TD 1 : Logique

▸ Précisions sur le fonctionnement des TD

Tout au long de l'année, les exercices de TD seront accompagnés d'une lettre indiquant leur niveau de difficulté :

F Facile **PD** Peu difficile **AD** Assez difficile **D** Difficile **TD** Très difficile.

Une étoile (⋆) indique une question plus difficile que le reste de l'exercice, et qui peut être laissée de côté dans un premier temps. N'oubliez pas **de lire les questions en entier**, et notamment les éventuelles indications qu'elles peuvent contenir.

▸ Logique

Exercice 1.1 Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication bien connue (parfois sous le nom de «règle du produit nul») $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \textbf{ ou } b = 0)$. **F**
Pour chacune d'entre elles, donner sa valeur de vérité.

Exercice 1.2 Si E désigne l'ensemble des élèves de MP2I, F l'ensemble des livres existants alors on note $P(x, y)$ la proposition «l'individu x a lu le livre y». **F**
Traduire par une phrase en français chacune des propositions suivantes (et si ça vous amuse, déterminer sa valeur de vérité).

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
3. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
4. $\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
5. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$

Exercice 1.3 Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en le justifiant. Écrire également sa négation. **F**

1. $\forall x \in \mathbf{R}, \sqrt{x^2} = x$
2. $\forall x \in \mathbf{R}, x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 \leqslant 4$
3. $\exists x \in \mathbf{R}_+, x < \sqrt{x}$
4. $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, x < \sqrt{x}$
5. $\forall a, b \in \mathbf{Z}, \exists u, v \in \mathbf{Z}, au + bv = 1$
6. $\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{Z}, \exists z \in \mathbf{R}, z \neq x + y$

Exercice 1.4 Un ensemble A formé de nombres réels est dit minoré s'il vérifie : $\exists m \in \mathbf{R}, \forall x \in A, m \leqslant x$. **PD**
Les ensembles suivants sont-ils minorés ? Justifier.

1. $\mathbf{R}_+^*$
2. $\mathbf{R}$
3. $[-1, 3]$
4. $\mathbf{Q}$
5. (⋆) L'ensemble des irrationnels

Exercice 1.5 Permutation de quantificateurs **AD**
Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables, et soient E et F deux ensembles.
Montrer que $(\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y))$. Que dire de la réciproque ?

Exercice 1.6 Soient P, Q, R trois propositions logiques. **PD**

1. Redémontrer que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\neg P \vee Q$. Retrouver la négation de $P \Rightarrow Q$.
2. Montrer que les assertions (a) et (b) suivantes sont équivalentes :
   (a) $(P \vee Q) \Rightarrow R$ et $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$.
   (b) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ et $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$.

Exercice 1.7 **PD**

1. Donner la négation, ainsi que la valeur de vérité de la proposition suivante

$$\forall a \in]-\pi, \pi[\, , \left(\cos(a) > 0 \Rightarrow a \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\right).$$

2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?

(a) $\forall t \in \mathbf{R}, (f(t) > 0 \text{ ou } f(t) < 0))$ (b) $(\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) > 0)$ **ou** $(\forall t \in \mathbf{R}, f(t) < 0)$.

Exercice 1.8 PD

1. Montrer que $\forall a \in [0,1],\ \exists b \in \mathbf{R},\ a = \cos b$.
2. En déduire que $\forall t \in [0,2],\ \exists x, y \in \mathbf{R},\ t = \cos x + \sin y$.

Exercice 1.9 Soit x un réel. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$. AD

Exercice 1.10 Montrer que $\forall x, y \in \mathbf{R},\ x + y > 2 \Rightarrow (x > 1 \textbf{ ou } y > 1)$. AD
Écrire également la négation de cette proposition, ainsi que la réciproque de l'implication qu'elle contient. Cette réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.11 Soit $p \in \mathbf{N}^*$ un entier naturel. Écrire sous forme quantifiée l'assertion «p est un nombre premier». AD

Exercice 1.12 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Montrer que PD

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right) \Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbf{R},\ f(u+v) + f(u-v) = 2f(u)f(v).$$

Exercice 1.13 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes : PD

1) $\exists y_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = y_0$
2) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) = f(y)$

Que signifient ces deux assertions ?

Exercice 1.14 Prouver l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbf{R}, (x \notin \mathbf{Q} \textbf{ ou } \exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z})$. PD

Exercice 1.15 Déterminer l'ensemble des réels x tels que le prédicat suivant soit vrai : AD

$$\forall t \in [0,1],\ x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t.$$

Exercice 1.16 Soit I une partie de $\mathbf{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbf{R}$ est dite localement constante sur I si D

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = a.$$

1. Montrer que $f : I \to \mathbf{R}$ est localement constante sur I si et seulement si $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(t) = f(x)$.
2. Montrer qu'une fonction constante sur I est localement constante.
3. Donner un exemple de partie $I \subset \mathbf{R}$ et de fonction $f : I \to \mathbf{R}$ non constante mais localement constante.
4. Prouver que toute fonction localement constante sur I est constante si et seulement si I est un intervalle.

▶ Raisonnements divers

Exercice 1.17 Soit x un irrationnel strictement positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel. F

Exercice 1.18 Écrire avec des quantificateurs la proposition «la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel», et prouver qu'elle est vraie. PD

Exercice 1.19 Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$. PD

Exercice 1.20 Le réel $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ? Même question pour $\sqrt{4 + \sqrt{3} + \sqrt{2}}$. PD

Exercice 1.21 AD

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.

Exercice 1.22 Donner sous forme d'une seule assertion quantifiée (avec des quantificateurs et des connecteurs logiques) l'énoncé du principe de récurrence simple. Même question pour les principes de récurrence double et forte. PD

Exercice 1.23 Au rugby, une équipe peut marquer 3 points (drop ou pénalité), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai tranformé). AD
Déterminer l'ensemble des scores possibles.

