Devoir surveillé 4

▸ Exercice 1 : une relation d'ordre

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On définit une relation binaire $\leqslant_f$ sur $\mathbf{R}$ par

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \leqslant_f y \Leftrightarrow f(x) - f(y) \geqslant |x - y|.$$

1. Montrer que $\leqslant_f$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{R}$.
2. Si $f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, quelle est la relation $\leqslant_f$? Même question si $f = -\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$.
3. Montrer que $\leqslant_f$ est une relation d'ordre total si et seulement si $\forall x, y \in \mathbf{R},\ |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

▸ Exercice 2 : applications

1. Soit F un ensemble, et soit $f : F \to F$ une application telle que $f \circ f = f$.
   Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i) f est injective
   ii) f est surjective
   iii) $f = \mathrm{id}_F$.
2. Soit E un ensemble non vide, et soient A, B deux parties de E. On note alors

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cap A) \cup B \end{array} \right. .$$

   a. Si $A = \emptyset$, est-ce que g est injective ? Surjective ? Mêmes questions si $B = E$.
   b. Prouver alors que $g \circ g = g$.
   c. Donner alors une condition nécessaire et suffisante portant sur A et B pour que g soit bijective.

▸ Exercice 3 : N et R ne sont pas équipotents.

Le but de cet exercice est de prouver qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.
On raisonne par l'absurde, en supposant qu'une telle bijection existe, et on note $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ une bijection.

1. Soient a, b, x trois réels avec $a < b$.
   Montrer qu'il existe deux réels a', b' tels que $a \leqslant a' < b' \leqslant b$ et $x \notin [a', b']$.
2. Justifier qu'il existe deux suites de réels (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \text{ et } \varphi(n) \notin [a_n, b_n].$$

   Dans la suite, on fixe deux telles suites (a_n) et (b_n).
3. Justifier que (a_n) et (b_n) convergent. On note alors $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$.
5. Aboutir à une contradiction et conclure.

▸ Exercice 4 : une suite récurrente

Soit $a \in \mathbf{R}_+$ fixé. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant $u_1 = a$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note également $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(1+k)}{2^{k+1}}$.

1. Montrer qu'il existe une unique valeur de a pour laquelle la suite (u_n) est constante, et préciser cette valeur.
2. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la propriété suivante : $\forall n \geqslant 1,\ u_n \geqslant \sqrt{n}$.
   Montrer qu'alors $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone.
4. On suppose dans la suite qu'il existe un entier $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $u_k < \sqrt{k}$, et on fixe un tel entier k.
   a. Montrer que $\forall n \geqslant k,\ u_n < \sqrt{n}$.
   b. Prouver que $(u_n)_{n\geqslant k}$ est décroissante.
   c. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ possède une limite que l'on précisera.
5. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.
   a. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, déterminer une expression simple de $v_{k+1} - v_k$.
   b. En déduire une expression de u_n en fonction de n, de a et d'un terme de la suite $(S_k)_{k\geqslant 1}$.
6. a. Étudier la monotonie de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
   b. Prouver qu'il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \dfrac{n}{2^n} \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
   c. En déduire que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   d. Prouver que (u_n) converge si et seulement si il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$.
   e. Soit $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Montrer que si $a < \exp\left(\dfrac{S}{2}\right)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et sinon $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

▸ Exercice 5 : étude d'une suite implicite et de deux séries associées.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbf{R}_+,\ f_n(x) = x^n + x\sqrt{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe un unique réel positif, noté x_n, tel que $f_n(x_n) = 1$.
   Prouver que de plus, $x_n \in [0,1]$.
2. Justifier que $x_n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.
3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$.
   a. À l'aide d'une minoration, justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   b. À l'aide de la question 2, montrer qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que : $\forall k \geqslant n_0,\ \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant x_k \leqslant \dfrac{3}{2\sqrt{k}}$.
   c. En déduire la limite de $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
4. En utilisant la question 3.b, prouver qu'à partir d'un certain rang, $nx_n^n \leqslant \dfrac{9}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$.
   En déduire la limite de nx_n^n.
5. Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n + x_n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.
6. Prouver alors que $n\left(f_{n+1}(x_n) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

7. En déduire que la suite (x_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
8. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x_k$.
   a. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones à partir d'un certain rang.
   b. Prouver que (u_n) converge.

