

DEVOIR SURVEILLÉ 3

► Exercice 1 : une équation fonctionnelle

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$, dérivables, vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \quad (\star).$$

I. Résolution d'équations différentielles.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0$.
2. Soit $a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$(E_a) : y''(t) - 2y'(t) + y(t) = e^{at}.$$

II. Analyse

Dans cette partie, $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction dérivable vérifiant $(\star)$.

3. Justifier que f est deux fois dérivable.
4. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients non constants, satisfaite par f .
5. On définit une fonction z sur $\mathbf{R}$ par : $\forall t \in \mathbf{R}, z(t) = f(e^t)$.
 - a. Justifier que z est deux fois dérivable, et exprimer f, f', f'' à l'aide de z, z', z'' .
 - b. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants dont z est solution.
 - c. En utilisant la partie I, montrer qu'il existe deux réels λ, μ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x) = \lambda x \ln(x) + \mu x - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4}.$$

III. Synthèse

6. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ dérivables et vérifiant $(\star)$.

► **Exercice 2 : irrationalité de $\tan r$ et $\operatorname{Arctan} r$, $r \in \mathbb{Q}^*$.**

Dans toute la suite, r est un nombre rationnel tel que $r \neq 0 \pmod{\pi}$.

On fixe deux entiers $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \frac{a}{b}$.

On souhaite prouver que $\tan \frac{r}{2}$ (qui est bien défini car $\frac{r}{2} \neq 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$ et donc $\frac{r}{2} \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$) est irrationnel.

On raisonne par l'absurde en supposant $\tan \frac{r}{2} \in \mathbb{Q}$, et on fixe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\tan \frac{r}{2} = \frac{p}{q}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \begin{cases} [0, r] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{(x(r-x))^n}{n!} \end{cases}$, et on note $I_n = \int_0^r f_n(x) \sin(x) dx$.

1. a. Prouver que pour tout $x \in [0, r]$, $0 \leq x(r-x) \leq \frac{r^2}{4}$.

b. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|I_n| \leq \frac{r^{2n+1}}{n!4^n}$.

2. **Un résultat de croissance comparée.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a. En notant que $\frac{x^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{x}{k}$, prouver que pour tout entier $n > \lfloor x \rfloor$, on a $\frac{x^n}{n!} \leq \frac{x}{n} \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!}$.

b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

c. Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n I_n = 0$.

3. Calculer I_0 et justifier que $I_1 = 2(1 - \cos r) - r \sin r$.

4. Soit $n \geq 2$.

a. Prouver que $I_n = - \int_0^r f_n''(x) \sin(x) dx$.

b. En déduire que $I_n = (4n - 2)I_{n-1} - r^2 I_{n-2}$.

5. Montrer soigneusement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_{n,0}, \dots, a_{n,n}, b_{n,0}, \dots, b_{n,n} \in \mathbb{Z}$ tels que

$$I_n = (1 - \cos r) \sum_{k=0}^n a_{n,k} r^k + \sin r \sum_{k=0}^n b_{n,k} r^k.$$

Dans la suite, pour $n \in \mathbb{N}$, on notera $\alpha_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} r^k$ et $\beta_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} r^k$ de sorte que $I_n = \alpha_n(1 - \cos r) + \beta_n \sin r$.

6. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{I_n}{\sin r} = \alpha_n \tan \frac{r}{2} + \beta_n.$$

7. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{b^n q}{\sin r} I_n \in \mathbb{Z}$.

8. **Le cas $r \in]0, \pi[$.** Dans cette question on suppose que $r \in]0, \pi[$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{b^n q}{\sin r} I_n \right| \geq 1$.

c. Aboutir alors à une contradiction et en déduire que $\tan \frac{r}{2} \notin \mathbb{Q}$.

9. À l'aide de la question précédente, prouver que π est irrationnel.

10. **Le cas général :** dans la suite, r est de nouveau un rationnel non congru à 0 modulo π .

a. À l'aide de la question 4.b, prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'un au moins des deux nombres I_n et I_{n+1} est non nul.

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{b^n q}{\sin r} I_n \right| + \left| \frac{b^{n+1} q}{\sin r} I_{n+1} \right| \geq 1$.

c. Prouver alors que $\tan \frac{r}{2}$ est irrationnel.

11. Montrer finalement que pour tout $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\tan q$ est bien défini, et que $\tan q$ et $\operatorname{Arctan} q$ sont irrationnels.

► Exercice 3 : autour des solutions d'une équation de degré 2.