Exercice 1.24 Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 AD
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = a(-1)^n + b2^n$.

Exercice 1.25 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)$. PD
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante.

Exercice 1.26 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, AD

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

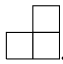
Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

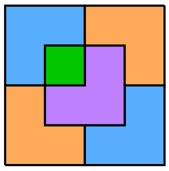
Exercice 1.27 Prouver que : $\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 8 \Rightarrow (\exists a, b \in \mathbf{N},\ n = 3a + 5b)$. AD

Exercice 1.28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers naturels (ce qui signifie que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{N}$) vérifiant les deux assertions suivantes : D

i) $\forall p \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, u_n = p$
ii) $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n \geqslant n$.

Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = n$.

Exercice 1.29 Un peu de Tétris TD
On dispose d'un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ ($n \geqslant 2$), que l'on souhaite remplir à l'aide d'un monomino (pièce carrée de taille 1×1 : ) et de triominos coudés .
Montrer que quelle soit la position du monomino sur l'échiquier, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec les triominos, comme sur la figure ci-contre.



Correction des exercices du TD 1

Solution de l'exercice 1.1

Commençons par remarquer que l'implication de l'énoncé est vraie, au moins lorsque a et b sont des nombres réels ou complexes.

Sa négation est $ab = 0$ **et** $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$.
En tant que négation d'une proposition vraie, elle est fausse.

> **Rappel**
> La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

La contraposée est $(a \neq 0$ **et** $b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$.
Puisqu'elle a même valeur de vérité que l'implication de départ, elle est vraie.

Enfin la réciproque est $(a = 0$ **ou** $b = 0) \Rightarrow ab = 0$, qui est vraie[1], ce qui signifie que l'implication de départ est en fait une équivalence.

[1] Mais ceci n'est pas lié au fait que l'implication de départ soit vraie.

Solution de l'exercice 1.2

1. Tout le monde a lu tous les livres.[2]
2. Tout le monde a lu au moins un livre.[3]
3. Il existe un étudiant qui a lu au moins un livre.
4. Il existe un livre qui a été lu par au moins un étudiant. C'est la même chose que la précédente : on peut permuter deux quantificateurs existentiels.
5. Il existe un étudiant qui a lu tous les livres.[4].
6. Tout livre a été lu par au moins un étudiant.
7. Il existe un livre que tous les étudiants ont lu.[5]

[2] Faux : avez vous tous lu le dernier Guillaume Musso ?

[3] J'espère que oui !

[4] Permettez-moi d'en douter !

[5] Vrai : *Lorenzaccio*.

Solution de l'exercice 1.3

Remarquons tout de suite que pour nier une proposition du type $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$, il suffit d'exhiber un contre exemple, c'est-à-dire montrer l'existence d'un élément $x \in E$ tel que **non** $\mathscr{P}(x)$.
En d'autres termes, on prouve $\exists x \in E,$ **non** $\mathscr{P}(x)$, qui est la négation de $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$.

1. **Faux**. En effet, pour $x = -1$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R},\ x \neq \sqrt{x^2}$ (ce qui est par exemple vrai pour $x = -1$).
2. **Faux**. Pour $x = -3$, on a $x \leqslant 2$ et pourtant $x^2 = 9 > 4$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R},\ x \leqslant 2$ **et** $x^2 > 4$.
3. **Vrai**. $x = \frac{1}{4}$ convient, puisque $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ qui est bien plus grand que $\frac{1}{4}$.
   Sa négation est $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \geqslant \sqrt{x}$.
4. **Faux**. Pour $x = 1$, on a $x = \sqrt{x}$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \geqslant \sqrt{x}$.
5. **Faux**. Si $a = b = 0$, alors, quels que soient u et v dans $\mathbf{Z}$, $au + bv = 0$.
   Sa négation est $\exists a, b \in \mathbf{Z},\ \forall u, v \in Z,\ au + bv \neq 1$.
6. **Vrai**. Prenons $x = \frac{1}{2}$, et $z = 0$ (indépendamment de la valeur de y). Alors quel que soit $y \in \mathbf{Z}$, $0 \neq y + \frac{1}{2}$.
   Sa négation est $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{Z},\ \forall z \in \mathbf{R},\ z = x + y$.

> **Plus généralement**
> Cette proposition est fausse pour tout $x < 0$.

> **Rappel**
> La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

> **Remarque**
> Si vous avez quelques souvenirs d'arithmétique, vous aurez sûrement reconnu le théorème de Bézout : $\exists u, v \in \mathbf{Z},\ au + bv = 1$ est vrai si et seulement si a et b sont premiers entre eux.
> Or il est faux que pour tout $a, b \in \mathbf{Z}$, a et b sont premiers entre eux.

Solution de l'exercice 1.4

1. $\mathbf{R}_+^*$ est minoré car si on pose $m = 0$, alors $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ 0 \leqslant x$.
2. $\mathbf{R}$ n'est pas minoré. En effet, la négation de «$\mathbf{R}$ est minoré» est $\forall m \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ m > x$.
   Prouvons que cette proposition est vraie : soit $m \in \mathbf{R}$, et posons $x = m - 1$. Alors $m > x$.
3. $[-1, 3]$ est minoré, car pour tout $x \in [-1, 3]$, $-1 \leqslant x$.
4. $\mathbf{Q}$ n'est pas minoré, par exemple car $\mathbf{Z}$ n'est pas minoré.
   En effet, pour tout réel $x \in \mathbf{R}$, il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $m < x$.

> **Détails**
> Ce résultat peut vous paraître évident (et nous allons pour l'instant faire comme si c'était le cas) : on peut par exemple prendre $m = \lfloor x \rfloor - 1$), mais il aura besoin d'être prouvé plus tard dans l'année.

