TD 1 : Logique

► Précisions sur le fonctionnement des TD

Tout au long de l'année, les exercices de TD seront accompagnés d'une lettre indiquant leur niveau de difficulté :

F Facile PD Peu difficile AD Assez difficile D Difficile TD Très difficile.

Une étoile ($\star$) indique une question plus difficile que le reste de l'exercice, et qui peut être laissée de côté dans un premier temps. N'oubliez pas **de lire les questions en entier**, et notamment les éventuelles indications qu'elles peuvent contenir.

► Logique

Exercice 1.1 Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication bien connue (parfois sous le nom de «règle du produit nul») $ab = 0 \Rightarrow (a = 0$ **ou** $b = 0)$. F
Pour chacune d'entre elles, donner sa valeur de vérité.

Exercice 1.2 Notons $P(x, y)$ la proposition «l'individu x a lu le livre y». Notons également E l'ensemble des élèves de MP2I, F l'ensemble des livres existants. F
Traduire par une phrase en français chacune des propositions suivantes (et si ça vous amuse, déterminer sa valeur de vérité).

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
3. $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
4. $\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
5. $\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, P(x, y)$
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y)$

Exercice 1.3 Un peu de bon sens (tâche de sélection de Wason) PD
On dispose de 4 cartes, toutes portant une lettre sur une face et un chiffre sur l'autre face.
On étale ces cartes sur une table, et les faces visibles sont alors $\boxed{M}\ \boxed{5}\ \boxed{2}\ \boxed{i}$
Quel est le nombre minimal de cartes à retourner pour s'assurer que la règle suivante est vérifiée : «toute carte qui possède une voyelle sur une face possède un nombre pair sur l'autre face» ?

Exercice 1.4 Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en le justifiant. Écrire également sa négation. PD

1. $\forall x \in \mathbf{R},\ \sqrt{x^2} = x$
2. $\forall x \in \mathbf{R},\ x \leqslant 2 \Rightarrow x^2 \leqslant 4$
3. $\exists x \in \mathbf{R}_+,\ x < \sqrt{x}$
4. $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ x < \sqrt{x}$
5. $\forall a, b \in \mathbf{Z},\ \exists u, v \in \mathbf{Z},\ au + bv = 1$
6. $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x < y$.

Exercice 1.5 Un ensemble A formé de nombres réels est dit minoré s'il vérifie : $\exists m \in \mathbf{R},\ \forall x \in A,\ m \leqslant x$. PD
Les ensembles suivants sont-ils minorés ? Justifier.

1. $\mathbf{R}_+^*$
2. $\mathbf{R}$
3. $[-1, 3]$
4. $\mathbf{Q}$
5. ($\star$) L'ensemble des irrationnels

Exercice 1.6 Permutation de quantificateurs AD
Soit $P(x, y)$ une proposition dépendant de deux variables, et soient E et F deux ensembles.
Montrer que $(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x, y))$. Que dire de la réciproque ?

Exercice 1.7 Soient P, Q, R trois propositions logiques. PD

1. Redémontrer que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à $\neg P \vee Q$. Retrouver la négation de $P \Rightarrow Q$.
2. Montrer que les assertions *i*) et *ii*) suivantes sont équivalentes : *i*) $(P \vee Q) \Rightarrow R$ *ii*) $(P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
3. Même question avec *i*) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ *ii*) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$

Exercice 1.8 PD

1. Donner la négation, ainsi que la valeur de vérité de la proposition suivante

$$\forall a \in \left]-\pi, \pi\right[,\ \left(\cos(a) > 0 \Rightarrow a \in \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[\right).$$

2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont-elles équivalentes ? L'une implique-t-elle l'autre ?

(a) $\forall t \in \mathbf{R}, (f(t) > 0$ **ou** $f(t) < 0))$ (b) $(\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) > 0)$ **ou** $(\forall t \in \mathbf{R}, f(t) < 0)$.

Exercice 1.9 PD

1. Montrer que $\forall a \in [0,1],\ \exists b \in \mathbf{R},\ a = \cos b$.
2. En déduire que $\forall t \in [0,2],\ \exists x, y \in \mathbf{R},\ t = \cos x + \sin y$.

Exercice 1.10 Soit x un réel. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon) \Rightarrow x = 0$. AD

Exercice 1.11 Montrer que $\forall x, y \in \mathbf{R},\ x + y > 2 \Rightarrow (x > 1$ **ou** $y > 1)$. AD
Écrire également la négation de cette proposition, ainsi que la réciproque de l'implication qu'elle contient. Cette réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.12 Soit $p \in \mathbf{N}^*$ un entier naturel. Écrire sous forme quantifiée l'assertion «p est un nombre premier». AD

Exercice 1.13 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Montrer que PD

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right) \Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbf{R},\ f(u+v) + f(u-v) = 2f(u)f(v).$$

Exercice 1.14 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes : PD

1) $\exists y_0 \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = y_0$
2) $\forall x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{R}, f(x) = f(y)$

Que signifient ces deux assertions ?

Exercice 1.15 Prouver l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbf{R}, (x \notin \mathbf{Q}$ **ou** $\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z})$. PD

Exercice 1.16 Déterminer l'ensemble des réels x tels que le prédicat suivant soit vrai : AD

$$\forall t \in [0,1],\ x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t.$$

Exercice 1.17 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction. Déterminer toutes les implications existant entre les quatre assertions suivantes (par exemple $i) \Rightarrow iii)$ ou $iv) \Rightarrow ii)$), et justifier. D

i) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$
ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < 2\varepsilon$
iii) $\exists A \in \mathbf{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.
iv) $\forall \varepsilon > 0,\ \forall k \in \mathbf{R}_+^*, \exists A \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < k\varepsilon$.

► Raisonnements divers

Exercice 1.18 Soit x un irrationnel strictement positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est irrationnel. F

Exercice 1.19 Écrire avec des quantificateurs la proposition «la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel», et prouver qu'elle est vraie. PD

Exercice 1.20 Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$. PD

Exercice 1.21 Le réel $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ? Même question pour $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$. PD

Exercice 1.22 AD

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que $\forall x \in \mathbf{R},\ \forall y \in \mathbf{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.

Exercice 1.23 Donner sous forme d'une seule assertion quantifiée (avec des quantificateurs et des connecteurs logiques) l'énoncé du principe de récurrence simple. Même question pour les principes de récurrence double et forte. PD

Exercice 1.24 Au rugby, une équipe peut marquer 3 points (drop ou pénalité), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai tranformé). AD
Déterminer l'ensemble des scores possibles.

Exercice 1.25 **Une suite récurrente linéaire d'ordre** 2 AD
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = a(-1)^n + b2^n$.

Exercice 1.26 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)$. PD
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante.

Exercice 1.27 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, AD

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 1.28 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'entiers naturels (ce qui signifie que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \in \mathbf{N}$) vérifiant les deux assertions suivantes : D

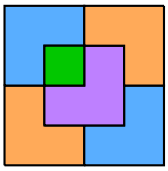
i) $\forall p \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N}, u_n = p$

ii) $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant n$.

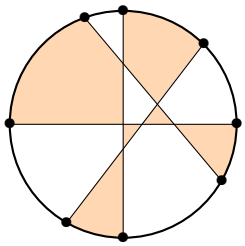
Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = n$.

Exercice 1.29 **Un peu de Tétris** TD

On dispose d'un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ ($n \geqslant 2$), que l'on souhaite remplir à l'aide d'un monomino (pièce carrée de taille 1×1 : □) et de triominos coudés □□□.
Montrer que quelle soit la position du monomino sur l'échiquier, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec les triominos, comme sur la figure ci-contre.