▸ Exercice 6 : une autre preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Soit (u_n) une suite à valeurs réelles. On dit qu'un entier n_0 **est un sommet de** (u_n) si $\forall p \geqslant n_0,\ u_p \leqslant u_{n_0}$.

1. On suppose qu'il existe une infinité de sommets de (u_n), c'est-à-dire que l'ensemble $E = \{n \in \mathbf{N} \mid \forall p \geqslant n,\ u_p \leqslant u_n\}$ est infini. On pose alors $\varphi(0) = \min E$ et pour tout $p \in \mathbf{N}$,

$$\varphi(p+1) = \min\{n > \varphi(p) \mid \forall k \geqslant n,\ u_k \leqslant u_n\} = \min(E \setminus [\![0, \varphi(p)]\!]).$$

   Justifier que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\varphi(p)$ est bien défini et que $(u_{\varphi(p)})_p$ est une suite décroissante extraite de (u_n).
2. On suppose à présent que (u_n) ne possède qu'un nombre fini de sommets.
   Montrer qu'il existe une suite croissante extraite de (u_n).
3. À l'aide de ce qui précède, donner une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 4

▸ Exercice 1 : une relation d'ordre

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $f(x) - f(x) = 0 = |x - x|$, donc $\leqslant_f$ est réflexive.
Soient $x, y, z \in \mathbf{R}$ tels que $x \leqslant_f y$ et $y \leqslant_f z$. Alors $f(x) - f(y) \geqslant |x - y|$ et $f(y) - f(z) \geqslant |y - z|$.
En sommant ces deux relations,

$$x - z \geqslant |x - y| + |y - z| \geqslant |x - y + y - z| = |x - z|.$$

Donc $x \leqslant_f z$, si bien que $\leqslant_f$ est transitive.
Soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $x \leqslant_f y$ et $y \leqslant_f x$.
Alors $f(x) - f(y) \geqslant |x - y|$ et $f(y) - f(x) \geqslant |y - x| = |x - y|$.
On en déduit que $f(x) - f(y)$ et son opposé sont tous deux positifs, et donc que $f(x) - f(y) = 0$.
Et alors $|x - y| \leqslant f(x) - f(y) = 0$, si bien que $x = y$.
Ainsi, $\leqslant_f$ est antisymétrique, et donc $\boxed{\leqslant_f \text{ est une relation d'ordre.}}$

Détails
Un réel positif x est égal (donc supérieur ou égal) à sa valeur absolue, alors que si $x < 0$, alors $x < 0 < |x|$.

2. Si $f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$ alors pour tous réels x et y, $x \leqslant_f y \Leftrightarrow x - y \geqslant |x - y|$.
Ce qui est le cas si et seulement si $x - y \geqslant 0$, soit encore $x \geqslant y$, si bien que $\leqslant_f$ est en fait $\geqslant$, pour la relation d'ordre usuelle de $\mathbf{R}$.
Et dans le cas où $f = -\mathrm{id}_{\mathbf{R}}$, $x \leqslant_f y \Leftrightarrow y - x \geqslant |y - x|$, ce qui est le cas si et seulement si $y \geqslant x$.
Autrement dit, $\leqslant_f$ est la relation $\leqslant$.

3. Supposons que pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.
Soient alors $x, y \in \mathbf{R}$. Si $f(x) \geqslant f(y)$, alors $f(x) - f(y) = |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$, et donc $x \leqslant_f y$.
Et si au contraire, $f(y) \geqslant f(x)$, alors $f(y) - f(x) = |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y| = |y - x|$, si bien que $y \leqslant_f x$.
Ainsi, deux réels sont toujours comparables pour $\leqslant_f$, et donc $\leqslant_f$ est une relation d'ordre total.

