preccurlyeq$ par : PD

$$\forall (z,z') \in E^2,\ z \preccurlyeq z' \Leftrightarrow (|z| < |z'|) \textbf{ ou } (|z| = |z'| \textbf{ et } \mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z')).$$

Montrer que $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Exercice 10.27 Soit E un ensemble non vide et soit $A \subset \mathscr{P}(E)$ une partition de E. D
Montrer qu'il existe une unique relation d'équivalence $\sim$ sur E telle que A soit l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.

Exercice 10.28 Soit E un ensemble possédant au moins deux éléments. Montrer que $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément pour l'inclusion. AD

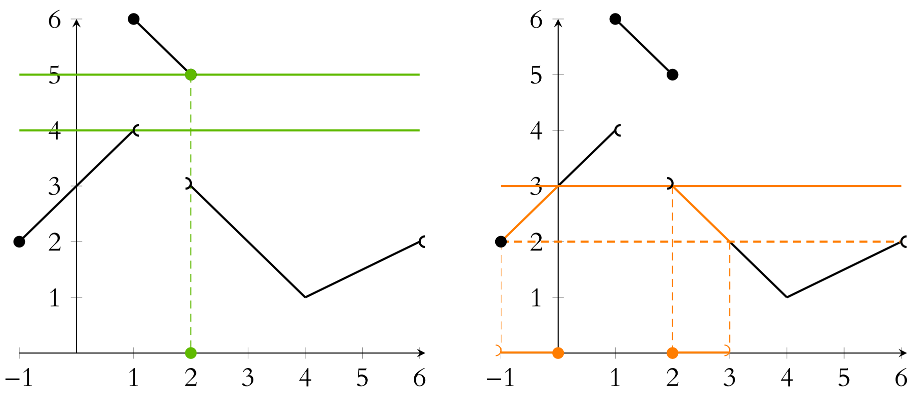
Exercice 10.29 Soit E un ensemble ordonné tel que toute partie non vide de E possède un plus grand et un plus petit élément. Montrer que E est fini. D

Exercice 10.30 Soit $E = \mathscr{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que la relation $\sim$ définie sur E par $f \sim g$ si et seulement si il existe un intervalle ouvert I contenant α tel que $f_{|I} = g_{|I}$ est une relation d'équivalence sur E. D

CORRECTION DES EXERCICES DU TD 10

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.1

1. Notons que $f([-1,6[)$ est l'image de tout l'ensemble de départ, c'est ce que nous avons appelé $\mathrm{Im}(f)$.
Il s'agit donc de l'ensemble des valeurs prises par la fonction, c'est $[1,4[\cup[5,6]$.
2. Il s'agit cette fois de trouver l'ensemble des valeurs atteintes par f sur $[1,2[$, c'est $]5,6]$.
3. Il s'agit de trouver tous les antécédents par f des réels de $[0,6]$, c'est $f^{-1}([0,6]) = [-1,6[$.
4. Puisque f ne prend pas de valeurs entre -2 et 1, on a $f^{-1}([0,6[) = [-1,6[\setminus\{1\}$.
5. Remarquons qu'il s'agit de trouver les x tels que $f(x) \in [4,5]$, c'est-à-dire de résoudre $4 \leqslant f(x) \leqslant 5$.
Graphiquement, il faut donc trouver tous les $x \in [-1,6[$ dont l'image «tombe» entre les droites d'équations $y = 4$ et $y = 5$.
Ce n'est le cas que pour $x = 2$, et donc $f^{-1}([4,5]) = \{2\}$.
6. Sur le même principe, en cherchant les nombres x d'image entre 2 et 3, on trouve $f^{-1}(]2,3]) =]-1,0] \cup [2,3[$.



SOLUTION DE L'EXERCICE 10.2

1. Rappelons que $f(\mathbf{C}) = \mathrm{Im}\, f$ est l'ensemble des complexes[1] qui possèdent au moins un antécédent par f.
Mais pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, l'équation $f(z) = \alpha$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$, est une équation polynomiale de degré 2, qui possède donc au moins une solution. Et donc α possède au moins un antécédent par f, et donc est dans $f(\mathbf{C})$.
Ainsi, $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$.

   $f(\mathbf{C}^*)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{C}$ qui possèdent au moins un antécédent **non nul** par f.
Puisque $\mathrm{Im}\, f = \mathbf{C}$ et que $f(0) = 1$, le seul complexe susceptible de ne pas avoir d'antécédent non nul est 1.
Or les antécédents de 1 par f sont 0 et -1. Puisque $-1 \in \mathbf{C}^*$, $1 = f(-1) \in f(\mathbf{C}^*)$, et donc $f(\mathbf{C}^*) = \mathbf{C}$.

   Enfin, $f(\mathbf{R})$ est l'ensemble des complexes qui ont au moins un antécédent réel par f.

   Notons que si $z \in \mathbf{R}$, alors $f(z) \in \mathbf{R}$, si bien que $f(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.
Et pour $\alpha \in \mathbf{R}$, l'équation $f(x) = \alpha \Leftrightarrow x^2 + x + (1-\alpha) = 0$ possède au moins une solution $x \in \mathbf{R}$ si et seulement si son discriminant est positif ou nul, soit si et seulement si $1 - 4(1-\alpha) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{3}{4}$.
Et donc $f(\mathbf{R}) = [\frac{3}{4}, +\infty[$.
2. On a $f^{-1}(\mathbf{C}) = \{z \in \mathbf{C} \mid f(z) \in \mathbf{C}\} = \mathbf{C}$.

[1] Ici l'espace d'arrivée de f.

Autrement dit
f est surjective.

Autrement dit
La restriction de f à $\mathbf{C}^*$ est encore surjective.

Plus généralement
Pour $f : E \to F$, on a toujours $f^{-1}(F) = E$.

Les seuls complexes dont l'image est nulle sont $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j$ et $\overline{j}$.
Et donc $f^{-1}(\mathbf{C}^*)=\mathbf{C}\setminus\{j,\overline{j}\}$.

On a $f^{-1}(\mathbf{R})=\{z\in\mathbf{C}\mid f(z)\in\mathbf{R}\}$.
Soit alors $z=a+ib$ un complexe sous forme algébrique (avec $a,b\in\mathbf{R}$).
Alors $f(z)\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z^2+z+1\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z^2+z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z^2+z)=0$.
Mais $\operatorname{Im}(z^2+z)=\operatorname{Im}(z^2)+\operatorname{Im}(z)=2ab+b$.
Et donc $z\in f^{-1}(\mathbf{R})\Leftrightarrow 2ab+b=0\Leftrightarrow b(2a+1)=0\Leftrightarrow b=0$ **ou** $a=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}\cup\{z\in\mathbf{C}\mid \operatorname{Re}(z)=-\frac{1}{2}\}$.
Donc $f^{-1}(\mathbf{R})=\mathbf{R}\cup\{z\in\mathbf{C}\mid\operatorname{Re}(z)=-\frac{1}{2}\}$.