Exercice 1.30 Si on coupe un cercle à l'aide de n cordes distinctes, quel est le nombre maximal de régions du disque délimitées par ces cordes ? TD
Par exemple sur la figure ci-contre, où $n = 4$, il y a 11 telles régions.



Correction des exercices du TD 1

Solution de l'exercice 1.1

Commençons par remarquer que l'implication de l'énoncé est vraie, au moins lorsque a et b sont des nombres réels ou complexes.

Sa négation est $ab = 0$ **et** $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$.
En tant que négation d'une proposition vraie, elle est fausse.

> **Rappel**
> La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

La contraposée est ($a \neq 0$ **et** $b \neq 0$) $\Rightarrow ab \neq 0$.
Puisqu'elle a même valeur de vérité que l'implication de départ, elle est vraie.

Enfin la réciproque est ($a = 0$ **ou** $b = 0$) $\Rightarrow ab = 0$, qui est vraie[1], ce qui signifie que l'implication de départ est en fait une équivalence.

[1] Mais ceci n'est pas lié au fait que l'implication de départ soit vraie.

Solution de l'exercice 1.2

1. Tout le monde a lu tous les livres.[2]
2. Tout le monde a lu au moins un livre.[3]
3. Il existe un étudiant qui a lu au moins un livre.
4. Il existe un livre qui a été lu par au moins un étudiant. C'est la même chose que la précédente : on peut permuter deux quantificateurs existentiels.
5. Il existe un étudiant qui a lu tous les livres.[4].
6. Tout livre a été lu par au moins un étudiant.
7. Il existe un livre que tous les étudiants ont lu.[5]

[2] Faux : avez vous tous lu le dernier Guillaume Musso ?

[3] J'espère que oui !

[4] Permettez-moi d'en douter !

[5] Vrai : *Le temps de l'innocence.*

Solution de l'exercice 1.3

Remarquons que la règle énoncée n'est rien d'autre qu'une implication, à savoir «**si** une carte possède une voyelle sur une face, **alors** elle possède un nombre pair sur l'autre».
Notons donc A l'assertion «porter une voyelle sur une face», et B l'assertion «porter un nombre pair sur une face», de sorte que l'implication annoncée est $A \Rightarrow B$. Il faut évidemment retourner la carte portant un i, afin de s'assurer qu'elle ne porte pas un numéro impair au verso.
Il est inutile de retourner la carte M, car ne portant pas une voyelle, son verso ne nous intéresse pas.
De même, la carte 2 n'est pas à retourner, que son verso porte une voyelle ou une consonne, elle ne pourra pas contredire la règle.
Enfin, il faut retourner la carte 5, afin de s'assurer que son verso ne porte pas une voyelle, ce qui contredirait la règle.

> **Rappel**
> Si A est faux, alors $A \Rightarrow B$ est toujours juste.

Cette fois, nous utilisons le fait que si B est vrai, alors $A \Rightarrow B$ est vrai.

Donc le nombre minimal de cartes à retourner est 2, et ces deux cartes sont $\boxed{5}$ et $\boxed{i}$

Ce problème a été posé en 1960 par le psychologue américain Peter Wason. Environ 80% des personnes interrogées donnent une réponse incorrecte.

Solution de l'exercice 1.4

Remarquons tout de suite que pour nier une proposition du type $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$, il suffit d'exhiber un contre exemple, c'est-à-dire montrer l'existence d'un élément $x \in E$ tel que **non** $\mathscr{P}(x)$.
En d'autres termes, on prouve $\exists x \in E$, **non** $\mathscr{P}(x)$, qui est la négation de $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$.

1. **Faux**. En effet, pour $x = -1$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}$, $x \neq \sqrt{x^2}$ (ce qui est par exemple vrai pour $x = -1$).
2. **Faux**. Pour $x = -3$, on a $x \leqslant 2$ et pourtant $x^2 = 9 > 4$.
   Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}$, $x \leqslant 2$ **et** $x^2 > 4$.
3. **Vrai**. $x = \dfrac{1}{4}$ convient, puisque $\sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$ qui est bien plus grand que $\dfrac{1}{4}$.
   Sa négation est $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $x \geqslant \sqrt{x}$.

> **Plus généralement**
> Cette proposition est fausse pour tout $x < 0$.

> **Rappel**
> La négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).

4. **Faux**. Pour $x = 1$, on a $x = \sqrt{x}$.
Sa négation est $\exists x \in \mathbf{R}_+^*,\ x \geqslant \sqrt{x}$.
5. **Faux**. Si $a = b = 0$, alors, quels que soient u et v dans $\mathbf{Z}$, $au + bv = 0$.
Sa négation est $\exists a, b \in \mathbf{Z},\ \forall u, v \in Z,\ au + bv \neq 1$.
6. **Faux**. Notons que cette assertion signifie qu'il existe un réel y supérieur à tous les autres réels, ce qui est évidemment faux. Pour le prouver rigoureusement, nous pouvons par exemple raisonner par l'absurde et supposer qu'un tel réel y existe.
Alors en prenant $x = y$, il vient $y < y$, ce qui est absurde.

La négation de cette proposition est $\forall y \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ x \geqslant y$, et elle est donc vraie.
Nous aurions pu prouver directement[6] cette négation de la manière suivante : soit $y \in \mathbf{R}$, posons $x = y$. Alors $x \leqslant y$.

Remarque
Si vous avez quelques souvenirs d'arithmétique, vous aurez sûrement reconnu le théorème de Bézout : $\exists u, v \in \mathbf{Z},\ au + bv = 1$ est vrai si et seulement si a et b sont premiers entre eux.
Or il est faux que pour tout $a, b \in \mathbf{Z}$, a et b sont premiers entre eux.

[6] Donc sans utiliser de raisonnement par l'absurde, même si l'argument est essentiellement le même que dans la preuve par l'absurde que nous venons de donner.

Solution de l'exercice 1.5

1. $\mathbf{R}_+^*$ est minoré car si on pose $m = 0$, alors $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ 0 \leqslant x$.
2. $\mathbf{R}$ n'est pas minoré. En effet, la négation de «$\mathbf{R}$ est minoré» est $\forall m \in \mathbf{R},\ \exists x \in \mathbf{R},\ m > x$.
Prouvons que cette proposition est vraie : soit $m \in \mathbf{R}$, et posons $x = m - 1$. Alors $m > x$.
3. $[-1, 3]$ est minoré, car pour tout $x \in [-1, 3]$, $-1 \leqslant x$.
4. $\mathbf{Q}$ n'est pas minoré, par exemple car $\mathbf{Z}$ n'est pas minoré.
En effet, pour tout réel $m \in \mathbf{R}$, il existe $x \in \mathbf{Z}$ tel que $x < m$.
Ce qui prouve que m n'est pas un minorant de $\mathbf{Q}$, et donc qu'il n'existe pas de minorant de $\mathbf{Q}$.
5. L'ensemble $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ des irrationnels n'est pas minoré.
En effet, soit $m \in \mathbf{R}$, prouvons que m n'est pas un minorant de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
Puisque $m + \sqrt{2} \in \mathbf{R}$, par la question précédente, il existe $q \in \mathbf{Q}$ tel que $q < m + \sqrt{2}$. Et donc $q - \sqrt{2} < m$.
Mais $q - \sqrt{2}$ est un irrationnel car somme d'un rationnel et d'un irrationnel, et donc m n'est pas un minorant de $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Détails
Ce résultat peut vous paraître évident (et nous allons pour l'instant faire comme si c'était le cas) : on peut par exemple prendre $m = \lfloor x \rfloor - 1$), mais il aura besoin d'être prouvé plus tard dans l'année.