Max
Si $t \in \mathbf{R}^*$, alors un seul des deux nombres t et $-t$ est positif, et c'est celui-ci qui est égal à $|t|$.
Donc $|t| = \max(t, -t)$. Ceci est évidemment encore vrai si $t = 0$.

Inversement, supposons que $\leqslant_f$ soit un ordre total.
Soient alors $x, y \in \mathbf{R}$. Ou bien $x \leqslant_f y$, ou bien $y \leqslant_f x$.
Et donc $f(x) - f(y) \geqslant |x - y|$ ou $f(y) - f(x) \geqslant |x - y|$.
Mais puisque $|f(x) - f(y)| = \max(f(x) - f(y), f(y) - f(x))$, alors $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$.

▸ Exercice 1 : une relation d'ordre

1. Supposons f injective. Alors pour tout $x \in F$, $f(x) = f(f(x))$, si bien que par injectivité de f, $x = f(x)$.
Ceci étant vrai pour tout $x \in F$, $f = \mathrm{id}_F$, qui est évidemment surjective.

Supposons f surjective. Soit alors $y \in F$, et soit $x \in F$ tel que $y = f(x)$.
Alors $y = f(x) = f(f(x)) = f(y)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, $f = \mathrm{id}_F$, qui est évidemment injective.

Enfin il est clair que si $f = \mathrm{id}_F$, alors f est bijective, et donc injective et surjective.

Et donc $\boxed{f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f = \mathrm{id}_F.}$

Plus généralement
Puisque $E \neq \emptyset$, $\mathscr{P}(E)$ n'est pas un singleton.
Or une application constante d'un ensemble qui n'est pas un singleton dans lui-même n'est ni injective ni surjective.

2.a. Si $A = \emptyset$, alors pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $f(X) = (X \cap \emptyset) \cup B = B$.
Puisque $E \neq \emptyset$ et que $f(E) = f(\emptyset)$, f n'est pas injective.
Et puisque $E \neq \emptyset$, $\overline{B} \neq B$, si bien que $\overline{B} \notin \mathrm{Im}\, f$, et donc f n'est pas surjective.

De même, si $B = E$, alors pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $f(X) = (X \cap A) \cup E = E$.
Et donc comme précédemment, $f(\emptyset) = f(E)$ si bien que f n'est pas injective et $\emptyset \notin \mathrm{Im}\, f$, donc f n'est pas surjective.

2.b. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Alors $g(g(X)) = (g(X) \cap A) \cup B$. Mais

$$\begin{aligned} g(X) \cap A &= ((X \cap A) \cup B) \cap A = ((X \cup B) \cap (A \cup B)) \cap A \\ &= (X \cup B) \cap \big((A \cup B) \cap A\big) \\ &= (X \cup B) \cap A = (X \cap A) \cup (B \cap A). \end{aligned}$$

Associativité de $\cap$.

Détails

$A \subset A \cup B$, donc

$(A \cup B) \cap A = A$.

Et donc $g(g(X)) = (X \cap A) \cup (B \cap A) \cup B = (X \cap A) \cup B = g(X)$.
Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on en déduit que $\boxed{g \circ g = g.}$

2.c. Par la question 1, on a donc g qui est bijective si et seulement si $g = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$.
Soit si et seulement si pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $(X \cap A) \cup B = X$.
Si c'est le cas, on a en particulier, $(\emptyset \cap A) \cup B = \emptyset$, et donc $B = \emptyset$.
Et de plus, $(E \cap A) \cup \emptyset = E$, donc $E \cap A = E$, et donc $A = E$.
Ainsi, si g est bijective, alors $(A, B) = (E, \emptyset)$.

Et inversement, si $(A, B) = (E, \emptyset)$, alors pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, $g(X) = (X \cap E) \cup \emptyset = X$, et donc $g = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ est bijective.

Ainsi, $\boxed{g \text{ est bijective si et seulement si } (A, B) = (E, \emptyset).}$

▸ Exercice 3 : R et N ne sont pas équipotents.