Dans cet exercice, a et b désignent deux nombres complexes non nuls, et on note (E) l'équation $z^2 - 2az + b = 0$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Soient z_1, z_2 deux complexes tels que l'ensemble des solutions de (E) soit $\{z_1, z_2\}$.

En d'autres termes, z_1 et z_2 sont les deux solutions, éventuellement confondues, de (E) .

1. **Question préliminaire** : exprimer $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ en fonction de a et b . Justifier alors que z_1 et z_2 sont non nuls.

Partie I. Étude d'un cas particulier

Dans toute cette partie, et seulement dans cette partie, on suppose que $b = -6 + 8i$.

On note M_1 le point du plan d'affixe z_1 , M_2 le point d'affixe z_2 .

2. Résoudre l'équation (E) dans le cas où $a = \frac{1}{2} - 2i$. *Indication* : $41^2 = 1681$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que le milieu du segment $[M_1 M_2]$ soit situé sur l'axe des ordonnées.
4. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
5. Soit A le point d'affixe $2a$.
 - a. Montrer que le triangle $AM_1 M_2$ est isocèle et rectangle en A si et seulement si $z_1 \in \{a(1+i), a(1-i)\}$.
 - b. En déduire que $AM_1 M_2$ est isocèle et rectangle en A si et seulement si $b = 2a^2$.
 - c. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $AM_1 M_2$ est isocèle et rectangle en A .

Partie II. Étude des solutions d'une équation de degré 2.

On revient au cas général (avec $a, b \in \mathbb{C}^*$), et on note $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ les formes exponentielles de z_1 et z_2 , avec $(r_1, r_2, \theta_1, \theta_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \times]-\pi, \pi]^2$.

6. **Une condition nécessaire et suffisante pour que $z_1 = \overline{z_2}$.**

Montrer que z_1 et z_2 sont conjugués si et seulement si a et b sont tous les deux réels et que $a^2 - b \leq 0$.

7. **Une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1| = |z_2|$.**

- a. On suppose que $r_1 = r_2$. Déterminer alors les formes exponentielles de a et b , et en déduire que $\frac{a^2}{b}$ est un nombre réel, appartenant à l'intervalle $]0, 1]$.
- b. Inversement, on suppose que $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$.
Montrer que le discriminant de (E) est égal à $(2a)^2 \left(1 - \frac{b}{a^2}\right)$, et en déduire que $|z_1| = |z_2|$.

8. **Une condition nécessaire et suffisante pour que $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.**

- a. On suppose que $\theta_1 = \theta_2$. À l'aide de la forme exponentielle de $\frac{a^2}{b}$, montrer que $\frac{a^2}{b}$ est un réel appartenant à $[1, +\infty[$.
- b. À l'inverse, on suppose que $\frac{a^2}{b} \in [1, +\infty[$. Prouver que $\arg(z_1) = \arg(z_2)$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 3

► Exercice 1 : une équation fonctionnelle

I. Résolution d'équations différentielles.

1. L'équation est homogène, de polynôme caractéristique égal à $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$.

Donc l'ensemble des solutions de (E_0) est $\boxed{\{t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}}$.

2. Puisque 1 est la seule racine du polynôme caractéristique, et que $a \neq 1$, nous savons qu'il existe une solution de (E_a) sous la forme $t \mapsto \lambda e^{at}$.

Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y : t \mapsto \lambda e^{at}$. Alors y est solution de (E_a) si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, a^2 \lambda e^{at} - 2a \lambda e^{at} + \lambda e^{at} = e^{at}.$$

Soit si et seulement si $\lambda(a^2 - 2a + 1) = 1$, donc si et seulement si $\lambda = \frac{1}{(a-1)^2}$.

Ainsi, $t \mapsto \frac{1}{(a-1)^2} e^{at}$ est une solution particulière de (E_a) , si bien que l'ensemble des solutions de (E_a) est

$$\left\{ t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t + \frac{e^{at}}{(a-1)^2}, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Détails

L'équation homogène associée a déjà été résolue à la question précédente.