Solution de l'exercice 1.6

Supposons que $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x, y)$.
Notons alors x_0 un élément de E tel que $\forall y \in F,\ P(x_0, y)$.
Soit $y \in F$. Alors $P(x_0, y)$ est vraie.
Et donc $\exists x \in E,\ P(x, y)$ est vraie (car on peut prendre $x = x_0$).
Et par conséquent, nous venons de prouver que $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x, y)$.
Nous venons donc bien de prouver que

$$(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ P(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ P(x, y)).$$

En revanche, la réciproque est fausse, puisque $\forall x \in \mathbf{R},\ \exists y \in \mathbf{R},\ x \leqslant y$ est vraie[7], alors que $\exists y \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \leqslant y$ est fausse[8].
Commentaires : *nous avons dit en cours qu'il n'était pas toujours permis de permuter les symboles $\forall$ et $\exists$.*
Nous venons donc de prouver que si $\exists\forall$ est vraie, alors $\forall\exists$ est vraie aussi, mais la réciproque est fausse ! Et donc on n'a toujours pas le droit de permuter sans précaution les symboles $\forall$ et $\exists$.

[7] Pour tout réel, il existe un réel plus grand.
[8] Il n'existe pas de réel plus grand que tous les réels.

Solution de l'exercice 1.7

Il suffit de faire des tables de vérité.

1.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P$	$(\neg P) \vee Q$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On en déduit que la négation de $P \Rightarrow Q$ est

$$\neg(P \Rightarrow Q) \equiv \neg((\neg P) \vee Q) \equiv \neg(\neg P) \wedge \neg Q \equiv P \wedge (\neg Q).$$

2. Il serait possible de dresser des tables de vérité, mais préférons utiliser ce qui précède :

$$(P \vee Q) \Rightarrow R \equiv \textbf{non}(P \textbf{ ou } Q) \textbf{ ou } R \equiv (\textbf{non } P \textbf{ et non } Q) \textbf{ ou } R \equiv (\textbf{non } P \textbf{ ou } R) \textbf{ et } (\textbf{non } Q \textbf{ ou } R).$$

Mais $P \Rightarrow R \equiv$ **non** P **ou** R et $Q \Rightarrow R \equiv$ **non** Q **ou** R, et donc

$$(P \Rightarrow Q) \textbf{ et } (Q \Rightarrow R) \equiv ((\textbf{non } P \textbf{ ou } R)) \textbf{ et } (\textbf{non } Q \textbf{ ou } R).$$

On a donc bien

$$(P \textbf{ ou } Q) \Rightarrow R \equiv (P \Rightarrow R) \textbf{ et } (Q \Rightarrow R).$$

3. Montrons que $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ et $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ ont même table de vérité.

P	Q	R	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	$(P \wedge Q)$	$(P \wedge Q) \Rightarrow R$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Là aussi, il aurait été possible d'utiliser la question 1 :

$$P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (\neg P \vee (Q \Rightarrow R)) \equiv (\neg P \vee (\neg Q \vee R)) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R.$$

Sur le même principe, $(P \wedge Q) \Rightarrow R \equiv (\neg(P \wedge Q) \vee R) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q) \vee R$.
Et donc $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.8

1. La négation en est $\exists a \in]-\pi, \pi[, \cos(a) > 0$ **et** $a \notin \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.
Or cette négation est fausse, puisqu'il est bien connu que pour $a \in]-\pi, \pi[, \cos(a) > 0 \Leftrightarrow a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Donc pour $a \in]-\pi, \pi[$, si $\cos(a) > 0$, alors $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\subset \left]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$.

Puisque la négation est fausse, la proposition de départ est vraie.

2. Ces assertions ne sont pas équivalentes.
Prenons par exemple f la fonction définie par $f(x) = (-1)^{\lfloor x \rfloor}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x) = 1$ **ou** $f(x) = -1$, et donc l'assertion (a) est vérifiée par f.
En revanche, $f(1) = -1$ et $f(2) = 1$, si bien que l'assertion (b) n'est pas vérifiée par f.
Donc l'implication $(a) \Rightarrow (b)$ est fausse.
En français : (a) signifie que f ne s'annule jamais, et (b) signifie que f ne s'annule jamais et reste de signe constant sur $\mathbf{R}$.

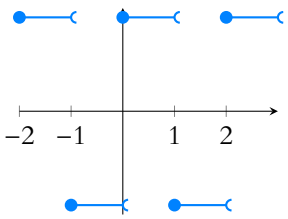


FIGURE 1.1– La fonction f.

Prouvons que $(b) \Rightarrow (a)$.
À cet effet, supposons que $(\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) > 0)$ **ou** $(\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) < 0)$.
Alors il y a deux cas de figure :
▸ soit $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) > 0$. Et alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(f(t) > 0$ **ou** $f(t) < 0)$.
▸ soit $\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) < 0$. Et alors de même, $\forall t \in \mathbf{R}$, $(f(t) > 0$ **ou** $f(t) < 0)$.
Donc on a bien $(b) \Rightarrow (a)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.9

1. La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est continue[9] sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et vérifie $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $a \in [0, 1]$, il existe $b \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $a = f(b) = \cos(b)$.

[9] Car dérivable.

2. Soit $t \in [0, 2]$.
▸ **Si** $t \leqslant 1$, alors $t = t + 0 = t + \sin(0)$.
Notons x un réel tel que $t = \cos(x)$, réel dont l'existence est garantie par la question précédente.
Si on pose $y = 0$, on a alors bien $t = \cos x + \sin y$.
▸ **Si** $t > 1$, alors $t - 1 \in [0, 1]$.
Soit alors $b \in \mathbf{R}$ tel que[10] $t - 1 = \cos b$. Alors $t = \cos b + 1 = \cos b + \sin \frac{\pi}{2}$.
Et donc il existe deux réels $x = b$ et $y = 0$ tels que $t = \cos x + \sin y$.

[10] Encore une fois, l'existence d'un tel b est garantie par la question précédente.

Alternative : soit $t \in [0, 2]$. Alors $\dfrac{t}{2} \in [0, 1]$.
Et alors par la question précédente, il existe $b \in \mathbf{R}$ tel que $\frac{t}{2} = \cos(b)$.

Considérons un tel b, de sorte que $\frac{t}{2} = \cos(b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$.
Alors en posant $x = b$ et $y = \frac{\pi}{2} - b$, on a

$$\cos(x) + \sin(y) = \cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cos(b) + \cos(b) = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t.$$

Solution de l'exercice 1.10

Il s'agit de prouver une implication, nous pouvons donc prouver sa contraposée.
Celle-ci est $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon)$.
Soit donc x non nul. Alors $|x| > 0$. Et par conséquent, $\varepsilon = |x|$ est bien un réel strictement positif tel que $|x| \geqslant \varepsilon$.
Ainsi, nous venons de prouver que

$$(x \neq 0) \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon).$$

Et donc sa contraposée, qui est notre proposition de départ est également vraie.
Rappel *: une implication et sa contraposée ont la même valeur de vérité. On ne confondra pas la contraposée avec la négation et/ou la réciproque.*

Une autre solution : l'idée est la même que précédemment, mais en revenant à la définition de l'implication : $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
Autrement dit, il s'agit de prouver que pour $x \in \mathbf{R}$, $(\exists \varepsilon > 0, |x| \geqslant \varepsilon)$ **ou** $x = 0$.
Si $x = 0$, il n'y a rien à dire.
Et si $x \neq 0$, alors en posant $\varepsilon = |x|$, on a $\varepsilon > 0$ et $|x| \geqslant \varepsilon$, donc $\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon$.
Et donc on a bien $(\exists \varepsilon > 0,\ |x| \geqslant \varepsilon)$ **ou** $x = 0$.
Et ainsi, on a bien l'implication annoncée.