1. ▸ Si $x \notin [a, b]$, il suffit de prendre $a' = a$ et $b' = b$.
▸ Si $x = a$, prenons $a' = \frac{a+b}{2}$ et $b' = b$.
▸ Enfin, si $x \in]a, b]$, alors prenons $a' = a$ et $b' = \frac{a+x}{2}$ de sorte que $b < x$.
Dans les trois cas, on a bien $a \leqslant a' < b' \leqslant b$ et $x \notin [a', b']$.

2. Construisons deux telles suites par récurrence.
Commençons par choisir a_0 et b_0 de sorte que $\varphi(0) \notin [a_0, b_0]$.
Par exemple, prenons $a_0 = \varphi(0) + 1$ et $b_0 = a_0 + 1$.
Puis pour tout $n \in \mathbf{N}$, par la question précédente, appliquée avec $a = a_n$, $b = b_n$ et $x = \varphi(n+1)$, il existe deux réels a', b' tels que $a_n \leqslant a' < b' \leqslant b_n$ et $\varphi(n+1) \notin [a', b']$.
Prenons deux tels réels, et posons $a_{n+1} = a'$ et $b_{n+1} = b'$. Alors

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

et de plus $\varphi(n+1) \notin [a_n, b_n]$.

3. Par ce qui précède, (a_n) est croissante et (b_n) décroissante.
Donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_0 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_0$.
En particulier, (a_n) est croissante et majorée par b_0, donc par le théorème de la limite monotone, elle converge.
De même, (b_n) est décroissante et minorée par a_0, donc par le théorème de la limite monotone, elle converge.

4. Puisque (a_n) est croissante de limite ℓ, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant \ell$.
Par ailleurs, si on note ℓ' la limite de (b_n), alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ell' \leqslant b_n$. Mais par ailleurs, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n \leqslant b_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$, et donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ a_n \leqslant \ell \leqslant \ell' \leqslant b_n.}$

5. Puisque φ est bijective, il existe un[1] entier $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi(n_0) = \ell$.
Mais alors par construction, $\ell = \varphi(n_0) \notin [a_{n_0}, b_{n_0}]$.
Or d'après la question précédente, $a_{n_0} \leqslant \ell \leqslant b_{n_0}$.
On en déduit une contradiction, si bien $\boxed{\text{qu'il n'existe pas de bijection } \varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{R}.}$

Remarque

Notons que l'injectivité de φ ne nous a été d'aucune utilité, nous avons en fait prouvé qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

▸ Exercice 4 : étude d'une suite récurrente.

Remarquons dès maintenant que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{u_{n-1}^2}{\sqrt{n-1}} \geqslant 0$.

1. Si (u_n) est constante, alors $u_1 = u_2$, et donc $a = \dfrac{a^2}{\sqrt{1}} = a^2$.
Donc $a = 0$ ou $a = 1$.
Mais si $a = 1$, on a $u_3 = \dfrac{1^2}{\sqrt{2}} \neq 1$, donc $(u_n)_{n \geqslant 1}$ n'est pas constante.

En revanche, si $a = 0$, il est aisé de prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 0$, et donc que (u_n) est constante.
Donc $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est constante si et seulement si } a = 0.}$

2. Si (u_n) converge, notons ℓ sa limite. Alors $\dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $u_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{\sqrt{n}}$, si bien que quotient de limites, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Mais par ailleurs, $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ car $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Et donc par unicité de la limite de (u_{n+1}), $\boxed{\ell = 0.}$.

3. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{n}} \geqslant 1.$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$

> **Remarque**
> Si on peut s'intéresser au quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, c'est car (u_n) est à valeurs strictement positives.

4.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $u_n < \sqrt{n}$. Alors $u_{n+1} < \dfrac{\sqrt{n}^2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$.

Et donc une récurrence facile prouve que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant k,\ u_n \leqslant \sqrt{n}.}$

4.b. Soit $n \geqslant k$. Alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n^2}{u_n\sqrt{n}} = \dfrac{u_n}{\sqrt{n}} < 1$. Et donc $u_{n+1} < u_n$.