5. L'ensemble $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ des irrationnels n'est pas minoré.
En effet, soit $x \in \mathbf{R}$, prouvons qu'il existe $m \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tel que $m < x$.
Puisque $x + \sqrt{2} \in \mathbf{R}$, par la question précédente, il existe $q \in \mathbf{Q}$ tel que $q < x + \sqrt{2}$. Et donc $q - \sqrt{2} < x$.
Mais $q - \sqrt{2}$ est un irrationnel car somme d'un rationnel et d'un irrationnel.

Solution de l'exercice 1.5

Supposons que $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x, y)$.
Notons alors x_0 un élément de E tel que $\forall y \in F,\ P(x_0, y)$.
Soit $y \in F$. Alors $P(x_0, y)$ est vraie.
Et donc $\exists x \in E,\ P(x, y)$ est vraie (car on peut prendre $x = x_0$).
Et par conséquent, nous venons de prouver que $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x, y)$.
Nous venons donc bien de prouver que

$$(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x, y)).$$

En revanche, la réciproque est fausse, puisque $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y$ est vraie[6], alors que $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \leqslant y$ est fausse[7].
Commentaires *: nous avons dit en cours qu'il n'était pas toujours permis de permuter les symboles* $\forall$ *et* $\exists$.
Nous venons donc de prouver que si $\exists\forall$ *est vraie, alors* $\forall\exists$ *est vraie aussi, mais la réciproque est fausse ! Et donc on n'a toujours pas le droit de permuter sans précaution les symboles* $\forall$ *et* $\exists$.

[6] Pour tout réel, il existe un réel plus grand.
[7] Il n'existe pas de réel plus grand que tous les réels.

Solution de l'exercice 1.6

Il suffit de faire des tables de vérité.

1.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On en déduit que la négation de $P \Rightarrow Q$ est

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg((\neg P) \vee Q) \equiv \neg(\neg P) \wedge \neg Q \equiv P \wedge (\neg Q).$$

2.a. On pourrait faire des tables de vérité, mais également utiliser ce qui précède :

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv \textbf{non}(P \textbf{ ou } Q) \textbf{ ou } R \equiv (\textbf{non}\, P \textbf{ et non}\, Q) \textbf{ ou } R \equiv (\textbf{non}\, P \textbf{ ou } R) \textbf{ et } (\textbf{non}\, Q \textbf{ ou } R).$$

Mais $P \Rightarrow R \equiv \textbf{non}\, P \textbf{ ou } R$ et $Q \Rightarrow R \equiv \textbf{non}\, Q \textbf{ ou } R$, et donc

$$(P \Rightarrow Q) \textbf{ et } (Q \Rightarrow R) \equiv ((\textbf{non}\, P \textbf{ ou } R)) \textbf{ et } (\textbf{non}\, Q \textbf{ ou } R).$$

On a donc bien

$$(P \textbf{ ou } Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \textbf{ et } (Q \Rightarrow R).$$

2.b. Montrons que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ et $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ ont même table de vérité.

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Là aussi, il aurait été possible d'utiliser la question 1 :

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (\neg P \vee (Q \Rightarrow R)) \equiv (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R.$$

Et sur le même principe, $(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv (\neg(P \wedge Q) \vee R) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R$.
Et donc $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$.

Solution de l'exercice 1.7

1. La négation en est $\exists a \in]-\pi,\pi[, \cos(a)>0$ **et** $a \notin \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.
Or cette négation est fausse, puisqu'il est bien connu que pour $a \in]-\pi,\pi[, \cos(a)>0 \Leftrightarrow a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Donc pour $a \in]-\pi,\pi[$, si $\cos(a)>0$, alors $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

   Puisque la négation est fausse, la proposition de départ est vraie.

2. Ces assertions ne sont pas équivalentes. Prenons par exemple f la fonction définie par $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) = 1$ **ou** $f(x) = -1$, si bien que l'assertion (a) est vraie.
En revanche, $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$, si bien que l'assertion (b) est fausse.

   En français : (a) signifie que f ne s'annule jamais, et (b) signifie que f ne s'annule jamais et reste de signe constant sur $\mathbf{R}$.

   Prouvons que $(b) \Rightarrow (a)$.
À cet effet, supposons que $(\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) > 0)$ **ou** $(\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) < 0)$.
Alors il y a deux cas de figure :
   - soit $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) > 0$. Et alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(f(t) > 0$ **ou** $f(t) < 0)$.
   - soit $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) < 0$. Et alors de même, $\forall t \in \mathbf{R}$, $(f(t) > 0$ **ou** $f(t) < 0)$.

   Donc on a bien $(b) \Rightarrow (a)$.
L'implication réciproque est fausse, puisque sinon nous aurions, par double implication, $(a) \Leftrightarrow (b)$.

Solution de l'exercice 1.8

1. La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est continue[8] sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et vérifie $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $a \in [0,1]$, il existe $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $a = f(b) = \cos(b)$.

2. Soit $t \in [0,2]$.
   - **<u>Si $t \leqslant 1$</u>**, alors $t = t + 0 = t + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

   Notons x un réel tel que $t = \cos(x)$, réel dont l'existence est garantie par la question précédente.
Si on pose $y = 0$, on a alors bien $t = \cos x + \sin y$.
   - **<u>Si $t > 1$</u>**, alors $t - 1 \in [0,1]$.

   Soit alors $b \in \mathbf{R}$ tel que[9] $t - 1 = \cos b$. Alors $t = \cos b + 1 = \cos b + \sin\frac{\pi}{2}$.
Et donc il existe deux réels $x = b$ et $y = 0$ tels que $t = \cos x + \sin y$.

   Alternative : soit $t \in [0,2]$. Alors $\dfrac{t}{2} \in [0,1]$.
Et alors par la question précédente, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{t}{2} = \cos(b)$.
Considérons un tel b, de sorte que $\dfrac{t}{2} = \cos(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$.
Alors en posant $x = b$ et $y = \dfrac{\pi}{2} - b$, on a

$$\cos(x) + \sin(y) = \cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(b) + \cos(b) = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t.$$

[8] Car dérivable.