II. Analyse

3. Par hypothèse f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Mais alors par composition $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ est encore dérivable, et donc par somme et produit, $f' : x \mapsto x f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable.}}$

4. En dérivant la relation $(\star)$, on a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - x \frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) + 2x = f\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} f'\left(\frac{1}{x}\right) + 2x.$$

Or $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} (f'(x) - x^2) = \frac{1}{x} f'(x) - x$. Et par ailleurs, $f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f(x) + \frac{1}{x^2}$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f''(x) = \frac{1}{x} f'(x) - x - \frac{1}{x^2} f(x) - \frac{1}{x^3} + 2x.$$

Soit encore

$$f'''(x) - \frac{1}{x} f'(x) + \frac{1}{x^2} f(x) = x - \frac{1}{x^3}.$$

Donc $\boxed{f \text{ est solution de l'équation différentielle } y''(x) - \frac{1}{x} y'(x) + \frac{1}{x^2} y(x) = x - \frac{1}{x^3}.}$

Détails

C'est la relation $(\star)$ évaluée en $\frac{1}{x}$.

- 5.a. Puisque f est dérivable, z l'est avec $z' : t \mapsto e^t f'(e^t)$.
Et donc par produit et composition, z' est encore dérivable.
Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = f(e^{\ln x}) = z(\ln x)$.
Et donc en dérivant, il vient, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln x)} \text{ puis } \boxed{f''(x) = \frac{1}{x^2} z''(\ln x) - \frac{1}{x^2} z'(\ln x)}.$$

- 5.b. Utilisons l'équation différentielle vérifiée par f établie à la question 4 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 f''(x) - x f'(x) + f(x) = x^3 - \frac{1}{x}.$$

Et donc en remplaçant,

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, z''(\ln(x)) - z'(\ln x) - z'(\ln x) + z(\ln x) = x^3 - \frac{1}{x}.$$

Et donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, en prenant $x = e^t$,

$$z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^{3t} - e^{-t}.$$

- 5.c. Notons (E') l'équation différentielle vérifiée par z . L'équation homogène associée est celle qui a été résolue à la question 1, donc il s'agit de trouver une solution particulière. Pour cela, utilisons le principe de superposition, en cherchant des solutions particulières aux deux équations

$$(E'_1) : z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^{3t} \text{ et } (E'_2) : z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^{-t}.$$

Ces deux équations sont de la forme étudiée à la question 2, et donc une solution particulière de (E'_1) est $t \mapsto \frac{1}{(3-1)^2}e^{3t} = \frac{1}{4}e^{3t}$ et une solution particulière de (E'_2) est $t \mapsto \frac{1}{(-1-1)^2}e^{-t} = \frac{1}{4}e^{-t}$.

Et donc¹ une solution particulière de (E') est $t \mapsto \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t}$.

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E') est

$$\left\{ t \mapsto (\lambda t + \mu)e^t + \frac{e^{3t}}{4} - \frac{e^{-t}}{4}, (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

Et en particulier, il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $z(t) = (\lambda t + \mu)e^t + \frac{e^{3t}}{4} - \frac{e^{-t}}{4}$.
Et alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$f(x) = z(\ln(x)) = \lambda x \ln x + \mu x + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{4x}.$$

III. Synthèse

6. Inversement, soient $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, et soit $f : x \mapsto \lambda x + \mu x \ln x + \frac{x^3}{4} - \frac{1}{4x}$.

Alors f est dérivable, et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) = \lambda + \mu \ln(x) + \mu + \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{4x^2}$.

Par ailleurs, $xf\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 = \lambda + \mu x \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) - x \frac{1}{4} + x \frac{1}{4x^3} + x^2 = \lambda - \mu \ln(x) + \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{4x^2}$.

Donc f vérifie $(\star)$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\mu(\ln x + 1) = -\mu \ln(x)$.

En particulier, si f vérifie $(\star)$, alors pour $x = 1$, $\mu = 0$.

Et inversement, si $\mu = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\mu(\ln x + 1) = 0 = -\mu \ln(x)$, si bien que f vérifie $(\star)$.

Puisqu'on a déjà dit que toutes les fonctions vérifiant $(\star)$ sont de la forme ci-dessus, l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ dérivables et vérifiant $(\star)$ est

$$\left\{ x \mapsto \lambda x - \frac{1}{4x} + \frac{x^3}{4}, \lambda \in \mathbf{R} \right\}.$$

► Exercice 2 : irrationalité de $\tan r$, $r \in \mathbf{Q}^*$.

- 1.a. La positivité est évidente. La fonction $f : x \mapsto x(r-x)$ est dérivable sur $[0, r]$, avec $\forall x \in [0, r]$, $f'(x) = r - 2x$.
Et donc f est croissante sur $[0, \frac{r}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{r}{2}, r]$. Elle admet donc un maximum en $\frac{r}{2}$ égal à $f(\frac{r}{2}) = \frac{r}{2}(r - \frac{r}{2}) = \frac{r^2}{4}$.