Par conséquent, $\boxed{(u_n)_{n\geqslant k} \text{ est décroissante (et même strictement décroissante).}}$

4.c. Puisque $(u_n)_{n\geqslant k}$ est minorée par 0, et décroissante, elle converge.
Et donc par indifférence des premiers termes, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge également, nécessairement vers 0 par la question 2.

5. L'énoncé était un peu ambigu, car v_n n'est pas défini si $u_n = 0$.
Or si $a > 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > 0$. Et si $a = 0$, alors (u_n) est la suite nulle.

5.a. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On a donc $\ln(u_{k+1}) = \ln\left(\dfrac{u_k^2}{\sqrt{k}}\right) = 2\ln(u_k) - \dfrac{1}{2}\ln(k)$, si bien que

$$\frac{1}{2^{k+1}}\ln(u_{k+1}) = \frac{1}{2^k}\ln(u_k) - \frac{1}{2^{k+2}}\ln(k).$$

Soit encore $\boxed{v_{k+1} - v_k = -\dfrac{1}{2^{k+2}}\ln(k).}$

5.b. Soit $n \geqslant 2$, alors par somme télescopique,

$$v_n - v_1 = \sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = -\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\ln(k)}{2^{k+2}} = -\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{\ln(k)}{2^k} = -\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-2}\frac{\ln(1+k)}{2^{k+1}}.$$

Par ailleurs, $v_1 = \dfrac{1}{2}\ln(a)$, et donc

$$\ln(u_n) = 2^n v_n = 2^n\left(\frac{1}{2}\ln(a) - \frac{1}{4}S_{n-2}\right)$$

si bien que $u_n = \exp\left(2^{n-1}\ln(a) - 2^{n-2}S_{n-2}\right) = \boxed{a^{(2^{n-1})}\exp\left(-2^{n-2}S_{n-2}\right).}$

6.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\ln(1+k)}{2^{k+1}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(1+k)}{2^{k+1}} = \frac{\ln(n+2)}{2^{n+2}} \geqslant 0$.

Donc $\boxed{(S_n) \text{ est croissante.}}$

6.b. On a $\dfrac{n}{2^n}\dfrac{4^n}{3^n} = \dfrac{n2^n}{3^n} = \exp\left(n\ln\frac{2}{3} + \ln n\right)$.

Mais $n\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln(n) = n\left(\ln\frac{2}{3} + \frac{\ln n}{n}\right)$.

Or par croissances comparées, $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $n\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

> **⚠ Attention !**
> Puisque $\ln\frac{2}{3} < 0$, la limite de $n\ln\frac{2}{3}$ est $-\infty$, et non pas $+\infty$.

On en déduit, par composition avec l'exponentielle, que $\frac{n}{2^n}\frac{4^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En particulier, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $\frac{n}{2^n}\frac{4^n}{3^n} \leqslant 1$ et donc $\boxed{\frac{n}{2^n} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n}$.

6.c. Puisque nous savons déjà (S_n) croissante, il s'agit de prouver qu'elle est majorée.
Soit donc $n \geqslant N$. Alors

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(1+k)}{2^{k+1}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k+1}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{n} \frac{k}{2^k} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^{k+1}} + \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^{k+1}} + 2\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{k}{2^{k+1}} + 2.
\end{aligned}$$

Rappel
On a l'inégalité classique
$\ln(1+x) \leqslant x$.

Remarque
On notera bien que la somme est une **constante** indépendante de n.

Donc nous venons bien de prouver que $(S_n)_{n\geqslant N}$ est majorée, si bien que par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(S_n) \text{ est convergente.}}$

6.d. Si (u_n) converge, c'est vers 0, et donc il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

Détails
Prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition de $u_n \to 0$.