Solution de l'exercice 1.11

Soient x, y deux réels. Nous allons prouver la contraposée de l'implication annoncée, c'est-à-dire que $(x \leqslant 1$ **et** $y \leqslant 1) \Rightarrow x + y \leqslant 2$.
Mais cette implication est évidente par somme d'inégalités.
Et donc[11] l'implication de départ est vraie.

[11] Une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité.

La négation de cette proposition est donc

$$\exists x, y \in \mathbf{R},\ x + y > 2 \textbf{ et } x \leqslant 1 \textbf{ et } y \leqslant 1.$$

Enfin, l'implication réciproque est $(x > 1$ **ou** $y > 1) \Rightarrow x + y > 2$.
Elle n'est généralement pas vraie, comme le prouve le cas $x = 2, y = 0$.

Solution de l'exercice 1.12

Rappelons qu'un premier est un entier naturel qui n'est divisible que par 1 et par lui-même, et qui n'est pas égal à 1.
Il va donc falloir écrire de manière quantifiée la proposition «n divise p», où n et p sont deux entiers.
C'est assez aisé, il s'agit de $\exists q \in \mathbf{N},\ p = nq$.

Et donc l'assertion p est premier s'écrit

$$(p \neq 1) \wedge (\forall n \in \mathbf{N},\ (\exists q \in \mathbf{N},\ p = nq) \Rightarrow (n = p \vee n = 1))$$

Notons qu'une autre formulation possible[12] est

$$(p \neq 1) \wedge \big(\forall m \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N}, p = mn \Rightarrow (n = 1 \vee m = 1)\big).$$

[12] Vous pouvez essayer de prouver que ces deux propositions sont équivalentes.

Solution de l'exercice 1.13

Supposons donc que pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right)$, et soient u, v deux réels. Posons $x = u + v$ et $y = u - v$.
On a alors $\frac{x+y}{2} = \frac{u+v+u-v}{2} = u$ et $\frac{x-y}{2} = v$.
Et donc $f(u+v) + f(u-v) = f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right) = 2f(u)f(v)$.
Ceci prouve donc l'implication

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(x)+f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) f\left(\frac{x-y}{2}\right) \Rightarrow \forall u, v \in \mathbf{R},\ f(u+v)+f(u-v) = 2f(u)f(v).$$

Inversement, supposons que $\forall u, v \in \mathbf{R},\ f(u+v)+f(u-v)=2f(u)f(v)$, et soient x, y deux réels.
Posons alors $u=\dfrac{x+y}{2}$ et $v=\dfrac{x-y}{2}$, de sorte que $u+v=x$ et $u-v=y$. Alors

$$f(x)+f(y)=f(u+v)+f(u-v)=2f(u)f(v)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Et donc l'implication réciproque est bien prouvée, ce qui achève de montrer l'équivalence annoncée.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.14

Nous allons raisonner par double implication, c'est-à-dire prouver que 1) $\Rightarrow$ 2) et 2 $\Rightarrow$ 1).

$\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Supposons donc 1) vérifiée, et soit $y_0 \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=y_0$.
Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Alors $f(x)=y_0=f(y)$, et donc 2) est vraie.

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Supposons à présent que 2) soit vraie, et posons $y_0=f(0)$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $f(x)=f(0)=y_0$.
Nous avons donc bien prouvé que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x)=y_0$, si bien que 1) est vraie.

Ces deux propositions signifient que f est constante[13].

[13] Et donc l'une ou l'autre peut être prise comme définition de «f est constante».

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.15

Soit $x \in \mathbf{R}$. Raisonnons par disjonction de cas :
- si $x \notin \mathbf{Q}$, alors l'assertion ($x \notin \mathbf{Q}$ **ou** $\exists n \in \mathbf{N}^*, nx \in \mathbf{Z}$) est évidemment vraie.

- Si $x \in \mathbf{Q}$, notons alors $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $x=\frac{p}{q}$.
Et donc $qx=p \in \mathbf{Z}$. Ainsi, la proposition $\exists n \in \mathbf{N}^*,\ nx \in \mathbf{Z}$ est vraie.
Donc la proposition $x \notin \mathbf{Q}$ **ou** ($\exists n \in \mathbf{N}^*,\ nx \in \mathbf{Z}$) l'est aussi.

Détails
C'est la définition même d'un rationnel.

Nous avons donc prouvé que quel que soit $x \in \mathbf{R}$, $x \notin \mathbf{Q}$ **ou** ($\exists n \in \mathbf{N}^*,\ nx \in \mathbf{Z}$) est vraie.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.16

Pour $x \in \mathbf{R}$, notons $\mathscr{P}(x)$ le prédicat de l'énoncé : $\forall t \in [0,1],\ x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$.
Nous allons distinguer quatre cas.

- Si $x \geqslant 2$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $x \geqslant t$ et $x \geqslant 2 \geqslant 2t$, si bien que $\mathscr{P}(x)$ est vrai.
- Si $x \in]0,2[$, alors $\frac{x}{2} \in]0,1[$. Soit alors $t \in \left]\frac{x}{2},1\right[$. Alors $x \geqslant t$ et $t > \frac{x}{2}$, donc $x < 2t$.
Par conséquent, $x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$ est fausse, et donc $\mathscr{P}(x)$ est fausse.
- Si $x=0$, alors pour $t \in [0,1]$, deux cas de figure se présentent : soit $t=0$, et alors $x \geqslant t$ et $x \geqslant 2t$ sont vraies, si bien que l'implication $x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$ est vraie.
Soit $t>0$, et alors $x \geqslant t$ est fausse, donc l'implication $x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$ est vraie.
Donc $\mathscr{P}(x)$ est vraie.
- Enfin, si $x<0$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $x \geqslant t$ est fausse, donc l'implication $x \geqslant t \Rightarrow x \geqslant 2t$ est vraie. Et par conséquent $\mathscr{P}(x)$ est vraie.

Détails
On peut par exemple prendre $t=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+1\right)$, le milieu du segment $\left[\frac{x}{2},1\right]$.

En résumé, l'ensemble des réels x tels que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie est $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.17

Commençons par prouver que $i) \Rightarrow ii)$.
Supposons donc que $\forall \varepsilon>0, \exists A \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$.
Soit alors $\varepsilon>0$., et soit $A \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)|<\varepsilon$. Notons qu'un tel A existe par hypothèse.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \geqslant A$. Alors $|f(x)|<\varepsilon<2\varepsilon$.
Donc nous venons bien de prouver que $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)|<2\varepsilon$.
Et donc $\exists A \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)|<2\varepsilon$.
Et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, nous avons donc prouvé

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)|<2\varepsilon$$

ce qui est l'assertion ii).

Prouvons que la réciproque est également vraie, à savoir que $ii) \Rightarrow i)$.
Supposons donc que $\forall \varepsilon>0,\ \exists A \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)|<2\varepsilon$.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Puisque $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, par hypothèse il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < 2\frac{\varepsilon}{2}$.
Considérons alors un tel A. Alors $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$, si bien qu'on a prouvé

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

Remarque : ces deux assertions, qui sont équivalentes, signifient toutes deux que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, ce que nous expliquerons plus tard dans l'année (ce sera en fait la **définition** de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$).

La proposition iii) est très semblable à la i), si ce n'est qu'un quantificateur existentiel et un quantificateur universel ont été inversés.
Comme expliqué dans l'exercice 6, on a donc $iii) \Rightarrow i)$.
Reprouvons-le, et supposons qu'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Remarque

Ce n'est pas demandé ici, mais cette assertion signifie en fait que f est la fonction nulle.