Solution de l'exercice 10.3

1. 1ère **méthode** : pour montrer que deux applications sont égales, il faut montrer qu'elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée, et qu'elles coïncident en tout point de leur ensemble de départ.
Ici, les ensembles de départ et d'arrivée sur E et $\{0,1\}$.
Soit donc $x\in E$.
   - Si $x\in A\cap B$, alors $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x)=0$, et puisque $x\in A$ et $x\in B$, $\mathbb{1}_A(x)-\mathbb{1}_B(x)=0$.
   Donc $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x)=(\mathbb{1}_A(x)-\mathbb{1}_B(x))^2$.
   - Si $x\in A\setminus B$. Alors $x\in A\Delta B$, et donc $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x)=1$. Mais $\mathbb{1}_A(x)=1$ et $\mathbb{1}_B(x)=0$, donc $(\mathbb{1}_A(x)-\mathbb{1}_B(x))^2=1^2=1$.
   - Si $x\in B\setminus A$. Alors de même $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x)=1$ et $(\mathbb{1}_A(x)-\mathbb{1}_B(x))^2=(-1)^2=1$.
   - Enfin, si $x\notin A\cup B$, alors $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x)=0$ et $(\mathbb{1}_A(x)-\mathbb{1}_B(x))^2=0^2=0$.

   Donc dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A\Delta B}(x)=(\mathbb{1}_A(x)-\mathbb{1}_B(x))^2$, donc $\mathbb{1}_{A\Delta B}=(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2$.

   2ème **méthode** : il est également possible de se débrouiller avec les propriétés des indicatrices déjà vues en cours.
   On a $A\Delta B=(A\cup B)\cap\overline{A\cap B}$. Et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta B}&=\mathbb{1}_{A\cup B}\mathbb{1}_{\overline{A\cap B}}=(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1-\mathbb{1}_{A\cap B})\\&=(\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)\\&=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B^2+\mathbb{1}_A^2\mathbb{1}_B^2\\&=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\\&=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B=(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2.\end{aligned}$$

Astuce
Une indicatrice est toujours égale à son propre carré car $0^2=0$ et $1^2=1$.

2. Puisque nous disposons d'une bijection entre les parties de E et leurs fonctions indicatrices, pour prouver que deux parties de E sont égales, il s'agit de prouver qu'elles ont les mêmes fonctions indicatrices.
On a donc

$$\mathbb{1}_{\overline{A}\Delta\overline{B}}=\left(\mathbb{1}_{\overline{A}}-\mathbb{1}_{\overline{B}}\right)^2=(1-\mathbb{1}_A-(1-\mathbb{1}_B))^2=(\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A)^2=\mathbb{1}_{A\Delta B}.$$

   Et donc $\overline{A}\Delta\overline{B}=A\Delta B$.

   De même

$$\mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}=(\mathbb{1}_{A\cap B}-\mathbb{1}_{A\cap B})^2=(\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C)^2.=\mathbb{1}_A^2(\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C)^2=\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\Delta C}=\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)}.$$

   Pour le second point[2], il suffit de développer les indicatrices des deux membres :

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}&=(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_{B\Delta C})^2=\left(\mathbb{1}_A-(\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C)^2\right)^2=(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_C+2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)^2\\&=\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C.\end{aligned}$$

   On obtient la même chose en développant $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$.
   Et puisque deux parties de E qui ont la même fonction indicatrice sont égales, on en déduit l'égalité voulue.

[2] Que l'on appelle l'associativité de la différence symétrique.

Solution de l'exercice 10.4

1. Soit A une partie de E, et soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$.
Mais c'est exactement la définition de $x \in f^{-1}(f(A))$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$ et on a donc bien l'inclusion $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Soit $y \in f(f^{-1}(B))$
Alors, par définition, il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$.
Mais puisque $x \in f^{-1}(B)$, on a donc $f(x) \in B$, et donc $y = f(x) \in B$.
Ainsi, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
Remarque *: il est facile de se convaincre que ces inclusions ne sont pas toujours des égalités.*

Méthode
Une bonne habitude, sans que ce soit une obligation est de noter x les éléments de l'espace de départ et y ceux de l'espace d'arrivée.
En effet, nous sommes bien plus habitués à $y = f(x)$ qu'à $x = f(y)$.

2. Soient A, A' deux parties de E.
Le plus simple est de travailler directement avec des équivalences : soit $y \in F$. Alors

$$y \in f(A \cup A') \Leftrightarrow \exists x \in A \cup A', y = f(x) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x) \textbf{ ou } \exists x \in A', y = f(x) \Leftrightarrow y \in f(A) \textbf{ ou } y \in f(A') \Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(A').$$

Et donc $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
Soit $y \in f(A \cap A')$. Alors il existe $x \in A \cap A'$ tel que $y = f(x)$.
Et en particulier, $x \in A$, donc $y = f(x) \in f(A)$ et de même, $x \in A'$ donc $y = f(x) \in f(A')$.
Ainsi, $y \in f(A) \cap f(A')$, donc $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

Remarque
Là encore, l'inclusion n'est pas nécessairement une égalité.

3. Soient B et B' deux parties de F.
Raisonnons directement par équivalence plutôt que par double inclusion : soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cup B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B \textbf{ ou } f(x) \in B' \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \textbf{ ou } fx \in f^{-1}(B') \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

On a donc directement l'égalité $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.
Et de même, en remplaçant les unions par des intersections[3], on prouve que $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

[3] Et donc les **ou** par des **et**.

Solution de l'exercice 10.5

1. Rappelons que f est injective si et seulement si

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

La négation de cette proposition est donc

$$\exists (x, y) \in E^2,\ x \neq y \textbf{ et } f(x) = f(y).$$

2. La proposition f est surjective s'écrit

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Sa négation est donc

$$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) \neq y.$$

Ce qui signifie encore qu'il existe un élément de F qui n'admet pas d'antécédent par f.

3. $\forall z \in F,\ \exists (x, y) \in E^2, (x \neq y) \textbf{ et } f(x) = f(y) = z.$

Solution de l'exercice 10.6

1. $f(0,0) = 0 = f(1,-1)$, donc f n'est pas injective.
En revanche, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x, 0) = x$, donc x possède au moins un antécédent par f : f est surjective.
Étant injective et surjective, elle est bijective.
2. Soient (x, y) et (x', y') deux couples de réels tels que $f(x, y) = f(x', y')$. Alors $(x, x - y, y) = (x', x' - y', y')$ et donc en particulier, $x = x'$ et $y = y'$. Donc $(x, y) = (x', y')$: f est injective.
Montrons qu'elle n'est pas surjective, et que $(0, 1, 0)$ ne peut admettre d'antécédent.
Supposons qu'il existe $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $f(x, y) = (0, -1, 0)$. Alors $(x, x - y, y) = (0, 1, 0)$, de sorte que $x = y = 0$ et $x - y = 1$, ce qui est impossible.
Nous avons donc exhibé un élément de $\mathbf{R}^3$ qui n'admet pas d'antécédent par f : elle n'est pas surjective.