[9] Encore une fois, l'existence d'un tel b est garantie par la question précédente.

Solution de l'exercice 1.9

Il s'agit de prouver une implication, nous pouvons donc prouver sa contraposée.
Celle-ci est $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon)$.
Soit donc x non nul. Alors $|x| > 0$. Et par conséquent, $\varepsilon = |x|$ est bien un réel strictement positif tel que $|x| \geqslant \varepsilon$.
Ainsi, nous venons de prouver que

$$(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon).$$

Et donc sa contraposée, qui est notre proposition de départ est également vraie.
Rappel *: une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité. On ne confondra pas la contraposée avec la négation et/ou la réciproque.*

Une autre solution : l'idée est la même que précédemment, mais si on revient à la définition de l'implication : $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
Autrement dit, il s'agit de prouver que pour $x \in \mathbf{R}$, $(\exists \varepsilon > 0, |x| \geqslant \varepsilon)$ **ou** $x = 0$.

Si $x = 0$, il n'y a rien à dire.
Et si $x \neq 0$, alors en posant $\varepsilon = |x|$, on a $\varepsilon > 0$ et $|x| \geqslant \varepsilon$, donc $\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon$.
Et donc on a bien $(\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon)$ **ou** $x = 0$.
Et ainsi, on a bien l'implication annoncée.

Solution de l'exercice 1.10

Soient x, y deux réels. Nous allons prouver la contraposée de l'implication annoncée, c'est-à-dire que ($x \leqslant 1$ **et** $y \leqslant 1$) $\Rightarrow x + y \leqslant 2$.
Mais cette implication est évidente par somme d'inégalités.
Et donc[10] l'implication de départ est vraie.

[10] Une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité.

La négation de cette proposition est donc

$$\exists x, y \in \mathbf{R},\ x + y > 2 \textbf{ et } x \leqslant 1 \textbf{ et } y \leqslant 1.$$

Enfin, l'implication réciproque est ($x > 1$ **ou** $y > 1$) $\Rightarrow x + y > 2$.
Elle n'est généralement pas vraie, comme le prouve le cas $x = 2, y = 0$.

Solution de l'exercice 1.11

Rappelons qu'un premier est un entier naturel qui n'est divisible que par 1 et par lui-même, et qui n'est pas égal à 1.
Il va donc falloir écrire de manière quantifiée la proposition «n divise p», où n et p sont deux entiers.
C'est assez aisé, il s'agit de $\exists q \in \mathbf{N},\ p = nq$.

Et donc l'assertion p est premier s'écrit

$$(p \neq 1) \wedge (\forall n \in \mathbf{N},\ (\exists q \in \mathbf{N},\ p = nq) \Rightarrow (n = p \vee n = 1))$$

Notons qu'une autre formulation possible[11] est

$$(p \neq 1) \wedge (\forall m \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}, p = mn \Rightarrow (n = 1 \vee m = 1)\,.$$

[11] Vous pouvez essayer de prouver que ces deux propositions sont équivalentes.

Solution de l'exercice 1.12

Supposons donc que pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right)$, et soient u, v deux réels.
Posons alors $x = u + v$ et $y = u - v$. On a alors $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{u+v+u-v}{2} = u$ et $\dfrac{x-y}{2} = v$.
Et donc $f(u+v) + f(u-v) = f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2f(u)f(v)$.
Ceci prouve donc l'implication

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(x)+f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right) \Rightarrow \forall u, v \in \mathbf{R},\ f(u+v)+f(u-v) = 2f(u)f(v).$$

Inversement, supposons que $\forall u, v \in \mathbf{R},\ f(u+v) + f(u-v) = 2f(u)f(v)$, et soient x, y deux réels.
Posons alors $u = \dfrac{x+y}{2}$ et $v = \dfrac{x-y}{2}$, de sorte que $u + v = x$ et $u - v = y$. Alors

$$f(x) + f(y) = f(u+v) + f(u-v) = 2f(u)f(v) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

Et donc l'implication réciproque est bien prouvée, ce qui achève de montrer l'équivalence annoncée.

Solution de l'exercice 1.13

Nous allons raisonner par double implication, c'est-à-dire prouver que 1) $\Rightarrow$ 2) et 2 $\Rightarrow$ 1).

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Supposons donc 1) vérifiée, et soit $y_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = y_0$.
Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Alors $f(x) = y_0 = f(y)$, et donc 2) est vraie.

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Supposons à présent que 2) soit vraie, et posons $y_0 = f(0)$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) = f(0) = y_0$.
Nous avons donc bien prouvé que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = y_0$, si bien que 1) est vraie.

Des deux propositions signifient que f est constante[12].

[12] Et donc l'une ou l'autre peut être prise comme définition de «f est constante».

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.14

Soit $x \in \mathbf{R}$. Raisonnons par disjonction de cas :
▶ si $x \notin \mathbf{Q}$, alors l'assertion ($x \notin \mathbf{Q}$ **ou** $\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z}$) est évidemment vraie.

▶ Si $x \in \mathbf{Q}$, notons alors $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$.
Et donc $qx = p \in \mathbf{Z}$. Ainsi, la proposition $\exists n \in \mathbf{N}^*$, $nx \in \mathbf{Z}$ est vraie.
Donc la proposition $x \notin \mathbf{Q}$ **ou** $\exists n \in \mathbf{N}^*$, $nx \in \mathbf{Z}$ l'est aussi.

Détails
C'est la définition même d'un rationnel.

Nous avons donc prouvé que quel que soit $x \in \mathbf{R}$, $x \notin \mathbf{Q}$ **ou** $\exists n \in \mathbf{N}^*$, $nx \in \mathbf{Z}$ est vraie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.15

Notons $\mathscr{P}(x)$ le prédicat de l'énoncé : $\forall t \in [0,1],\ x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$.
Nous allons distinguer quatre cas.