Et donc pour tout $x \in [0, r]$, $0 \leq x(r-x) \leq \frac{r^2}{4}$.

Alternative

Il est bien connu qu'une fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a < 0$ possède un maximum en $-\frac{b}{2a}$, qui ici est égal à $\frac{r}{2}$.

1.b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Par l'inégalité triangulaire pour les intégrales², on a

² Qui s'applique puisque $r > 0$.

$$\begin{aligned} |I_n| &= \left| \int_0^r f_n(x) \sin(x) dx \right| \leq \int_0^r |f_n(x)| |\sin(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_0^r |x(r-x)|^n dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^r \left(\frac{r^2}{4}\right)^n dx \leq \frac{r}{n!} \left(\frac{r^2}{4}\right)^n \leq \boxed{\frac{r^{2n+1}}{n!4^n}}. \end{aligned}$$

2. Un résultat de croissance comparée.

2.a. Soit $n > \lfloor x \rfloor$. Alors $n! = \prod_{k=1}^n k$, si bien que

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{\prod_{k=1}^n x}{\prod_{k=1}^n k} = \prod_{k=1}^n \frac{x}{k} = \prod_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x}{k} \times \underbrace{\prod_{k=\lfloor x \rfloor+1}^{n-1} \frac{x}{k}}_{\leq 1} \times \frac{x}{n} \leq \prod_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{x}{k} \times \frac{x}{n} \leq \boxed{\frac{x x^{\lfloor x \rfloor}}{n \lfloor x \rfloor!}}.$$

2.b. Comme $\frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor!}$ est une constante et que $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x x^{\lfloor x \rfloor}}{n \lfloor x \rfloor!} = 0$.

Et puisque $0 \leq \frac{x^n}{n!} \leq \frac{x x^{\lfloor x \rfloor}}{n \lfloor x \rfloor!}$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

2.c. On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|b^n I_n| \leq b^n \frac{r^{2n+1}}{n!4^n} \leq r \left(\frac{br^2}{4}\right)^n \frac{1}{n!}$.

Par la question 2.b, appliquée avec $x = \frac{br^2}{4} > 0$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{br^2}{4}\right)^n \frac{1}{n!} = 0$, si bien que

par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n I_n = 0$.

3. On a $I_0 = \int_0^r \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^r = \boxed{1 - \cos(r)}$.

Puis $I_1 = \int_0^r (rx - x^2) \sin(x) dx$. Procédons alors à deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= [- (rx - x^2) \cos(x)]_0^r + \int_0^r (r - 2x) \cos(x) dx = \int_0^r (r - 2x) \cos(x) dx \\ &= [- (r - 2x) \sin(x)]_0^r + 2 \int_0^r \sin(x) dx = -r \sin r + 2 \int_0^r \sin(x) dx = \boxed{2(1 - \cos r) - r \sin r}. \end{aligned}$$

4.a. Là encore, procédons à des intégrations par parties³ :

³ Légitime puisque toutes les fonctions en jeu sont bien $\mathcal{C}_1^1$.

$$I_n = [-f_n(x) \cos(x)]_0^r + \int_0^r f_n'(x) \cos(x) dx = \int_0^r f_n'(x) \cos(x) dx = [f_n'(x) \sin(x)]_0^r - \int_0^r f_n''(x) \sin(x) dx.$$

Mais pour tout $x \in [0, r]$,

$$f_n'(x) = \frac{n}{n!} (r - 2x) (rx - x^2)^{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} (r - 2x) (rx - x^2)^{n-1}.$$

On en déduit notamment que $f_n'(r) = 0$ et donc, $[f_n'(x) \sin(x)]_0^r = 0$.

$$\text{Ainsi, } \boxed{I_n = - \int_0^r f_n''(x) \sin(x) dx.}$$

4.b. De plus, pour $x \in [0, r]$, on a $f_n''(x) = \frac{-2}{(n-1)!} (rx - x^2)^{n-1} + \frac{1}{(n-2)!} (r - 2x)^2 (rx - x^2)^{n-2}$.