Solution de l'exercice 10.7

Commençons par remarquer qu'il n'est pas forcément évident sur la définition qu'il s'agisse là d'une application qui, sur $\mathbf{U}$, prend ses valeurs dans $\mathbf{U}$. Pour le vérifier, considérons $z \in \mathbf{U}$, et prouvons que $f_a(z) \in \mathbf{U}$.
On a alors

$$|f_a(z)| = f_a(z)\overline{f_a(z)} = \frac{(z+a)(\overline{z}+\overline{a})}{(\overline{a}z+1)(a\overline{z}+A)} = \frac{|z|^2 + a\overline{z} + z\overline{a} + |a|^2}{|az|^2 + a\overline{z} + \overline{a}z + 1} = \frac{1 + a\overline{z} + z\overline{a} + |a|^2}{|a|^2 + a\overline{z} + \overline{a}z + 1} = 1.$$

Donc f_a est bien à valeurs dans $\mathbf{U}$.
Soit à présent $y \in \mathbf{U}$, et cherchons à résoudre l'équation $y = \dfrac{a+z}{\overline{a}z+1}$.
Après calculs[4], on obtient $z = \dfrac{y-a}{1-\overline{a}y}$.
Donc la bijection réciproque de f_a est f_{-a}.

Domaine de déf.
Notons que si l'on demande à ce que $|a| \neq 1$, c'est seulement pour s'assurer que le dénominateur ne s'annule pas sur l'ensemble de définition.

[4] Rien de bien méchant, multipliez tout par le dénominateur, puis isolez z en fonction de y.

Solution de l'exercice 10.8

Quel que soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a $f(x, y) = f(y, x)$, donc clairement, f n'est pas injective, par exemple car $f(1, 0) = f(0, 1)$.

Soit $(s, p) \in \mathbf{R}^2$. Un couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ vérifie $f(x, y) = (s, p)$ si et seulement si $\begin{cases} x + y = z \\ xy = p \end{cases}$
Mais nous savons qu'un couple (x, y) est solution d'un tel système si et seulement si $\{x, y\}$ est l'ensemble des solutions de $X^2 - sX + p = 0$.
Or, si $s^2 - 4p < 0$, cette équation n'admet pas de solution réelle.
Donc par exemple $(0, 1)$ ne possède pas d'antécédent par f, qui n'est donc pas surjective.

En revanche, si on remplace $\mathbf{R}^2$ par $\mathbf{C}^2$, puisque toute équation polynomiale de degré 2 possède au moins une solution, tout couple $(s, p) \in \mathbf{C}^2$ possède au moins un antécédent par f, et donc f est surjective.
En revanche, elle n'est toujours pas injective, pour les mêmes raisons que dans le cas réel.

Solution de l'exercice 10.9

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $f(n) = n + 1 \neq 0$ et donc $g(f(n)) = (n + 1) - 1 = n$.
   Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbf{N}}$.

   De même, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $g(n) = n - 1$ et donc $f(g(n)) = n$.
   En revanche, pour $n = 0$, on a $g(n) = 0$ et donc $f(g(n)) = 1$.
   Ainsi, $(f \circ g) : n \mapsto \begin{cases} n & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$.
2. L'application f n'est pas bijective, car son image est $\mathbf{N}^*$ et non $\mathbf{N}$, elle n'est donc pas surjective (bien qu'elle soit injective).
   L'application g n'est quant à elle pas injective car $g(1) = g(0) = 0$. En revanche, elle est surjective.

Remarque
Cet exemple montre bien que pour que deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to E$ soient bijections réciproques l'une de l'autre, on ne peut pas se contenter de prouver que $g \circ f = \mathrm{id}_E$, il faut bien avoir également $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Solution de l'exercice 10.10

1. Rappelons que $\operatorname{Im}\psi = \{\psi(X), X \in \mathscr{P}(E)\}$.
   Il est clair que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $\psi(X) = X \cap A \subset A$, donc déjà $\operatorname{Im}\psi \subset \mathscr{P}(A)$.

   Inversement, si Y est une partie de A, alors $Y = Y \cap A = \psi(Y) \in \operatorname{Im}\psi$.
   Et donc $\mathscr{P}(A) \subset \operatorname{Im}\psi$, si bien que par double inclusion, $\mathscr{P}(A) = \operatorname{Im}\psi$.
2. Soit donc $B \in \mathscr{P}(A)$.
   Alors $\psi^{-1}(\{B\}) = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid \psi(X) \in \{B\}\} = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid A \cap X = B\}$.

   Prouvons alors que cet ensemble est égal à $\left\{B \cup Y,\ Y \in \mathscr{P}(\overline{A})\right\}$.
   Si $X \cap A = B$, posons $Y = X \setminus A = X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$.
   On a alors
   $$X = X \cap (A \cup \overline{A}) = (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A}) = B \cup Y.$$
   Inversement, si $X = B \cup Y$, pour $Y \in \mathscr{P}(\overline{A})$, alors
   $$X \cap A = (B \cap A) \cup (Y \cap A) = B \cup \emptyset = B.$$

Remarque
Il n'existe pas de méthode générale pour déterminer l'image d'une application, donc ce type de question est potentiellement difficile, et il faudra un peu d'intuition, et probablement de tatônnements.

Méthode
Tout élément qui s'écrit sous la forme $\psi(\clubsuit)$, où $\clubsuit$ est n'importe quel élément de l'espace de départ de ψ est dans l'image de ψ. C'est même la définition de l'image !

Ainsi, nous avons entièrement décrit $\psi^{-1}(\{B\})$, qui est l'ensemble des antécédents de B par ψ.
Par définition, ψ est alors injective si et seulement si pour tout $B \in \mathscr{P}(A)$, $\psi^{-1}(\{B\})$ est de cardinal au plus 1.
C'est le cas si et seulement si $\mathscr{P}(\overline{A})$ contient au plus un élément, donc si et seulement si $\overline{A} = \emptyset \Leftrightarrow A = E$.

Commentaire : plus simplement : si $A = E$, alors $\psi = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ est injective.
Et si $A \neq E$, alors $\emptyset$ et $\overline{A} \neq \emptyset$ ont même image ($\emptyset$) par ψ, donc ψ n'est pas injective.