- Si $x \geqslant 2$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $x \geqslant t$ et $x \geqslant 2 \geqslant 2t$, si bien que $\mathscr{P}(x)$ est vrai.
- Si $x \in]0,2[$, alors $\frac{x}{2} \in]0,1[$. Soit alors $t \in \left]\frac{x}{2},1\right[$. Alors $x \geqslant t$ et $t > \frac{x}{2}$, donc $x < 2t$.
Par conséquent, $x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$ est fausse, et donc $\mathscr{P}(x)$ est fausse.
- Si $x = 0$, alors pour $t \in [0,1]$, deux cas de figure se présentent : soit $t = 0$, et alors $x \geqslant t$ et $x \geqslant 2t$ sont vraies, si bien que l'implication $x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$ est vraie.
Soit $t > 0$, et alors $x \geqslant t$ est fausse, donc l'implication $x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$ est vraie.
Donc $\mathscr{P}(x)$ est vraie.
- Enfin, si $x < 0$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $x \geqslant t$ est fausse, donc l'implication $x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$ est vraie. Et par conséquent $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

Détails
On peut par exemple prendre $t = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$, le milieu du segment $\left[\frac{x}{2},1\right]$.

En résumé, l'ensemble des réels x tels que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie est $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.16

1. Supposons f localement constante sur I.
Soit alors $x \in I$. Notons alors $a \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = a$.
Mais en particulier, comme $x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(x) = a$.
Et donc pour tout $t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(t) = f(x)$.
Nous avons donc bien prouvé que $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$.

Inversement, si $\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = f(x)$, alors pour $x \in I$ fixé, en notant $a = f(x)$, il existe bien $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = f(x) = a.$$

Et donc nous avons prouvé que

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = a$$

de sorte que f est localement constante sur I.

2. Soit f la fonction constante égale à λ sur I.
Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = \lambda$.
En particulier, pour tout $x \in I$, pour tout $t \in]x-1, x+1[\cap I$, $f(t) = \lambda$.
Et donc en prenant $a = \lambda$ et $\varepsilon = 1$, on a $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I$, $f(t) = a$. Et donc on a bien

$$\forall x \in I, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I,\ f(t) = a.$$

Et donc f est localement constante.

Remarque
Dans la définition, les variables ε et a peuvent dépendre de x, nous sommes en train de dire que dans le cas précis d'une fonction constante, il est **possible** de prendre les mêmes valeurs pour tout $x \in I$.

3. Considérons la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$.
Prouvons alors que f est localement constante.
Soit donc $x \in \mathbf{R}^*$. Distinguons alors deux cas :
▶ <u>**si** $x > 0$</u> : notons $\varepsilon = \frac{x}{2}$, de sorte que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= \left]\frac{x}{2}, \frac{3x}{2}\right[\subset \mathbf{R}_+^*$ et donc
$\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbf{R}^*$, $f(t) = 1$.
Donc en posant $a = 1$, on a bien prouvé que

$$\exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0,\ \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[,\ f(t) = a.$$

▶ <u>si $x<0$</u> : notons alors $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$, de sorte que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= \left]\frac{3x}{2}, \frac{x}{2}\right[\cap \subset \mathbf{R}_-^*$.
Et donc $a=-1$ convient.
Ainsi, on a bien prouvé que :

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \exists a \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap \mathbf{R}^*, f(t) = a.$$

Donc f est localement constante, mais n'est clairement pas constante sur $\mathbf{R}^*$. *Un autre exemple de fonction localement constante mais non constante serait la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ définie non pas sur $\mathbf{R}$ mais sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.*

4. L'exemple donné ci-dessus se transpose assez bien, pour prouver que si I n'est pas un intervalle, alors il existe une fonction définie sur I, localement constante mais non constante.
En effet, si I n'est pas un intervalle, alors $\exists x, y \in I, \exists z \in \mathbf{R}, (x \leqslant z \leqslant y \text{ et } z \notin I)$.
Considérons alors trois réels $x \leqslant z \leqslant y$ tels que $x \in I, y \in I$ et $z \notin I$.

Soit alors $f : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t > z \\ -1 & \text{si } t < z \end{cases} \end{array} \right.$.

Remarque
Nous ne disons rien du cas $t = z$, puisque $z \notin I$.

On prouve comme dans la question précédente que f est localement constante sur I.
Et pourtant $f(x) = -1 \neq f(y) = 1$, donc f n'est pas constante.
Par contraposée, nous venons donc de prouver le sens direct : si toute fonction localement constante sur I est constante, alors I est un intervalle.

Réciproquement, supposons que I soit un intervalle, et soit f une fonction localement constante sur I.
Laissons de côté les cas où I est soit vide[13], soit réduit à un point[14].
Autrement dit, considérons le cas où I est infini[15].
Soit alors $x \in I$, et soit $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbf{R}$ tels que $\forall t \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap I, f(t) = a$.
▶ <u>**Si x n'est pas l'une des bornes de I**</u>, c'est-à-dire s'il existe $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x < x_2$.
Alors en prenant $\varepsilon' = \min(\varepsilon, x - x_1, x_2 - x) > 0$, on a $]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[\subset I$ et $\forall t \in]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[$, $f(t) = a$.
Donc f est constante, égale à a sur $]x-\varepsilon', x+\varepsilon'[$.
En particulier, f est dérivable en x et $f'(x) = 0$.
▶ <u>**Si x est la borne de droite de I**</u>, c'est-à-dire si $I \cap]x, x+\varepsilon[= \emptyset$.
Alors il existe $x_1 \in I$ tel que $x_1 < x$, et donc en posant $\varepsilon' = \min(x - x_1, \varepsilon)$, alors $]x-\varepsilon', x] \subset I$, et pour tout $t \in]x-\varepsilon', x]$, $f(t) = a$.
Comme f n'est pas définie à droite de x, ceci prouve que f est dérivable en x et que $f'(x) = 0$.
▶ <u>**Si x est la borne de gauche de I**</u> : on raisonne comme pour la borne de droite.