Considérons un tel A, et soit alors $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on a donc $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.
Et donc en particulier, $\exists A \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.
Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc prouvé que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Puisque $i)$ et $ii)$ sont équivalentes, on a également $iii) \Rightarrow ii)$.

En revanche, l'implication $iii) \Rightarrow i)$ est fausse.
Prenons par exemple la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$, et justifions qu'elle vérifie l'assertion $i)$ mais pas l'assertion $iii)$..
Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a

$$|f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-x} < \varepsilon \Leftrightarrow -x < \ln(\varepsilon) \Leftrightarrow x > -\ln(\varepsilon).$$

Donc en particulier, si on pose $A = -\ln(\varepsilon) + 1$, alors pour tout $x \geqslant A$, $x > -\ln(\varepsilon)$, et donc $|f(x)| < \varepsilon$.
Ainsi, f vérifie bien $i)$.
Pour prouver que f ne vérifie pas $iii)$, prouvons qu'elle vérifie sa négation, à savoir

$$\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \exists x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \textbf{ et } |f(x)| \geqslant \varepsilon.$$

Soit donc $A \in \mathbf{R}$, et posons $\varepsilon = e^{-A}$ et $x = A$. Alors il est évident que $x \geqslant A$, et $|f(x)| = f(x) = e^{-A} \geqslant \varepsilon$.
Nous avons donc bien prouvé que $\forall A \in \mathbf{R},\ \exists \varepsilon > 0, \exists x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A$ **et** $|f(x)| < \varepsilon$, et donc la négation de $iii)$ est vraie, si bien que $iii)$ est fausse.
Donc l'implication $i) \Rightarrow iii)$ est fausse.

Puisque $ii)$ et $i)$ sont équivalentes, $ii) \Rightarrow iii)$ est fausse aussi.

Prouvons que $iv) \Rightarrow i)$.
Soit donc f vérifiant $iv)$, et soit $\varepsilon > 0$.
Alors en prenant $k = 1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$, si bien que $i)$ est vraie.

Prouvons enfin que $i) \Rightarrow iv)$.
Soit f vérifiant $i)$ et soient $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbf{R}_+^*$.
Alors $k\varepsilon > 0$, si bien que par $i)$, il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < k\varepsilon$.
Ceci étant vrai quels que soient les réels strictement positifs ε et k, nous venons donc de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall k \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists A \in \mathbf{R},\ \forall x \in \mathbf{R},\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x)| < k\varepsilon.$$

Et donc $i) \Rightarrow iv)$.

Puisque $i) \Leftrightarrow ii)$, on a également $ii) \Rightarrow iv)$ et $iv) \Rightarrow ii)$.
Et de même, $i) \Leftrightarrow iv)$, si bien qu'on n'a pas $iv) \Rightarrow iii)$.

Solution de l'exercice 1.18

Il s'agit donc de prouver que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.
Prouvons plutôt la contraposée, qui est : $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$.
Si $\sqrt{x} \in \mathbf{Q}$, alors il existe deux entiers a et b, avec $b \neq 0$, tels que $\sqrt{x} = \dfrac{a}{b}$.
Notons a et b deux tels entiers.
Alors $x = (\sqrt{x})^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ est également le quotient de deux entiers, donc dans $\mathbf{Q}$.
Ainsi, on a bien prouvé que $\sqrt{x} \in \mathbf{Q} \Rightarrow x \in \mathbf{Q}$, de sorte que $x \notin \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{x} \notin \mathbf{Q}$.

Solution de l'exercice 1.19

La proposition en question peut s'écrire :

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ (x \in \mathbf{Q} \textbf{ et } y \notin \mathbf{Q}) \Rightarrow x + y \notin \mathbf{Q}.$$

Notons que $y \notin \mathbf{Q}$ signifie $\textbf{non}(x \in \mathbf{Q})$.

Prouvons donc qu'elle est vraie en raisonnant par l'absurde, c'est-à-dire en supposant que sa négation est vraie.
Autrement dit, en supposant :

$$\exists x, y \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{Q} \textbf{ et } y \notin \mathbf{Q} \textbf{ et } x + y \in \mathbf{Q}.$$

Soient alors x et y de tels nombres. On a alors $y = (x + y) - x$, qui est un rationnel puisque différence de deux rationnels.
Ceci vient contredire le fait que $y \notin \mathbf{Q}$.
Donc notre hypothèse de départ est fausse, si bien que la proposition de l'énoncé est vraie.

Solution de l'exercice 1.20

Raisonnons par l'absurde et supposons que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)} = \dfrac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers naturels non nuls[14].
Alors $q\ln(2) = p\ln(3)$, donc $\ln(2^q) = \ln(3^p)$ et ainsi $2^q = 3^p$.
Mais 2^q est pair, alors que 3^p est impair, d'où une contradiction.
On en déduit que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3} \notin \mathbf{Q}$.

[14] Puisque $\ln(2) \neq 0$, il est raisonnable de supposer $p \neq 0$.
Et puisque $\ln(2)$ et $\ln(3)$ sont tous deux positifs, on peut supposer p et q positifs.

Solution de l'exercice 1.21

Supposons que $\alpha \in \mathbf{Q}$. Alors α^2 est encore dans $\mathbf{Q}$.
Or, $\alpha^2 = 5 + 2\sqrt{6}$. Donc $\sqrt{6} = \dfrac{\alpha^2 - 5}{2}$ est un rationnel : il existe deux entiers p et q tels que la fraction $\dfrac{p}{q}$ soit irréductible et égale à $\sqrt{6}$.
Alors $\dfrac{p^2}{q^2} = 6 \Leftrightarrow 6q^2 = p^2$.
La suite de la preuve est alors la même que pour l'irrationalité de $\sqrt{2}$: on montre que p est pair, puis que q est pair, contredisant l'irréductibilité de $\dfrac{p}{q}$.
Et donc notre hypothèse de départ est fausse : $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

De même, si $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}} \in \mathbf{Q}$, alors son carré $4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ est dans $\mathbf{Q}$ car produit de deux rationnels.
Donc $\sqrt{3 + \sqrt{2}}$ est rationnel[15], et donc son carré aussi : $3 + \sqrt{2}$ est rationnel. Donc $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est absurde !
On en déduit que $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$ est irrationnel.

[15] Car somme de rationnels.

Solution de l'exercice 1.22

1. Procédons par analyse synthèse, et soit f une telle fonction. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, en prenant $y = 0$, il vient $f(0) = f(0) + f(x)$, donc $f(x) = 0$.
Par conséquent, f est la fonction nulle.

Inversement, il est clair que la fonction nulle satisfait à la relation donnée.
Et donc la fonction nulle est la seule fonction à satisfaire cette relation.

Remarque *: plus généralement, le même raisonnement prouve qu'une telle fonction ne peut pas être définie sur un ensemble contenant* 0.
En particulier, le logarithme vérifie bien $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$*, mais son ensemble de définition ne contient pas* 0 *!*

2. Supposons que f satisfasse $\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(x)f(y) - f(xy) = x + y$.
Alors en prenant $x = y = 0$, il vient $f(0)^2 - f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0$.
Donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
En prenant $x = 0$ et $y = 1$, il vient $f(0)f(1) - f(0) = 1$, donc $f(0) \neq 0$, de sorte que $f(0) = 1$.
Et donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x)f(0) - f(0 \times x) = x$ si bien que $f(x) = 1 + x$.
Ainsi, la seule fonction susceptible de satisfaire les conditions de l'énoncé est la fonction $x \mapsto 1 + x$.