Solution de l'exercice 10.11

▶ $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f injective, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
Alors pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A)$, si bien que $x \in f^{-1}(f(A))$.
Donc $A \subset f^{-1}(f(A))$.
Inversement, soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A) = \{f(y), y \in A\}$, si bien qu'il existe $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$.
Mais f étant injective, $x = y \in A$, et donc $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
Donc par double inclusion, $A = f^{-1}(f(A))$.

Remarque : L'injectivité ne nous a pas été utile pour cette inclusion.

▶ $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
Soient alors $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
Alors $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$, et donc $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.
Mais $f(\{x\}) = \{f(y), y \in \{x\}\} = \{f(x)\}$.
Et donc $f(y) = f(x) \in f(\{x\})$, si bien que $y \in f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$. Donc nécessairement, $y = x$.
Ceci prouve donc que f est injective.

Solution de l'exercice 10.12

Raisonnons par double implication.
▶ Supposons que f soit injective.
Alors pour tout $x \in E$, on a $f(x) = f(f(f(x)))$ et donc $x = (f \circ f)(x)$.
Autrement dit, $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Et donc f est bijective, et $f^{-1} = f$: f est une involution.
Et en particulier, f est surjective.

▶ Inversement, supposons f surjective.
Soit alors $y \in E$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Et alors $(f \circ f)(y) = (f \circ f \circ f)(x) = f(x) = y$.
Donc $f \circ f = \mathrm{id}_E$, si bien que $f \circ f$ est injective, et donc f est injective.

⚠ Attention ! Sans la surjectivité de f, on peut juste affirmer que pour tout $y \in \operatorname{Im} f$,

$$(f \circ f)(y) = y$$

mais cela ne suffit pas à prouver que $f \circ f = \mathrm{id}_E$.

Et donc au final f est injective si et seulement si elle est surjective[5].

[5] Et donc si et seulement si elle est bijective.

Solution de l'exercice 10.13

1. **Faux.** Une application surjective n'est pas nécessairement injective.
Par exemple $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}\right.$ est surjective mais non bijective.
2. **Faux.** Dès que f n'est pas injective (et nous venons de voir un exemple de telle fonction), elle ne peut être bijective, même si on restreint l'ensemble d'arrivée.

   Notons qu'il faut bien comprendre que lorsqu'on dit que f réalise une bijection de E sur $f(E)$, cela signifie en fait que $f^{|f(E)}$ réalise est bijective. Soit encore que tout élément de $f(E)$ possède un unique antécédent par f.
   Par définition, tout élément de $f(E)$ possède un antécédent par f, en revanche l'unicité n'est pas assurée si f n'est pas injective, puisque cela signifie précisément qu'il existe deux élément de même image (donc un élément de $f(E)$ possédant deux antécédents).
3. **Vrai.** Par définition de l'image, tout élément de $f(E)$ possède au moins un antécédent par f. Si de plus on suppose f injective, alors un tel antécédent est unique, et donc f réalise une bijection de E sur $f(E)$.
4. **Faux** Prenons pour f la fonction Arctan : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et pour g l'identité de $\mathbf{R}$. Alors f est injective (car strictement croissante), g est surjective (car bijective), mais $g \circ f = \operatorname{Arctan}$ n'est pas bijective.

5. **Vrai.** On a $(g \circ f)^3 = g \circ (f \circ g \circ f \circ g \circ f)$ qui est surjective (car bijective), et donc g est surjective.
De même, $(g \circ f)^3 = (g \circ f \circ g \circ f \circ g) \circ f$ est injective (car bijective), donc f es injective.
6. **Faux.** Nous savons que si f et g sont injectives, alors leur composée l'est. En revanche, la réciproque est fausse.
Par exemple on peut prendre $E = \mathbf{R}$, $F = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$, $f = \text{Arctan}$ et $g = \tan$.
Alors $g \circ f = \text{id}_{\mathbf{R}}$ est évidemment injective, pourtant g ne l'est pas, puisqu'elle est périodique.
Plus simplement, on peut considérer $E = \{1\}$, $F = \{2, 3\}$, f l'application qui à 1 associe 2 et g la fonction constante[6] égale à 1 sur F.
Alors $g \circ f = \text{id}$, mais g n'est pas injective.
7. **Vrai.** Nous venons de voir qu'une inclusion est déjà vraie, prouvons l'inclusion réciproque.
Soit $y \in B$. Alors, par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et donc, par définition, un tel x est dans $f^{-1}(B)$.
On a alors $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$.
Et donc $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.
8. **Faux.** Si f désigne la fonction carré. Alors $f(\{2\}) = \{4\}$, mais $f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$.
9. **Vrai.** Soit $y \in f\left(\overline{A}\right)$.
Alors il existe $x \in \overline{A}$ tel que $y = f(x)$.
Supposons par l'absurde que $y \in f(A)$. Alors il existe $x' \in A$ tel que $y = f(x')$. Mais par injectivité de f, $x = x'$, ce qui est impossible puisque $x \in \overline{A}$ et $x' \in A$.
Donc $y \notin f(A) \Leftrightarrow y \in \overline{f(A)}$.
10. **Vrai.** On a
$$x \in \overline{f^{-1}(B)} \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in f^{-1}\left(\overline{B}\right).$$

> **Remarque**
> En revanche, si f n'est pas surjective, cette proposition est fausse dès que B contient un élément qui n'est pas dans l'image de f.

Solution de l'exercice 10.14

Pour les deux questions, nous donnons deux solutions : l'une n'utilisant que les définitions du cours, l'autre utilisant des propriétés sur l'injectivité/la surjectivité d'une composée.

1. Supposons $g \circ f$ surjective et g injective.
Première méthode : soit $y \in F$. Alors par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = g(y)$.
Mais par injectivité de g, puisque $g(f(x)) = g(y)$, alors $y = f(x)$.
Donc y possède un antécédent par f, et donc f est surjective.

Seconde méthode : puisque $g \circ f$ est surjective, g est surjective.
Et étant injective par hypothèse, elle est bijective, et donc admet une bijection réciproque g^{-1}.
Mais alors $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ est surjective car composée de deux surjections[7].
2. Supposons $g \circ f$ injective et f surjective
Première méthode : soient y_1, y_2 deux éléments de F tels que $g(y_1) = g(y_2)$. Alors par surjectivité de f, il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Mais alors $g(f(x_1)) = g(y_1) = g(y_2) = g(f(x_2))$, de sorte que par injectivité de $g \circ f$, $x_1 = x_2$.
Et donc $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$.
Ainsi, on a prouvé que $g(y_1) = g(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$, donc g est injective.