Au final, nous venons de prouver que pour tout $x \in I$, f est dérivable en x avec $f'(x) = 0$.
Mais I étant un intervalle (et c'est fondamental ici), si f est de dérivée nulle sur I, alors elle est constante sur I.

[13] L'ensemble vide est bien un intervalle, bien que peu intéressant.

[14] Idem.

[15] Savez-vous prouver qu'un intervalle contient soit 0, soit 1, soit une infinité d'éléments ?

Arnaque ?
Cette histoire de dérivée en une borne de I n'est pas totalement claire pour l'instant, et nécessitera (une fois de plus) d'avoir une bonne définition de la dérivée.
L'idée est que si x n'est pas une borne de I, alors il faut connaître f «autour de x» et «des deux côtés de x» pour parler de sa dérivabilité en x.
Pensez par exemple à la valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0, mais dont la restriction à $\mathbf{R}_+$, qui est l'identité de $\mathbf{R}_+$ est dérivable en 0.

Solution de l'exercice 1.17

Il s'agit donc de prouver que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.
Prouvons plutôt la contraposée, qui est : $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$.
Si $\sqrt{x} \in \mathbf{Q}$, alors il existe deux entiers a et b, avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{x} = \dfrac{a}{b}$.
Notons a et b deux tels entiers.
Alors $x = (\sqrt{x})^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ est également le quotient de deux entiers, donc dans $\mathbf{Q}$.
Ainsi, on a bien prouvé que $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$, de sorte que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.

Solution de l'exercice 1.18

La proposition en question peut s'écrire :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, \ (x \in \mathbf{Q} \text{ et } y \notin \mathbf{Q}) \Rightarrow x + y \notin \mathbf{Q}.$$

Notons que $y \notin \mathbf{Q}$ signifie $\mathbf{non}(x \in \mathbf{Q})$.

Prouvons donc qu'elle est vraie en raisonnant par l'absurde, c'est-à-dire en prouvant que sa négation est vraie.
Autrement dit, en supposant :

$$\exists x, y \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{Q} \text{ et } y \notin \mathbf{Q} \text{ et } x + y \in \mathbf{Q}.$$

Soient alors x et y de tels nombres. On a alors $y = x + y - x$, qui est un rationnel puisque somme de deux rationnels.
Ceci vient contredire le fait que $y \notin \mathbf{Q}$.
Donc notre hypothèse de départ est fausse, si bien que la proposition de l'énoncé est vraie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.19

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls[16].
Alors $q\ln(2) = p\ln(3) \Leftrightarrow \ln(2^q) = \ln(3^p) \Leftrightarrow 2^q = 3^p$.
Mais 2^q est pair, alors que 3^p est impair, d'où une contradiction.
On en déduit que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$.

[16] Puisque $\ln(2) \neq 0$, il est raisonnable de supposer $p \neq 0$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.20

Supposons que $\alpha \in \mathbf{Q}$. Alors α^2 est encore dans $\mathbf{Q}$.
Or, $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Donc $\sqrt{6} = \dfrac{\alpha^2 - 5}{2}$ est un rationnel : il existe deux entiers p et q tels que la fraction $\dfrac{p}{q}$ soit irréductible et égale à $\sqrt{6}$.
Alors $\dfrac{p^2}{q^2} = 6 \Leftrightarrow 6q^2 = p^2$.
La suite de la preuve est alors la même que pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$: on montre que p est pair, puis que q est pair, contredisant l'irréductibilité de $\dfrac{p}{q}$.
Et donc notre hypothèse de départ est fausse : $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

De même, si $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}} \in \mathbf{Q}$, alors son carré $4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ est dans $\mathbf{Q}$ car produit de deux rationnels.
Donc $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ est rationnel[17], et donc son carré aussi : $3 + \sqrt{2}$ est rationnel. Donc $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est absurde !
On en déduit que $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$ est irrationnel.

[17] Car somme de rationnels.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.21

1. Procédons par analyse synthèse, et soit f une telle fonction. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, en prenant $y = 0$, il vient $f(0) = f(0) + f(x)$, donc $f(x) = 0$.
Par conséquent, f est la fonction nulle.

Inversement, il est clair que la fonction nulle satisfait à la relation donnée.
Et donc la fonction nulle est la seule fonction à satisfaire cette relation.
Remarque *: plus généralement, le même raisonnement prouve qu'une telle fonction ne peut pas être définie sur un ensemble contenant* 0.
En particulier, le $\ln$ *vérifie bien* $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$*, mais son ensemble de définition ne contient pas* 0 *!*

2. Supposons que f satisfasse $\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
Alors en prenant $x = y = 0$, il vient $f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0$.
Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
En prenant $x = 0$ et $y = 1$, il vient $f(0)f(1) - f(0) = 1$, donc $f(0) \neq 0$, de sorte que $f(0) = 1$.
On en déduit donc que $f(1) - 1 = 1 \Leftrightarrow f(1) = 2$.
Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)f(0) - f(0 \times x) = x \Leftrightarrow f(x) = 1 + x$.
Ainsi, la seule fonction susceptible de satisfaire les conditions de l'énoncé est la fonction $x \mapsto 1 + x$.

> ⚠ Attention !
> Nous n'avons procédé qu'à l'analyse : **si** une telle fonction existe, **alors** c'est $x \mapsto 1 + x$, mais la synthèse reste à faire, c'est-à-dire qu'il faut encore déterminer si cette fonction vérifie ou non la condition de l'énoncé.

Inversement, notons $f : x \mapsto 1 + x$. Alors pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$f(x)f(y) - f(xy) = (1 + x)(1 + y) - (1 + xy) = 1 + x + y + xy - 1 - xy = x + y.$$

Donc la fonction f satisfait bien aux conditions de l'énoncé.
On en déduit que la seule fonction vérifiant les conditions requises est $x \mapsto 1 + x$.