> ⚠ **Attention !**
> Nous n'avons procédé qu'à l'analyse : **si** une telle fonction existe, **alors** c'est $x \mapsto 1 + x$, mais la synthèse reste à faire, c'est-à-dire qu'il faut encore déterminer si cette fonction vérifie ou non la condition de l'énoncé.

Inversement, notons $f : x \mapsto 1 + x$. Alors pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$f(x)f(y) - f(xy) = (1 + x)(1 + y) - (1 + xy) = 1 + x + y + xy - 1 - xy = x + y.$$

Donc la fonction f satisfait bien aux conditions de l'énoncé.
On en déduit que la seule fonction vérifiant les conditions requises est $x \mapsto 1 + x$.

Solution de l'exercice 1.23

Reprenons l'énoncé qui figure dans le cours : soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

i) $\mathscr{P}(n_0)$ soit vraie

ii) $\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Le «soit» initial devient un $\forall$, et le «alors» nous donne une implication. Soit encore

$$\forall n_0 \in \mathbf{N},\ \Big((\mathscr{P}(n_0) \wedge (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1))) \Rightarrow (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n))\Big).$$

Remarque : si vous n'aimez pas les expression du type $\forall n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$, vous pouvez les remplacer[16] par

$$\forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathscr{P}(n).$$

[16] Mais c'est moins joli...

Sur le même modèle, il est aisé d'énoncer le principe de récurrence double :

$$\forall n_0 \in \mathbf{N},\ \big((\mathscr{P}(n_0) \wedge \mathscr{P}(n_0+1) \wedge (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{P}(n+1) \Rightarrow \mathscr{P}(n+2))) \Rightarrow (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n))\big).$$

Enfin, pour le principe de récurrence forte :

$$\forall n_0 \in \mathbf{N},\ \Big(\mathscr{P}(n) \wedge \big(\forall n \geqslant n_0, (\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ \mathscr{P}(k)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)\big) \Rightarrow (\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n))\Big).$$

Solution de l'exercice 1.24

Commençons par chercher les plus petits scores possibles. Il s'agit évidemment de $0, 3, 5, 6 = 3 + 3, 7, 8 = 3 + 5, 9 = 3 + 3 + 3, 10 = 7 + 3, 11 = 3 + 3 + 5, 12 = 7 + 5 = 3 + 3 + 3 + 3$.
Il semble assez légitime de supposer que tous les scores à partir de 5 sont possibles, prouvons-le par récurrence.

Une option est d'utiliser une récurrence triple, en notant $\mathscr{P}(n)$ le prédicat «n est un score possible».
Qui s'écrit encore : $\exists a \in \mathbf{N}, \exists b \in \mathbf{N}, \exists c \in \mathbf{N},\ n = 3a + 5b + 7c$.
On a alors déjà prouvé que $\mathscr{P}(5), \mathscr{P}(6)$ et $\mathscr{P}(7)$ sont vraies.
Soit $n \geqslant 5$, et suposons $\mathscr{P}(n)$, $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n+2)$ vraies.
Alors il existe trois entiers a, b, c tels que $n = 3a + 5b + 7c$. Et donc $n + 3 = 3(a + 1) + 5b + 7c$, si bien que $n + 3$ est un score possible, et donc $\mathscr{P}(n+3)$ est vraie.
Par le principe de récurrence triple, pour tout $n \geqslant 5$, n est un score possible. Et donc les scores possibles sont $0, 3$ et tous les entiers supérieurs à 5.

> **Remarque**
> Pour être vraiment complet, il faudrait justifier que 1, 2 et 4 ne sont pas des scores possibles. Contentons-nous de dire que c'est évident...

Alternative : notons que pour prouver $\mathscr{P}(n+3)$, nous avons seulement utilisé $\mathscr{P}(n)$, et pas $\mathscr{P}(n+1)$ ni $\mathscr{P}(n+2)$.

Plutôt qu'une récurrence triple, nous aurions pu utiliser trois récurrences simples : une pour prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $3n+5$ est un score possible, une pour prouver que les $3n+6$, $n \in \mathbf{N}$ sont possibles, et une pour prouver que les $3n+7$, $n \in \mathbf{N}$ sont possibles.
Si l'hérédité est la même[17] pour ces trois récurrences, il faut bien trois initialisations (pour $n = 5, 6, 7$), comme c'est le cas dans la récurrence triple proposée ci-dessus.

[17] Ajouter 3 à un score possible fournit encore un score possible.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.25

⚠ Il s'agit de prouver que $\exists a, b \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = a(-1)^n + b2^n$.
Donc les réels a et b doivent être indépendants de n.
Si on prouve par récurrence la proposition $\mathscr{P}(n)$: $\exists a, b \in \mathbf{R}, u_n = a(-1)^n + b2^n$, on prouvera alors que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \exists a, b \in \mathbf{R}, u_n = a(-1)^n + b2^n.$$

Or si on l'écrit ainsi, a et b sont autorisés à dépendre de n, ce que l'on ne souhaite pas[18].
Notons au passage que ce $\mathscr{P}(n)$ se prouve facilement et sans récurrence : à n fixé, on peut prendre $a = 0$ et $b = \frac{u_n}{2^n}$.

[18] Rappelons qu'on ne peut pas permuter comme on veut un quantificateur universel et un quantificateur existentiel.

Prouvons donc l'existence de a et b en procédant par analyse-synthèse.
Analyse : supposons qu'il existe bien deux réels a, b tels que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = a(-1)^n + b2^n$, et notons a, b deux tels réels a et b.
Alors en particulier[19], $1 = u_0 = a(-1)^0 + b2^0 = a + b$.
Et de même, $3 = u_1 = a(-1)^1 + b2^1 = -a + 2b$.

[19] Pour $n = 0$.

Donc $\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + 2b = 3 \end{cases}$ si bien que $\begin{cases} b = \dfrac{4}{3} \\ a = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$
Ainsi, si deux tels réels existent, nous les avons uniquement déterminés.

Reste à faire la synthèse : il faut encore prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = -\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{4}{3}2^n = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^{n+2}\right).$$

Pour ce faire, procédons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$, en prouvant la propriété $\mathscr{P}(n) : u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^{n+2}\right)$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, c'est vrai d'après le système d'équations écrit ci-dessus.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies, c'est-à-dire que $u_n = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1} + 2^{n+2}\right)$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+2} + 2^{n+3}\right)$. Alors

> **Méthode**
> Qui dit récurrence **double** dit initialisation **double**.

$$\begin{aligned} u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n &= \frac{1}{3}\left((-1)^{n+2} + 2(-1)^{n+1} + 2^{n+3} + 2 \cdot 2^{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((-1)^{n+1}(2-1) + 2^{n+2}(2+2)\right) = \frac{1}{3}\left((-1)^{n+3} + 2^{n+2+2}\right). \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence double, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout n.
Ceci prouve bien qu'il existe deux réels a et b comme annoncé. Mieux : ces deux réels sont uniques, comme l'a prouvé la phase d'analyse.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.26

Il s'agit donc de montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = u_0 = 1$.
Procédons par récurrence forte sur n. On a évidemment $u_0 = 1$, donc la récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $u_k = 1$.
Alors $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(u_0^2 + \cdots + u_n^2\right) = \dfrac{1}{n+1}\left(1^2 + \cdots + 1^2\right) = \dfrac{1}{n+1}(n+1) = 1$.
Donc par le principe de récurrence **forte**, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 1$.
Ainsi, la suite (u_n) est constante égale à 1.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1.27

Pour nous faire une idée, commençons par calculer les premiers termes de la suite. On a donc $u_0 = 0$, $u_1 = u_{0+1} = 2u_0 + 1 = 1$, $u_2 = u_{1+1} = u_1 + 1 = 2$, $u_3 = u_{2+1} = 2u_1 + 1 = 3$, etc.