Seconde méthode : puisque $g \circ f$ est injective, f est injective.
Étant surjective par hypothèse, elle est donc bijective et admet donc une bijection réciproque f^{-1}.
Et alors $g = (g \circ f) \circ f^{-1}$ est injective car composée de deux injections.

Solution de l'exercice 10.15

Il est clair que $\text{id}_{\mathbf{N}}$ est une solution, montrons que c'est la seule.
Soit donc $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une injection telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) \leqslant n$.
Alors $f(0) \leqslant 0$, donc $f(0) = 0$.
De même, $f(1) \leqslant 1$, donc $f(1) \in \{0, 1\}$. Mais on ne peut avoir $f(1) = 0 = f(0)$, car cela contredirait l'injectivité de f. Donc $f(1) = 1$.
Montrons par récurrence forte sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$.
La récurrence est largement initialisée.
Supposons donc que pour tout $k \leqslant n$, $f(k) = k$.

[6] En fait, l'unique application de F dans E.

[7] g^{-1} est bijective, donc en particulier injective.

Alors $f(n+1) \leqslant n+1$, donc $f(n+1) \in [\![0, n+1]\!]$.
Mais on ne peut avoir $f(n+1) = \ell$, avec $\ell \in [\![0, n]\!]$, car alors on aurait $f(n+1) = \ell = f(\ell)$, contredisant l'injectivité de f.
Donc $f(n+1) = n+1$, et donc par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.16

Procédons par double implication.
► Supposons dans un premier temps que f soit bijective, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
Soit alors $y \in \overline{f(A)}$. Alors y admet un unique antécédent par f, qui est $x = f^{-1}(y)$.
Nécessairement, x ne peut être dans A, faute de quoi on aurait $y = f(x) \in f(A)$.
Donc $x \in \overline{A}$, et par conséquent, $y = f(x) \in f\left(\overline{A}\right)$. Ceci prouve donc déjà que $\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$.
De même, soit $y \in f\left(\overline{A}\right)$. Alors l'unique antécédent de y est $x = f^{-1}(y)$, qui par hypothèse est dans $\overline{A}$.
Donc f ne peut pas être l'image d'un élément de A, car cet élément serait nécessairement $x \notin A$.
Donc $y \in \overline{f(A)}$, de sorte que $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.
Par double inclusion, on a donc $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.
► Inversement, supposons que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
En particulier, pour $A = \emptyset$, on obtient

$$f(\overline{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} = \overline{\emptyset} \Leftrightarrow f(E) = F.$$

Donc déjà, f est surjective.

Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$.
Soit alors $A = \{x\}$, de sorte que $f(A)$ est le singleton $\{f(x)\}$.
Alors $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)} = F \setminus \{f(x)\}$.
Puisque $f(y) = f(x) \notin F \setminus \{f(x)\}$, on en déduit que $f(y) \notin f\left(\overline{A}\right)$.
Et donc y, qui est un antécédent de $f(y)$, ne peut appartenir à $\overline{A}$, et donc appartient à A.
Mais A ne contient qu'un élément, qui est x, de sorte que $y = x$.
Et donc f est injective, et par conséquent bijective.

> **Danger !**
> On touche là aux limites de la notation $\overline{A}$ pour le complémentaire : l'ensemble dans lequel on prend le complémentaire doit être clair, car il n'est pas écrit.
> Ici, c'est E lorsqu'on parle de A (qui est inclus dans E), mais F lorsqu'on parle de $f(A)$ (qui est inclus dans F).

> **Remarque**
> Avez-vous remarqué qu'il n'y a aucun besoin de raisonner par l'absurde ici ?

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.17

Supposons que f soit injective. Alors $\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap A, \overline{A} \cap \overline{B} \cap A\right) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$.
Et donc $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.
En passant au complémentaire, cela nous donne $A \cup B = \overline{\emptyset} = E$.

Inversement, supposons que $A \cup B \neq E$, et soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Alors $f(\{x\}) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset)$, et donc f n'est pas injective.
Ainsi, f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

Supposons à présent f surjective, et soit $x \in A$. Alors $(\{x\}, \emptyset) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ possède un antécédent par f : il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = (\{x\}, \emptyset)$.
Soit encore $\begin{cases} X \cap A = \{x\} \\ X \cap B = \emptyset \end{cases}$.
Alors $x \in X$, et puisque $X \cap B = \emptyset$, alors $x \notin B$.
Ainsi, nous venons de prouver que $x \in A \Rightarrow x \notin B$, et donc $A \cap B = \emptyset$.
Inversement, supposons que $A \cap B = \emptyset$, et montrons que f est surjective.
Soit donc $(A_1, B_1) \in \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, et soit $X = A_1 \cup B_1 \in \mathscr{P}(E)$.
Alors

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B) = ((A_1 \cup B_1) \cap A, (A_1 \cup B_1) \cap B) = ((A_1 \cap A) \cup (B_1 \cap A), (A_1 \cap B) \cup (B_1 \cap B)).$$

Mais puisque $B_1 \subset B$ et que $A \cap B = \emptyset$, $B_1 \cap A = \emptyset$. Et puisque $A_1 \subset A$, $A_1 \cap A = A_1$.
Et de même, $A_1 \cap B = \emptyset$ et $B_1 \cap B = B_1$.
Et donc $f(X) = (A_1, B_1)$, de sorte que (A_1, B_1) possède un antécédent par f.
Ceci étant vrai pour tout élément de $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$, f est surjective.

Et par conséquent, f est bijective si et seulement si elle est à la fois injective et surjective, donc si et seulement si $\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = E \end{cases}$, soit si et seulement si (A, B) forme une partition de E, ou que l'une des deux est vide et l'autre égale à E.

Solution de l'exercice 10.18

Il est évident que id convient.

Soit f une application de $\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ vérifiant la condition requise.
Alors $(\mathrm{id} + f + f^2) \circ f = 3\mathrm{id}$ est injective.
Et donc f est injective.
Montrons par récurrence forte sur k que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f(k) = k$.
On a $f(1) + f(f(1)) + f(f(f(1))) = 3$.
Or, chacun des entiers $f(1)$, $f^2(1)$ et $f^3(1)$ est supérieur ou égal à 1, et donc ils sont nécessairement tous trois égaux à 1.
Et en particulier, $f(1) = 1$, ce qui initialise la récurrence.

Rappel
Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Supposons que pour tout $n \leqslant k$, $f(n) = n$.
Alors $f(k+1) + f^2(k+1) + f^3(k+1) = 3(k+1)$.
Puisque f est injective, et que $f(1) = 1, f(2) = 2, \dots, f(k) = k$, $f(k+1) \geqslant k+1$.
Et donc, toujours par injectivité de f, $f(f(k+1)) \geqslant k+1$ et $f(f(f(k+1))) \geqslant k+1$.
Par conséquent, on doit avoir $f(k+1) = k+1$, $f(f(k+1)) = k+1$ et $f(f(f(k+1))) = k+1$.
Et puisque $f(k+1) = k+1$, nous venons de prouver l'hérédité.
Par le principe de récurrence, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f(k) = k$, et donc $f = \mathrm{id}$.