Et inversement, s'il existe un entier $k > 2$ tel que $u_k < 1$, alors $u_k < \sqrt{k}$, si bien que par la question 4, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Et donc par double implication, nous avons bien prouvé que (u_n) converge si et seulement si il existe $k > 2$ tel que $u_k < 1$.

6.e. Reprenons l'expression de u_n obtenue à la question 5,

$$u_n = \exp\left(2^{n-1}\ln(a) - 2^{n-2}S_{n-2}\right) = \exp\left(2^{n-2}\left(2\ln(a) - S_{n-2}\right)\right).$$

Pour $n > 2$, on a $u_n < 1$ si et seulement si $2\ln(a) - S_{n-2} < 0$, soit encore si et seulement si $\ln(a) < \frac{S_{n-2}}{2}$.

► Si $\ln(a) \geqslant \frac{S}{2}$, alors par stricte croissance de (S_n), pour tout $n \geqslant 2$, $\frac{S_{n-2}}{2} < \frac{S}{2} \leqslant \ln(a)$, et donc pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant 1$, si bien que (u_n) diverge.
Mais comme expliqué à la question 4, ceci n'est possible que si $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant \sqrt{n}$.
Et puisque $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$

► Si en revanche, $\ln(a) < \frac{S}{2}$, alors en prenant $\varepsilon = S - 2\ln(a) > 0$ dans la définition de limite, on obtient l'existence d'un entier $k \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant k$, $|S_n - S| < \varepsilon$.
Et donc en particulier, $\underbrace{S-\varepsilon}_{=2\ln(a)} < S_k$, si bien que $u_{k+2} < 1$, et donc (u_n) converge par la question 6.d.

En définitive, (u_n) converge si et seulement si $2\ln(a) < S$, soit encore si et seulement si $a < \exp\left(\frac{S}{2}\right)$, ce qui est bien la condition annoncée.

▸ Exercice 5 : étude d'une suite implicite et de deux séries associées.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. La fonction f_n est strictement croissante car $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x\sqrt{n}$ le sont.
Elle est continue car dérivable[2].
Comme de plus, $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, par le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$.
Et donc $\boxed{\text{il existe un unique } x_n \in \mathbf{R}_+ \text{ tel que } f_n(x_n) = 1.}$
Puisque de plus, $f_n(1) = 1 + \sqrt{n} > 1$, par stricte croissance de f_n, $1 > x_n$.
Et donc $\boxed{x_n \in [0, 1].}$

[2] Puisque polynomiale.

2. On a donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n^n + x_n\sqrt{n} = 1$, soit encore $x_n\left(x_n^{n-1} + \sqrt{n}\right) = 1$.
Donc $x_n\sqrt{n} = \dfrac{\sqrt{n}}{x_n^{n-1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\frac{x_n^{n-1}}{\sqrt{n}} + 1}$.
Mais $0 \leqslant \dfrac{x_n^{n-1}}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, si bien $\dfrac{x_n^{n-1}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $\boxed{x_n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$
Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n = \dfrac{x_n\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, alors par quotient de limites, $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

3.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, si bien que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Et donc puisque $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

3.b. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de $x_n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Alors il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant x_k\sqrt{k} \leqslant \dfrac{3}{2}$.
Et donc $\boxed{\text{pour } k \geqslant n_0,\ \frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant x_k \leqslant \frac{3}{2\sqrt{k}}.}$

3.c. On a donc, pour $n \geqslant n_0$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n_0-1} x_k + \sum_{k=n_0}^{n} x_k \geqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} x_k + \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n_0-1} x_k - \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{2\sqrt{k}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Mais $\sum_{k=1}^{n_0-1} x_k - \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ est une constante et $\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si bien que $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$

4. Reprenons n_0 comme dans la question 3.b. Alors pour $n \geqslant n_0$,

$$nx_n^n \leqslant n\left(\frac{3}{2\sqrt{n}}\right)^n \leqslant n\left(\frac{3}{2\sqrt{n}}\right)^2\left(\frac{3}{2\sqrt{n}}\right)^{n-2} \leqslant \frac{9}{4}\left(\frac{3}{2\sqrt{n}}\right)^{n-2}.$$