Il est donc légitime de supposer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n$.
Prouvons donc par récurrence **forte** sur $n \in \mathbf{N}$ le prédicat : $\mathscr{P}(n) : u_n = n$.
Il est clair que $\mathscr{P}(0)$ est vraie, donc notre récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $u_k = k$.
► Si n est pair, alors $u_{n+1} = 2u_{\frac{n}{2}} + 1 = 2\frac{n}{2} + 1 = n + 1$.
Et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

► Si n est impair, alors $u_{n+1} = u_n + 1 = n + 1$, et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Dans tous les cas, on a donc prouvé que $(\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(k)) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.
Par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n$.

⚠ Attention !
C'est ici que nous avons besoin d'une récurrence forte : pour prouver $\mathscr{P}(n+1)$, on n'utilise pas $\mathscr{P}(n)$, mais $\mathscr{P}(n/2)$.

Solution de l'exercice 1.28

Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n = n$.
Notons donc, pour $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$: $u_n = n$.

Initialisation : par le point i) il existe un entier p tel que $u_p = 0$.
Soit donc $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p = 0$.
Or, par le point ii) $u_p \geqslant p$, soit encore $0 \geqslant p$.
Puisque $p \geqslant 0$, on a donc $p = 0$, si bien que $u_0 = 0$.
Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{P}(0), \mathscr{P}(1), \dots, \mathscr{P}(n)$ soient vraies, c'est-à-dire telles que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u_k = k$.
Par le point i), il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p = n + 1$. Soit donc $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p = n + 1$.
Alors par *ii)*, $u_p \geqslant p$, donc $n + 1 \geqslant p$, si bien que $p \in [\![0, n+1]\!]$.
Mais par hypothèse, on a déjà $u_0 = 0 \neq n + 1$, $u_1 = 1 \neq n + 1, \dots, u_n = n \neq n + 1$.
Donc $p \geqslant n + 1$, si bien que par double inégalité $p = n + 1$.
Et donc $u_{n+1} = n + 1$, si bien que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Donc par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n$.

Rédaction
Dans une récurrence forte, il faut faire apparaître **très clairement** que vous ne supposez pas seulement $\mathscr{P}(n)$ vraie, mais bien $\mathscr{P}(k)$ vraie pour $k \leqslant n$.

Solution de l'exercice 1.29

Nous allons raisonner par récurrence[20] sur $n \geqslant 2$, et plus précisément prouver la proposition $\mathscr{P}(n)$: «pour tout échiquier de taille $2^n \times 2^n$, quelle que soit la position du monomino, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec des triominos».
Pour $n = 2$, ça se passe d'explications[21].
Supposons donc que l'on sache paver tout échiquier carré de côté 2^n privé d'une case à l'aide de triominos, et considérons un échiquier carré de côté 2^{n+1}, sur lequel se trouve déjà un monomino. Et procédons en plusieurs étapes[22].

- **Étape 1** : partageons l'échiquier en 4 échiquiers carrés de côté 2^n.
- **Étape 2** : Le monomino se trouve alors dans l'un de ces 4 sous-échiquiers. Par hypothèse de récurrence, on peut donc paver ce sous-échiquier avec des triominos.
- **Étape 3** : positionnons un triomino au centre de l'échiquier, de manière à ce qu'il intersecte les trois sous-échiquiers ne contenant pas le monomino.
- **Étape 4** : les trois sous-échiquiers restants ont alors une seule case occupée. Par hypothèse de récurrence, ils sont donc pavables par des triominos.
  Et donc quelle que soit la position de départ du monomino, l'échiquier de côté 2^{n+1} est pavable par des triominos.

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie et donc par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

[20] Simple.

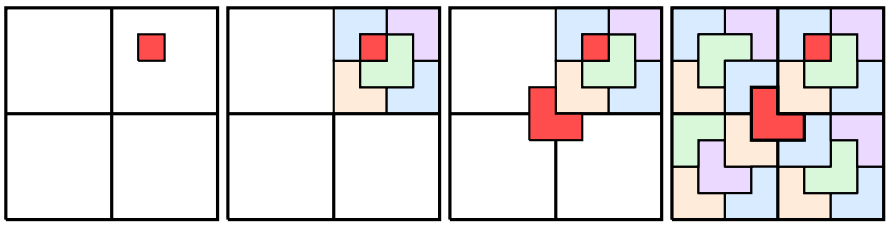
[21] Il n'y a que trois cases vides !

[22] Ces étapes sont illustrées sur la figure ci-dessous.

Solution de l'exercice 1.30

Notons r_n le nombre maximal de régions du disque[23] que l'on peut délimiter à l'aide de n cordes.
Il est absolument évident que $r_1 = 2$, et il est facile de constater que $r_2 = 4$.
Avec un peu plus de temps, on arrive sûrement à se convaincre que $r_3 = 7$, et que ceci ne se produit que lorsque les cordes ne sont pas concourantes.
Pour autant, il n'est pas facile de conjecturer une formule générale, et quand bien même

[23] Dans toute la suite, nous pourrons supposer sans perte de généralité que disque est le disque trigonométrique (de centre $(0, 0)$ et de rayon 1).



Étape 1 **Étape** 2 **Étape** 3 **Étape** 4

nous y arriverions, il faudrait la prouver...

Lorsqu'on dispose déjà de n cordes (notons les $\Delta_1, \dots, \Delta_n$), et que l'on en ajoute une $(n+1)^{\text{ème}}$ (notons la Δ_{n+1}), distincte des précédentes, celle ci vient couper les n cordes précédentes en p points distincts situés à l'intérieur du cercle, avec $p \leqslant n$. Notons donc $A_1, A_2, \dots, A_p$ ces points, ordonnés de gauche à droite.
Notons également A_0 et A_{p+1} les deux extrémités[24] de Δ_{n+1}.
Puisqu'entre A_0 et A_1 il n'y a aucun point d'intersection de Δ_{n+1} avec une autre corde, tout le segment $[A_0A_1]$ se trouve dans une même région (de la configuration de départ, avec n cordes), région qui se trouve donc coupée en deux par l'ajout de Δ_{n+1}.
Et de même, le segment $[A_1A_2]$ coupe une région en deux, etc, le segment $[A_pA_{p+1}]$ coupe une région en deux.
Autrement dit, l'ajout de Δ_{n+1} a fait apparaître $p+1$ nouvelles régions, avec $p+1 \leqslant n+1$.

[24] Qui sont donc deux points du cercle.