Solution de l'exercice 1.22

Reprenons l'énoncé qui figure dans le cours : soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

i) $\mathscr{P}(n_0)$ soit vraie

ii) $\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Le «soit» initial devient un $\forall$, et le «alors» nous donne une implication. Soit encore

$$\forall n_0 \in \mathbf{N},\ (\mathscr{P}(n) \wedge (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))) \Rightarrow (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n)).$$

Deux remarques :

- si vous n'aimez pas les expression du type $\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n)$, vous pouvez les remplacer[18] par
$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n).$$
- si vous contestez le $\forall n_0$ et y verriez plutôt un $\exists n_0$, regardons un instant la proposition suivante :
$$\exists n_0 \in \mathbf{N},\ (\mathscr{P}(n) \wedge (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))) \Rightarrow (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n)).$$
Premier soucis : elle affirme l'existence d'un entier n_0 tel que $\mathscr{P}(n_0)$ soit vraie. Que pourra-t-on dire de ce n_0 si par exemple on considère l'assertion $\mathscr{P}(n) : n > n+1$ (qui n'est jamais vraie ?).
Deuxième soucis : elle nous dit que le n_0 en question vérifie une implication $P \Rightarrow Q$ (ou ici $Q : \forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n)$).
Mais ceci ne nous dit pas forcément que Q est vraie, puisqu'il se peut que P soit fausse.

[18] Mais c'est moins joli...

Sur le même modèle, il est aisé d'énoncer le principe de récurrence double :

$$\forall n_0 \in \mathbf{N},\ ((\mathscr{P}(n_0) \wedge \mathscr{P}(n_0+1)) \wedge (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{P}(n+1) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2))) \Rightarrow (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n)).$$

Enfin, pour le principe de récurrence forte :

$$\forall n_0 \in \mathbf{N},\ (\mathscr{P}(n) \wedge (\forall n \geqslant n_0, (\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ \mathscr{P}(k)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))) \Rightarrow \forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n).$$

Solution de l'exercice 1.23

Commençons par chercher les plus petits scores possibles. Il s'agit évidemment de $0, 3, 5, 6 = 3+3, 7, 8 = 3+5, 9 = 3+3+3, 10 = 7+3, 11 = 3+3+5, 12 = 7+5 = 3+3+3+3$.
Il semble assez légitime de supposer que tous les scores à partir de 5 sont possibles, prouvons-le par récurrence.

Une option est d'utiliser une récurrence triple, en notant $\mathscr{P}(n)$ le prédicat «n est un score possible».
Qui s'écrit encore : $\exists a \in \mathbf{N}, \exists b \in \mathbf{N}, \exists c \in \mathbf{N},\ n = 3a+5b+7c$.
On a alors déjà prouvé que $\mathscr{P}(5), \mathscr{P}(6)$ et $\mathscr{P}(7)$ sont vraies.
Soit $n \geqslant 5$, et suposons $\mathscr{P}(n)$, $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ vraies.
Alors il existe trois entiers a, b, c tels que $n = 3a+5b+7c$. Et donc $n+3 = 3(a+1)+5b+7c$, si bien que $n+3$ est un score possible, et donc $\mathscr{P}(n+3)$ est vraie.
Par le principe de récurrence triple, pour tout $n \geqslant 5$, n est un score possible. Et donc les scores possibles sont $0, 3$ et tous les entiers supérieurs à 5.

Remarque
Pour être vraiment complet, il faudrait justifier que $1, 2$ et 4 ne sont pas des scores possibles. Contentons-nous de dire que c'est évident...

Alternative : notons que pour prouver $\mathscr{P}(n+3)$, nous avons seulement utilisé $\mathscr{P}(n)$, et pas $\mathscr{P}(n+1)$ ni $\mathscr{P}(n+2)$.
Plutôt qu'une récurrence triple, nous aurions pu utiliser trois récurrences simples : une pour prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $3n+5$ est un score possible, une pour prouver que les $3n+6$, $n \in \mathbf{N}^*$ sont possibles, et une pour prouver que les $3n+7$, $n \in \mathbf{N}^*$ sont possibles.
Si l'hérédité est la même[19] pour ces trois récurrences, il faut bien trois initialisations (pour $n = 5, 6, 7$), comme c'est le cas dans la récurrence triple proposée ci-dessus.

[19] Ajouter 3 à un score possible fournit encore un score possible.

Solution de l'exercice 1.24

Il s'agit de prouver que $\exists a, b \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = a(-1)^n + b2^n$.
Donc les réels a et b doivent être indépendants de n.

Si on prouve par récurrence la proposition $\mathscr{P}(n)$: $\exists a, b \in \mathbf{R},\ u_n = a(-1)^n + b2^n$, on prouvera alors que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \exists a, b \in \mathbf{R},\ u_n = a(-1)^n + b2^n.$$

Or si on l'écrit ainsi, a et b sont autorisés à dépendre de n, ce que l'on ne souhaite pas[20].

Procédons par analyse-synthèse.
Analyse : supposons qu'il existe bien deux réels a, b tels que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = a(-1)^n + b2^n$, et notons a, b deux tels réels a et b.
Alors en particulier[21], $1 = u_0 = a(-1)^0 + b2^0 = a + b$.
Et de même, $3 = u_1 = a(-1)^1 + b2^1 = -a + 2b$.

Donc $\begin{cases} a+b=1 \\ -a+2b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{4}{3} \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Ainsi, si deux tels réels existent, nous les avons uniquement déterminés.