Mais si de plus $n \geqslant 4$, alors $\dfrac{3}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{3}{4}$, si bien que pour $n \geqslant \max(n_0, 4)$, $nx_n^n \leqslant \dfrac{9}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$.
Or $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et comme de plus $nx_n^n \geqslant 0$, alors par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\boxed{nx_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

Premiers termes ?
Notre encadrement n'est pas valable pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, seulement pour n suffisamment grand.
Par indifférence des premiers termes, c'est largement suffisant pour appliquer le théorème d'encadrement.

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$f_{n+1}(x_n) - 1 = f_{n+1}(x_n) - f_n(x_n) = x_n^{n+1} + x_n\sqrt{n+1} - x_n^n - x_n\sqrt{n} = \boxed{x_n^{n+1} - x_n^n + x_n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).}$$

6. Par conséquent, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$n\left(f_{n+1}(x_n) - 1\right) = nx_n^{n+1} - nx_n^n + nx_n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

Par la question 4, $nx_n^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et puisque par ailleurs, $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors par produit $nx_n^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il s'agit donc de justifier que $nx_n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.
Mais pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$nx_n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = nx_n \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$
$$= nx_n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{nx_n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1\right)} = \frac{\sqrt{n}x_n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1}.$$

> **Astuce**
> Pour lever les formes indéterminées provenant de différence de racines, la quantité conjuguée est souvent utile.

Puisque $x_n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et que $\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, on en déduit, par quotient, que $nx_n\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Et donc par somme, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\left(f_{n+1}(x_n) - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.}$

7. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de limite.

Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|n\left(f_{n+1}(x_n) - 1\right) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$, soit encore

$$0 < n\left(f_{n+1}(x_n) - 1\right) < 1.$$

Et donc en particulier, pour $n \geqslant n_0$, $f_{n+1}(x_n) - 1 > 0$, soit encore $f_{n+1}(x_n) > 1 = f_{n+1}(x_{n+1})$.
Par stricte croissance de f_{n+1}, on en déduit que $x_n > x_{n+1}$.
Et donc $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante, si bien que $\boxed{(x_n)_n \text{ est décroissante à partir d'un certain rang.}}$

8.a. Notons de nouveau n_0 un entier tel que $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ soit décroissante.
Alors pour $n \geqslant n_0$,

$$u_{2n+2} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k x_k - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x_k = x_{2n+2} - x_{2n+1} \leqslant 0.$$

Donc $\boxed{(u_{2n})_{n\geqslant n_0} \text{ est décroissante.}}$
De même, pour $n \geqslant n_0$,

$$u_{2n+3} - u_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3} (-1)^k x_k - \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k x_k = -x_{2n+3} + x_{2n+2} \geqslant 0.$$

Et donc $\boxed{(u_{2n+1})_{n\geqslant n_0} \text{ est croissante.}}$

8.b. De plus, $u_{2n+1} - u_{2n} = -x_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc les suites $(u_{2n})_{n\geqslant n_0}$ et $(u_{2n+1})_{n\geqslant n_0}$ sont adjacentes.
Elles convergente donc vers une même limite ℓ. Et alors $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ si bien que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.}$

▸ Exercice 6 : une autre preuve de Bolzano-Weierstrass

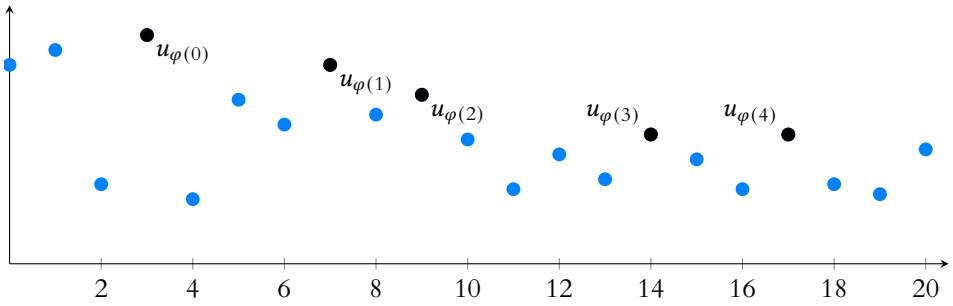
1. $\varphi(0)$ est bien défini car E est une partie non vide[3] de $\mathbf{N}$, et donc possède un plus petit élément.
Soit $p \in \mathbf{N}$. Alors $\varphi(p+1)$ est bien défini car E étant infini, $E \setminus [\![0, \varphi(p)]\!]$ n'est pas vide.