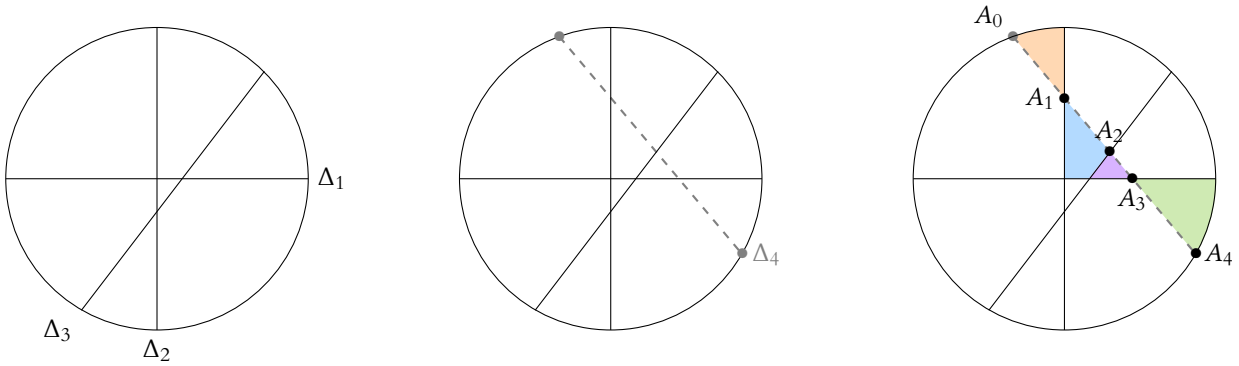
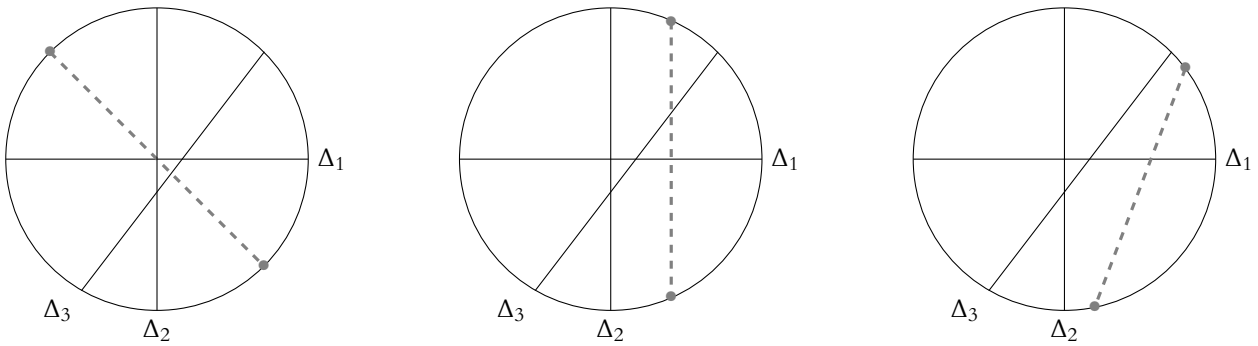


FIGURE 1.2 – Sur cet exemple, $n = 4$, et $p = 3$, puisque Δ_4 coupe les trois premières cordes en 3 points distincts du disque. Ce qui a pour effet de créer $3 + 1 = 4$ nouvelles régions.

Il n'est pas inintéressant de noter qu'on peut tout à fait avoir $p < n$, par exemple si trois des cordes sont concourantes, que deux d'entre elles sont parallèles, ou encore que deux d'entre elles s'intersectent à l'extérieur du cercle.
Ces trois cas sont représentés sur la figure ci-dessous, et on constatera qu'à chaque fois, l'ajout de Δ_4 crée strictement moins de 4 nouvelles régions.



Donc au maximum, on doit pouvoir avoir $r_2 \leqslant \underbrace{r_1}_{=2} + 2$, $r_3 \leqslant r_2 + 3$, donc $r_3 \leqslant 2 + 2 + 3$,

puis $r_4 \leqslant r_3 + 4$, et donc $r_4 \leqslant 2+2+3+4$, etc.
Et donc on doit avoir $r_n \leqslant 2+2+3+\cdots+n$, soit encore $r_n \leqslant 1+(1+2+3+\cdots+n)$.
Et il est bien connu[25] que $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

[25] C'est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Maintenant que nous avons une formule et un argument pour expliquer son origine, prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $r_n \leqslant 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Pour $n = 1$, on a $1 + \dfrac{n(n+1)}{2} = 2$, et nous savons déjà que $r_1 = 2$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $r_n \leqslant 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Considérons alors $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ des cordes distinctes qui coupent le cercle en r_n régions distinctes.
Alors quelle que soit la $(n+1)^{\text{ème}}$ corde Δ_{n+1}, distincte des précédentes, le raisonnement tenu ci-dessus prouve que le nombre de régions du disque délimitées par $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+1}$ est inférieur ou égal à $r_n + n + 1$.
Puisque ceci est valable quel que soit le choix de Δ_{n+1}, c'est en particulier vrai pour un choix de Δ_{n+1} maximisant le nombre de régions, et donc $r_{n+1} \leqslant r_n + n + 1$.
Et donc

$$r_{n+1} \leqslant 1 + \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \leqslant 1 + (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) \leqslant 1 + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $r_n \leqslant 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Ce qui peut encore s'écrire $r_n \leqslant \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

Mais a-t-on vraiment répondu à la question ? Nous avons seulement trouvé un **majorant** de r_n, reste à prouver qu'il est optimal, et donc qu'il existe bien un choix de n cordes partageant le cercle en $\frac{n^2+n+2}{2}$ régions.
Pour que ce soit le cas, il faut que l'ajout de la seconde corde ajoute bien 2 nouvelles régions, que l'ajout de la $3^{\text{ème}}$ en ajoute 3, etc.
Or le raisonnement ci dessus est assez clair : à chaque étape, le nombre de régions nouvellement crées est égal au nombre de points d'intersection de la dernière corde avec les précédentes, augmenté de 1. Plus précisément, il faut compter le nombre de tels points d'intersection distincts, **et situés à l'intérieur du disque**.
Pour construire n cordes partageant le cercle en $\frac{n^2+n+2}{2}$ régions, il faut donc que chacune d'entre elles coupe les précédentes en des points distincts, situés à l'intérieur du cercle.
Il semble assez évident qu'un tel choix de n cordes est possible... c'est un peu plus dur à écrire proprement. Voici une solution[26]

[26] Parmi beaucoup d'autres.

Intérieur
Un point (x, y) est à l'intérieur du cercle trigonométrique si et seulement si
$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons A_n et B_n les points de coordonnées respectives $\left(\dfrac{1}{2n}, 0\right)$ et $\left(0, \dfrac{1}{2n^2}\right)$.
Alors il est clair que ces deux points sont à l'intérieur du cercle trigonométrique, et donc que la droite Δ_n qui joint A_n et B_n coupe le cercle trigonométrique en deux points distincts. Donc peut être vue comme une corde de ce cercle.
Un calcul facile prouve qu'une équation de Δ_n est $y = -\dfrac{1}{n}x + \dfrac{1}{2n^2}$.

Nous allons prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, Δ_n coupe $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ en n points distincts, tous situés à l'intérieur du cercle.
Soit donc $n \geqslant 2$, et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Alors un petit calcul[27] prouve que le point d'intersection de Δ_n et Δ_p a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{n}\right), \dfrac{-1}{2np}\right)$.

[27] La résolution d'un système de deux équations à deux inconnues.

Vérifions que ce point est à l'intérieur du cercle. On a

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\right)\right)^2 + \left(\frac{-1}{2np}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2}{np} + \frac{1}{n^2p^2}\right).$$

Mais $n \geqslant 2$, donc $\dfrac{2}{np} \leqslant \dfrac{1}{p} \leqslant 1$, et clairement $\dfrac{1}{n^2} \leqslant 1$, $\dfrac{1}{p^2} \leqslant 1$ et $\dfrac{1}{n^2p^2} \leqslant 1$.
Donc le point d'intersection de Δ_n et Δ_p est bien à l'intérieur du cercle.

Reste à vérifier que les points d'intersection de Δ_n avec $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ sont deux à deux distincts, ce qui est évident puisqu'ils sont d'abscisses distinctes.
De là, une récurrence sur n prouverait sans grande difficulté que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ partage le cercle en $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ régions, et donc que le majorant obtenu précédemment est optimal.

Question subsidiaire : à $n \in \mathbf{N}^*$ fixé, faire la liste de tous les entiers qui sont le nombre de régions du disque délimitées par au moins une configuration de n cordes.