Ainsi, $f = \mathrm{id}$ est la seule application vérifiant la relation demandée.

Solution de l'exercice 10.19

Soit $a \in \mathbf{Z}$. Alors $a^3 - a^3 = 0 = a - a$, si bien que $a \mathcal{R} a$. Donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Soient $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $a, b \mathcal{R}$, soit encore $a^3 - b^3 = a - b$.
Alors $b^3 - a^3 = b - a$, et donc $b \mathcal{R} a$. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
Enfin, soient $a, b, c \in \mathbf{Z}$ tels que $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$.
Alors $a^3 - b^3 = a - b$ et $b^3 - c^3 = b - c$.
Donc en sommant terme à terme ces égalités, $a^3 - c^3 = a - c$, et donc $a \mathcal{R} c$.
Donc R est transitive, donc est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$.

Soit $a \in \mathbf{Z}$. Par définition, $\mathrm{cl}(a) = \{b \in \mathbf{Z} \mid a \mathcal{R} b\} = \{b \in \mathbf{Z} \mid a^3 - b^3 = a - b\}$.
Soit donc $b \in \mathbf{Z}$. On a alors

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 = a - b &\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a - b \\ &\Leftrightarrow (a-b)\left(a^2 + ab + b^2 - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \textbf{ ou } a^2 + ab + b^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \textbf{ ou } b^2 + ab + (a^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Notons qu'on retrouve déjà le fait que a est dans la classe de a.
Notons que l'équation $b^2 + ab + (a^2 - 1) = 0$ est polynomiale de degré 2, donc elle ne possède pas de solution réelle lorsque $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 1) \leqslant 0 \Leftrightarrow 4 - 3a^2 \leqslant 0$.
Donc déjà si[8] $|a| \geqslant 2$.

[8] N'oublions pas que a est un entier.

Pour $a = 0$, on a donc $b \in \mathrm{cl}(a)$ si et seulement si $(b = a = 0)$ **ou** $(b^2 - 1 = 0) \Leftrightarrow b \in \{-1, 0, 1\}$.
Donc $\mathrm{cl}(0) = \{-1, 0, 1\}$.
Sans calculs supplémentaires, on en déduit que $\mathrm{cl}(1) = \mathrm{cl}(-1) = \{-1, 0, 1\}$. En effet, deux classes d'équivalence sont égales ou disjointes.
Donc si $a \mathcal{R} b$, alors $a \in \mathrm{cl}(a) \cap \mathrm{cl}(b)$, et donc $\mathrm{cl}(a) = \mathrm{cl}(b)$.

Solution de l'exercice 10.20

▸ **Réflexivité** : puisque pour tout $p \in \mathbf{N}$, $p = p^1$, $\preccurlyeq$ est réflexive.
▸ **Antisymétrie** : soient $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq p$.
Alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $q = p^n$ et il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $p = q^m$.
Et donc $p = (p^n)^m = p^{nm}$.

⚠ Attention !
m et n n'ont aucune raison d'être égaux !

Si $p = 0$, alors $q = 0$, et donc $p = q$.
Si $p = 1$, alors $q = p^n = 1$, donc $p = q$.
Si $p \notin \{0, 1\}$, alors $1 = p^{mn-1}$, de sorte que $mn - 1 = 0 \Leftrightarrow mn = 1 \Leftrightarrow m = n = 1$. Et donc une fois de plus, $p = q$.
Donc $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
▸ **Transitivité** : supposons à présent que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq r$. Alors il existe deux entiers n et m tels que $q = p^n$ et $r = q^m$. Et donc $r = (p^n)^m = p^{nm}$, de sorte que $p \preccurlyeq r$. Et donc la relation $\preccurlyeq$ est transitive.
Ainsi, nous avons bien une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$.

Cet ordre n'est pas total, car on n'a ni $2 \preccurlyeq 3$ (car 3 n'est pas une puissance de 2), ni $3 \preccurlyeq 2$ (car 2 n'est pas une puissance de 3).

Solution de l'exercice 10.21

Soient x, y deux éléments de E tels que $x\mathcal{R}y$. Alors par réflexivité[9]Qui provient du fait qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. de $\mathcal{R}$, $y\mathcal{R}x$.
Mais puisque $\mathcal{R}$ est antisymétrique[10], on a donc $x = y$.
Et donc les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont toutes des singletons.

Si on suppose de plus que $\mathcal{R}$ est total, soient alors x et y deux éléments de E. On a alors soit $x\mathcal{R}y$, soit $y\mathcal{R}x$.
Mais alors d'après ce qui précède, $x = y$. Et donc E ne possède qu'un seul élément.
Et inversement, sur un singleton, il n'existe qu'une relation d'équivalence[11], qui est alors une relation d'ordre total.

[9] 5mm

[10] Car relation d'ordre.

[11] Et même une seule relation réflexive : c'est $\mathcal{R} = E \times E$.

Solution de l'exercice 10.22

Pour $z \in \mathbf{C}$, on a $|z| = |z|$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Si $|z_1| = |z_2|$ et $|z_2| = |z_3|$, alors $|z_1| = |z_3|$, donc $\mathcal{R}$ est transitive.
Enfin, il est évident que $|z| = |z'| \Leftrightarrow |z'| = |z|$, et donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
Ainsi, nous sommes bien en présence d'une relation d'équivalence.

Soit $z_1 \in \mathbf{C}$, et soit $r = |z_1|$ le module de z.
Alors la classe d'équivalence de z_1 est $\{z \in \mathbf{C}, |z| = r\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont à distance r de l'origine : c'est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r.
Notons que le cas de la classe d'équivalence de 0 est un peu particulier : elle ne contient que 0, ce qui peut être vu comme un cercle de rayon 0.

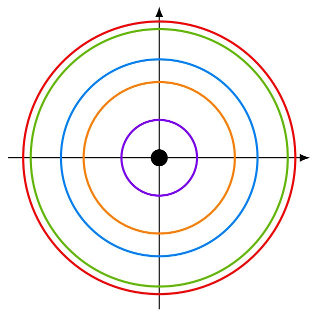


Figure 10.1– Les classes qu'équivalence sont disjointes, et forment une partition de $\mathbf{C}$ (bien que toutes ne tiennent pas dans la marge...)