[3] Car on l'a supposée infinie.

Et alors il s'agit là encore d'une partie non vide de $\mathbf{N}$, qui possède donc un plus petit élément.

Par construction, on a donc, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\varphi(p+1) > \varphi(p)$, de sorte que φ est strictement croissante et donc est bien une extractrice.
Et pour tout $p \in \mathbf{N}$, puisque $\varphi(p)$ est un sommet de (u_n), pour tout $n \geqslant \varphi(p)$, $u_n \leqslant u_{\varphi(p)}$.
Et donc en particulier, comme $\varphi(p+1) \geqslant \varphi(p)$, $u_{\varphi(p+1)} \leqslant u_{\varphi(p)}$.
Donc $\boxed{(u_{\varphi(p)})_p \text{ est décroissante et extraite de } (u_n).}$

Commentaire *: un sommet est un terme qui est plus grand que ceux qui le suivent. De manière un peu imagée, imaginez que les u_n sont les hauteurs d'immeubles placés aux abscisses $0, 1, 2$, etc, et qu'en $+\infty$ se trouve la mer.*
Alors n est un sommet ssi le $n^{ème}$ immeuble a vue sur la mer, c'est-à-dire si aucun voisin ne lui bouche la vue.
Ce que nous venons de dire, c'est que la suite des sommets est décroissante.



2. Supposons à présent que (u_n) ne possède qu'un nombre fini de sommets.
Il existe donc $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $p \geqslant n_0$, p n'est pas un sommet de (u_n).
Posons alors $\varphi(0) = n_0$.
Puisque n_0 n'est pas un sommet de (u_n), l'ensemble $\{k > \varphi(0) \mid u_k > u_{\varphi(0)}\}$ est non vide.
Notons $\varphi(1)$ son plus petit élément.
Mais alors $\varphi(1)$ n'est pas un sommet de (u_n), donc il existe $k > \varphi(1)$ tel que $u_k > u_{\varphi(1)}$.
Notons $\varphi(2)$ le plus petit tel entier.
Plus rigoureusement, pour tout $p \in \mathbf{N}$, posons $\varphi(p+1) = \min\{k > \varphi(p) \mid u_k > u_{\varphi(p)}\}$.
Cet ensemble est non vide[4] puisque $\varphi(p)$ n'est pas un sommet de (u_n), et donc $\varphi(p+1)$ est bien défini.
On a alors φ qui est strictement croissante par construction, et pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{\varphi(p+1)} > u_{\varphi(p)}$ par définition même de $\varphi(p+1)$.
Et donc $\boxed{\text{la suite extraite } (u_{\varphi(n)})_n \text{ est strictement croissante.}}$

Détails
Si (u_n) n'a pas de sommet, on peut prendre $n_0 = 0$, sinon prendre n'importe quel nombre strictement supérieur au plus grand sommet.

[4] Et donc comme toute partie non vide de $\mathbf{N}$, il possède un plus petit élément.

3. Nous venons de prouver que pour toute suite (u_n), il existe une suite $(u_{\varphi(n)})$ extraite de (u_n), qui est monotone.
Si de plus (u_n) est bornée, $(u_{\varphi(n)})$ l'est aussi. Et donc par le théorème de la limite monotone, elle converge.
Autrement dit, nous venons de prouver que de toute suite bornée on peut extraire une suite qui converge : $\boxed{\text{c'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.}}$