Reste à faire la synthèse : il faut encore prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+2}\right)$.
Pour ce faire, procédons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$, en prouvant la propriété $\mathscr{P}(n) : u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+2}\right)$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est vrai (car nous avons tout fait pour !)
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies, c'est-à-dire que $u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+2}\right)$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^{n+3}\right)$. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n &= \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2(-1)^n + 2^{n+3} + 2\cdot 2^{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((-1)^n(2-1) + 2^{n+2}(2+2)\right) = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+2} + 2^{n+2+2}\right). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence double, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Méthode
Qui dit récurrence **double** dit initialisation **double**.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.25

Il s'agit donc de montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 = 1$.
Procédons par récurrence forte sur n. On a évidemment $u_0 = 1$, donc la récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $u_k = 1$.
Alors $u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(u_0^2 + \cdots + u_n^2\right) = \frac{1}{n+1}\left(1^2 + \cdots + 1^2\right) = \frac{1}{n+1}(n+1) = 1$.
Donc par le principe de récurrence **forte**, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1$.
Ainsi, la suite (u_n) est constante égale à 1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.26

Pour nous faire une idée, commençons par calculer les premiers termes de la suite. On a donc $u_0 = 0$, $u_1 = u_{0+1} = 2u_0 + 1 = 1$, $u_2 = u_{1+1} = u_1 + 1 = 2$, $u_3 = u_{2+1} = 2u_1 + 1 = 3$, etc.
Il est donc légitime de supposer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n$.
Prouvons donc par récurrence **forte** sur $n \in \mathbf{N}$ le prédicat : $\mathscr{P}(n) : u_n = n$.
Il est clair que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, donc notre récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $u_k = k$.
▶ Si n est pair, alors $u_{n+1} = 2u_{\frac{n}{2}} + 1 = 2\frac{n}{2} + 1 = n + 1$.
Et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

▶ Si n est impair, alors $u_{n+1} = u_n + 1 = n + 1$, et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Dans tous les cas, on a donc prouvé que $(\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(k)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
Par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n$.

⚠ Attention !
C'est ici que nous avons besoin d'une récurrence forte : pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, on n'utilise pas $\mathscr{P}(n)$, mais $\mathscr{P}(n/2)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.27

Le principe est exactement le même que dans l'exercice 23 : il faut initialiser pour $n = 8$, $n = 9$ et $n = 10$, puis faire soit une récurrence triple, soit trois récurrences simples, en notant que si $n = 3a + 5b$, alors $n + 3 = 3(a+1) + 5b$.

[20] Rappelons qu'on ne peut pas permuter comme on veut un quantificateur universel et un quantificateur existentiel.

[21] Pour $n = 0$.

Solution de l'exercice 1.28

Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n = n$.
Notons donc, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$: $u_n = n$
Initialisation : par le point i) il existe un entier p tel que $u_p = 0$.
Soit donc $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p = 0$.
Or, par le point ii) $u_p \geqslant p$, soit encore $0 \geqslant p$.
Puisque $p \geqslant 0$, on a donc $p = 0$, si bien que $u_0 = 0$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \dots, \mathscr{P}(n)$ soient vraies, c'est-à-dire telles que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u_k = k$.
Par le point i), il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p = n + 1$. Soit donc $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p = n + 1$.
Alors par *ii*), $u_p \geqslant p$, donc $n + 1 \geqslant p$, si bien que $p \in [\![0, n + 1]\!]$.
Mais par hypothèse, on a déjà $u_0 = 0 \neq n + 1$, $u_1 = 1 \neq n + 1, \dots, u_n = n \neq n + 1$.
Donc $p \geqslant n + 1$, si bien que par double inégalité $p = n + 1$.
Et donc $u_{n+1} = n + 1$, si bien que $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.

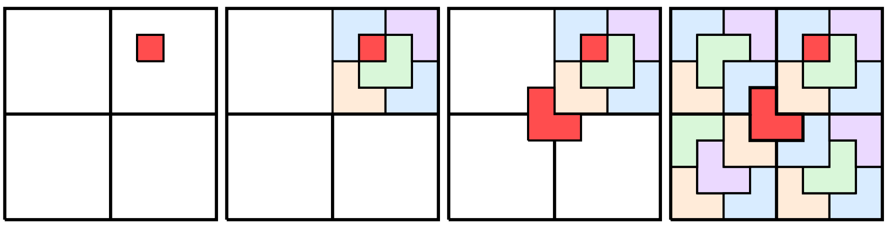
Donc par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n$.

Rédaction
Dans une récurrence forte, il faut faire apparaître **très clairement** que vous ne supposez pas seulement $\mathscr{P}(n)$ vraie, mais bien $\mathscr{P}(k)$ vraie pour $k \leqslant n$.

Solution de l'exercice 1.29

Nous allons raisonner par récurrence[22] sur n, et plus précisément prouver la proposition $\mathscr{P}(n)$: «pour tout échiquier de taille $2^n \times 2^n$, quelle que soit la position du monomino, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec des triominos».
Pour $n = 2$, ça se passe d'explications[23].
Supposons donc que l'on sache paver tout échiquier carré de côté 2^n privé d'une case à l'aide de triominos, et considérons un échiquier carré de côté 2^{n+1}, sur lequel se trouve déjà un monomino. Et procédons en plusieurs étapes[24].

- **Étape 1** : partageons l'échiquier en 4 échiquiers carrés de côté 2^n.
- **Étape 2** : Le monomino se trouve alors dans l'un de ces 4 sous-échiquiers. Par hypothèse de récurrence, on peut donc paver ce sous-échiquier avec des triominos.
- **Étape 3** : positionnons un triomino au centre de l'échiquier, de manière à ce qu'il intersecte les trois sous-échiquiers ne contenant pas le monomino.
- **Étape 4** : les trois sous-échiquiers restants ont alors une seule case occupée. Par hypothèse de récurrence, ils sont donc pavables par des triominos.
  Et donc quelle que soit la position de départ du monomino, l'échiquier de côté 2^{n+1} est pavable par des triominos.



Étape 1 **Étape** 2 **Étape** 3 **Étape** 4

Ainsi, $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie et donc par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n.

[22] Simple.

[23] Il n'y a que trois cases vides !

[24] Ces étapes sont illustrées sur la figure ci-dessous.