Solution de l'exercice 10.23

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $xe^x = xe^x$, et donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x\mathcal{R}y$. Alors $xe^y = ye^x$ et donc $ye^x = xe^y$, donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
Enfin, soient $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Alors $xe^y = ye^x \Leftrightarrow xe^{-x} = ye^{-y}$, et de même $ye^{-y} = ze^{-z}$. Et donc $xe^{-x} = ze^{-z} \Leftrightarrow xe^z = ze^x$, de sorte que $x\mathcal{R}z$.
Par conséquent, $\mathcal{R}$ est transitive, et donc est une relation d'équivalence.
2. Notons que comme mentionné précédemment, on a $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y ont la même image par $f : t \mapsto te^{-t}$.
La classe d'équivalence de x est donc l'ensemble des réels ayant même image par f que x.
Étudions rapidement la fonction f : elle est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée égale à $f' : t \mapsto (1 - t)e^{-t}$, et donc son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

L'image de f est donc $]-\infty, e^{-1}]$, et il est facile de constater que tous les éléments de $]-\infty, 0] \cup \{e^{-1}\}$ possèdent un unique antécédent par f et que ceux de $]0, e^{-1}[$ possèdent deux antécédents[12] par f.
Et donc les classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ sont de cardinal 1 ou 2.

Plus précisément : la classe d'un élément de $\mathbf{R}_+^* \setminus \{1\}$ est de cardinal 2, les autres sont de cardinal 1.

[12] Un dans $]0, 1[$ et un dans $]1, +\infty[$.

Solution de l'exercice 10.24

1. ▸ **Réflexivité** : soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Alors $X \cap X = X \cap X$.
▸ **Symétrie** : soient X et Y deux parties de E telles que $X \sim Y$. Alors $X \cap A = Y \cap A \Leftrightarrow Y \cap A = X \cap A \Leftrightarrow Y \sim X$.
▸ **Transitivité** : soient XY et Z trois parties de E telles que $X \sim Y$ et $Y \sim Z$. Alors $X \cap A = Y \cap A = Z \cap A$, et donc en particulier $X \cap A = Z \cap A$: $\sim$ est transitive.

2. Notons F l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.
Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(A) & \longrightarrow & F \\ B & \longmapsto & \mathrm{cl}(B) \end{array} \right.$, qui à une partie de A associe sa classe d'équivalence.
Alors f est surjective. En effet, si $X \in \mathscr{P}(E)$, notons alors $B = A \cap X$, qui est une partie de A, pour laquelle $A \cap B = B = A \cap X$.
On a donc $B \sim X$, de sorte que la classe d'équivalence de B (c'est à dire $f(B)$) n'est autre que celle de X. Donc toute classe d'équivalence de $\sim$ est dans l'image de f.

Prouvons à présent que f est injective : soient B, B' deux parties de A telles que $f(B) = f(B')$, c'est-à-dire telles que $\mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(B')$, soit encore telles que $B \sim B'$.
Alors $B \cap A = B' \cap A$. Mais $B \subset A$, donc $B \cap A = B$, et de même $B' \cap A = B'$.
Et donc $B = B'$: f est injective.

Ainsi, f réalise une bijection de $\mathscr{P}(A)$ sur l'ensemble[13] des classes d'équivalence de $\sim$.

Remarque
Une partie de A est en particulier une partie de E.

[13] Appelé quotient de $\mathscr{P}(E)$ par $\sim$, et noté $E/\sim$.

Solution de l'exercice 10.25

Soit $f : E \to \mathbf{R}$ un élément de F.
Alors $\forall x \in E$, $f(x) \preccurlyeq f(x)$, donc $f \preccurlyeq f$. Ainsi $\preccurlyeq$ est réflexive.
Soient $f, g \in F$ tels que $f \preccurlyeq g$ et $g \preccurlyeq f$.
Alors pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant f(x)$, donc $f(x) = g(x)$, si bien que $f = g$. Donc $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
Soient enfin $f, g, h \in F$ tels que $f \preccurlyeq g$ et $g \preccurlyeq h$.
Alors pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant g(x)$ et $g(x) \leqslant h(x)$, si bien que $f(x) \leqslant h(x)$.
Et donc $f \preccurlyeq h$ si bien que $\preccurlyeq$ est transitive.
Donc $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur F.

Si $E = \{x\}$ est un singleton, alors il s'agit d'une relation d'ordre total puisque pour tous $f, g \in F$, on a soit $f(x) \leqslant g(x)$, et alors $f \preccurlyeq g$, soit $g(x) \leqslant f(x)$ et alors $g \preccurlyeq f$.
En revanche, si E contient au moins deux éléments distincts x et y, notons alors f : $\left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t = x \\ 1 & \text{si } t = y \\ -1 & \text{si } t \notin \{x, y\} \end{cases} \end{array} \right.$ et notons f : $\left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t = x \\ 0 & \text{si } t = y \\ -1 & \text{si } t \notin \{x, y\} \end{cases} \end{array} \right.$
Alors on n'a pas $f \preccurlyeq g$ car $g(y) < f(y)$, et on n'a pas $g \preccurlyeq f$ car $f(x) < g(x)$.
Et donc f et g ne sont pas comparable, donc $\preccurlyeq$ n'est pas un ordre total.

Solution de l'exercice 10.27

Procédons par analyse-synthèse.
Si une telle relation d'équivalence $\sim$ existe, c'est-à-dire telle que $A = \{\mathrm{cl}(x), x \in E\}$.
Alors pour tous $(x, y) \in E^2$, $x \sim y \Leftrightarrow \mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) \Leftrightarrow \exists X \in A$, $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y) = X$.
Et inversement, s'il existe $X \in A$ tel que $\{x, y\} \subset X$, alors il existe $z \in E$ tel que $\mathrm{cl}(z) = X$, et donc $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(z) = X$ et de même $\mathrm{cl}(y) = X$.
Donc $x \sim y$.

Notons qu'on a utilisé ici le fait que deux éléments sont en relation si et seulement si ils ont la même classe d'équivalence.

Inversement, définissons une relation $\sim$ sur E en posant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \sim y \Leftrightarrow \exists X \in A, \{x, y\} \subset X.$$

Prouvons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E, et que l'ensemble de ses classes d'équivalence est A.
Soit $x \in E$. Puisque A est une partition de E, $\bigcup_{X \in A} X = E$, et donc en particulier, $x \in \bigcup_{X \in A} X$.

Donc il existe $X \in A$ tel que $x \in X$. Et donc $\{x, x\} = \{x\} \subset X$, si bien que $x \sim x$. Donc $\sim$ est réflexive.
Il est évident que $\sim$ est symétrique puisque $\{x, y\} = \{y, x\}$.
Soient $x, y, z \in E$ tels que $x \sim y$ et $y \sim z$.
Alors il existe $X_1, X_2 \in A$ tels que $\{x, y\} \subset X_1$ et $\{y, z\} \subset X_2$.
Mais alors $\{y\} \subset X_1 \cap X_2$, si bien que $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.
Et donc par définition d'une partition, $X_1 = X_2$. Et donc $\{x, z\} \subset \{x, y\} \cup \{y, z\} \subset X_1$.
Donc $x \sim z$, si bien que $\sim$ est transitive.
Et donc $\sim$ est bien une relation d'équivalence sur E.

Reste à prouver que $\{\mathrm{cl}(x), x \in E\} = A$.
Soit $X \in A$. Alors puisque[14] $X \neq \emptyset$, et donc il existe $x \in E$ tel que $x \in X$.
Mais alors pour tout $y \in E$, $x \sim y \Leftrightarrow \exists Y \in A,\ \{x, y\} \subset Y$.
Mais un tel Y contient x, et donc $X \cap Y \neq \emptyset$, et donc $X = Y$. Et par conséquent, $y \in \mathrm{cl}(x) \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow y \in X$.
Autrement dit, nous venons de prouver que $X = \mathrm{cl}(x)$.
Donc déjà, tous les éléments de A sont des classes d'équivalence de $\sim$, si bien que $A \subset \{\mathrm{cl}(x),\ x \in E\}$.
Inversement, soit $x \in E$, prouvons que $\mathrm{cl}(x) \in A$.
Mais comme précédemment, il existe $X \in A$ tel que $x \in X$, et alors $\mathrm{cl}(x) = X$.
Donc toute classe d'équivalence de $\sim$ est un élément de A, et donc $\{\mathrm{cl}(x), x \in E\} \subset A$.
Par double inclusion, on a donc $\{\mathrm{cl}(x), x \in E\} = A$.

[14] C'est encore dans la définition de partition.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.28

Supposons que $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$ possède un plus grand élément A.

> **Remarque**
> E est alors un élément de $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$, c'est-à-dire une partie de E qui n'est pas égale à E tout entier.

Soit $z \in E$. Puisque E contient au moins deux éléments, $\{z\} \neq E$.
Et donc $\{z\} \subset A$, si bien que $z \in A$.
Et donc $\forall z \in E$, $z \in A$, de sorte que $A = E$, ce qui est absurde.
On en déduit $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément pour l'inclusion.

Remarque : notons que l'hypothèse que E contient deux éléments est indispensable : si $E = \{a\}$ est un singleton, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, E\}$, si bien que $\mathscr{P}(E) \setminus \{E\} = \{\emptyset\}$, qui possède un plus grand élément.

> **Évidemment**
> Dans un ensemble ordonné, un singleton possède toujours un plus grand et un plus petit élément.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.29

Raisonnons par l'absurde, et supposons que E soit infini.
On définit alors une suite par :

$$x_0 = \min E,\ x_1 = \min E \setminus \{x_0\},\ x_2 = \min E \setminus \{x_0, x_1\}$$

> **Autrement dit**
> x_0 est le plus petit élément de E, x_1 le «deuxième» plus petit, etc.

et plus généralement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = \min E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.
Notons que cette suite est bien définie, puisqu'à chaque étape, E étant infini, on a bien $E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ qui est non vide, et donc admet un plus petit élément.
Soit alors $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\} = \{x_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
Alors A ne peut pas admettre de plus grand élément.
En effet, la suite (x_n) est croissante, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = \min E \setminus \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ et $x_{n+1} \in E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, donc $x_n \preccurlyeq x_{n+1}$.
Mieux, elle est strictement croissante, au sens où $x_n \preccurlyeq x_{n+1}$, mais $x_{n+1} \neq x_n$ (puisque $x_{n+1} \in E \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$).

Supposons alors que A possède un plus grand élément a. Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $x_{n_0} = a$. Et alors, $a < x_{n_0+1}$ (par stricte croissance de la suite), mais $x_{n_0+1} \preccurlyeq a$ (par définition d'un plus grand élément).
Ceci n'est pas possible. On en déduit donc que E est infini.

***Remarques** : le fait que E soit infini a en fait ici été utilisé pour dire qu'à chaque étape, $E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est non vide. Si E était fini, on pourrait faire de même, mais au bout d'un certain nombre d'étapes (égal au cardinal de E), il n'y aurait plus rien dans $E \setminus \{x_0, \cdots, x_{n-1}\}$, et donc on ne pourrait pas aller plus loin.*

SOLUTION DE L'EXERCICE 10.30

Soit $f \in E$. Alors pour tout intervalle ouvert I contenant α (et il existe bien de tels intervalles[15]), on a $f_{|I} = f_{|I}$.
Donc $f \sim f$: la relation $\sim$ est réflexive.

[15] Par exemple $\mathbf{R}$ tout entier ou $]\alpha - 1, \alpha + 1[$.

Soient f, g deux éléments de E tels que $f \sim g$. Alors soit I intervalle ouvert contenant α tel que $f_{|I} = g_{|I}$. Alors $g_{|I} = f_{|I}$, donc $g \sim f$, de sorte que $\sim$ est symétrique.

Soient enfin f, g, h trois fonctions de E telles que $f \sim g$ et $g \sim h$.
Alors il existe deux intervalles ouverts I_1 et I_2, contenant α tels que $f_{|I_1} = g_{|I_2}$ et $g_{|I_2} = h_{|I_3}$.
On pourrait prouver que $I_3 = I_1 \cap I_2$ est encore un intervalle ouvert, contenant α, et tel que $f_{|I_3} = h_{|I_3}$.
Mais le point fastidieux est de prouver que l'intersection de deux intervalles ouverts est encore un intervalle ouvert. En effet, rappelons qu'un intervalle ouvert peut être de l'une des 4 formes suivantes : $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ ou $\mathbf{R}$. Donc il nous faut distinguer de nombreux cas.

⚠ Attention !

Toute la difficulté vient du fait que I_1 et I_2 ne sont pas nécessairement les mêmes, dans la définition de $\sim$, l'intervalle I dépend du choix de (f, g).

Remarque

Le fait que $\alpha \in I_1 \cap I_2$ est évident.

Notons plus simplement qu'il existe a et b dans I_1 tels que $a < \alpha < b$, et de même, il existe c et d dans I_2 tels que $c < \alpha < d$.
Et alors $J =]\max(a, c), \min(b, d)[$ est un intervalle ouvert, inclus dans $I_1 \cap I_2$. Et donc pour tout $x \in J$,

$$f_{|J}(x) = f_{|I_1}(x) = g_{|I_1}(x) = g_{|J}(x).$$

Et de même, $g_{|J}(x) = h_{|J}(x)$, de sorte que $f_{|J}(x) = h_{|J}(x)$.
Ainsi, $f_{|J} = h_{|J}$, et donc $f \sim h$. On en déduit que $\sim$ est transitive, et donc est bien une relation d'équivalence.