Notons alors que $(r - 2x)^2 = 4x^2 - 4rx + r^2 = -4(rx - x^2) + r^2$, si bien que

$$\begin{aligned} I_n &= 2 \int_0^r \frac{(rx - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} \sin(x) dx + \int_0^r \frac{(n-1)(4(rx - x^2) - r^2)}{(n-1)!} (rx - x^2)^{n-2} \sin(x) dx \\ &= 2I_{n-1} + 4(n-1) \int_0^r \frac{(rx - x^2)^{n-1}}{(n-1)!} \sin(x) dx - r^2 \int_0^r \frac{(rx - x^2)^{n-2}}{(n-2)!} \sin(x) dx \\ &= 2I_{n-1} + 4(n-1)I_{n-1} - r^2 I_{n-2} \\ &= \boxed{(4n-2)I_{n-1} - r^2 I_{n-2}}. \end{aligned}$$

5. Procédons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$.

Pour $n = 0$, puisque $I_0 = 1 - \cos r$, il suffit de prendre $a_{0,0} = 1$ et $b_{0,0} = 0$.

Pour $n = 1$, puisque $I_1 = 2(1 - \cos r) - r \sin r$, on peut prendre $a_{1,1} = 0$, $a_{1,0} = 2$, $b_{1,1} = -1$ et $b_{1,0} = 0$.

Soit $n \geq 2$. Supposons qu'il existe des entiers $a_{n-1,0}, \dots, a_{n-1,n-1}$, $b_{n-1,0}, \dots, b_{n-1,n-1}$ et des entiers $a_{n-2,0}, \dots, a_{n-2,n-2}$, $b_{n-2,0}, \dots, b_{n-2,n-2}$ tels que

$$I_{n-1} = (1 - \cos r) \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} r^k + \sin r \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k} r^k \text{ et } I_{n-2} = (1 - \cos r) \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-2,k} r^k + \sin r \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k} r^k.$$

Alors par la formule de la question 4.b,

$$\begin{aligned} I_n &= (4n-2)I_{n-1} - r^2 I_{n-2} \\ &= (4n-2)(1 - \cos r) \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} r^k + (4n-2) \sin r \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-1,k} r^k - r^2 (1 - \cos r) \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-2,k} r^k - r^2 \sin r \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k} r^k \\ &= (1 - \cos r) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (4n-2) a_{n-1,k} r^k - \sum_{k=0}^{n-2} a_{n-2,k} r^{k+2} \right) + \sin r \left(\sum_{k=0}^{n-1} (4n-2) b_{n-1,k} r^k - \sum_{k=0}^{n-2} b_{n-2,k} r^{k+2} \right) \\ &= (1 - \cos r) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (4n-2) a_{n-1,k} r^k - \sum_{k=2}^n a_{n-2,k-2} r^k \right) + \sin r \left(\sum_{k=0}^{n-1} (4n-2) b_{n-1,k} r^k - \sum_{k=2}^n b_{n-2,k-2} r^k \right) \end{aligned}$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons alors

$$a_{n,k} = \begin{cases} (4n-2)a_{n-1,k} & \text{si } 0 \leq k \leq 1 \\ (4n-2)a_{n-1,k} - a_{n-2,k-2} & \text{si } 2 \leq k \leq n-1 \\ -a_{n-2,n-2} & \text{si } k = n \end{cases} \text{ et } b_{n,k} = \begin{cases} (4n-2)b_{n-1,k} & \text{si } 0 \leq k \leq 1 \\ (4n-2)b_{n-1,k} - b_{n-2,k-2} & \text{si } 2 \leq k \leq n-1 \\ -b_{n-2,n-2} & \text{si } k = n \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que les $a_{n,k}$ et les $b_{n,k}$ sont entiers⁴, et alors

⁴ Car somme et produit d'entiers.

$$I_n = (1 - \cos r) \sum_{k=0}^n a_{n,k} r^k + \sin r \sum_{k=0}^n b_{n,k} r^k.$$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang n .

Par le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe des entiers $a_{n,0}, \dots, a_{n,n}$, $b_{n,0}, \dots, b_{n,n}$

tels que $I_n = (1 - \cos r) \sum_{k=0}^n a_{n,k} r^k + \sin r \sum_{k=0}^n b_{n,k} r^k$.

On notera que puisque $b_{n,n} = -b_{n-2,n-2}$ et qu'on connaît $b_{0,0} = 0$ et $b_{1,1} = -1$, alors on

pourrait en déduire facilement que $b_{n,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{p-1} & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair} \end{cases}$.

On pourrait de même obtenir une expression de $a_{n,n}$, ainsi que de $a_{n,0}$ et $b_{n,0}$.

6. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a donc

$$\frac{I_n}{\sin r} = \alpha_n \frac{1 - \cos r}{\sin r} + \beta_n \frac{\sin r}{\sin r}.$$

$$\text{Mais } \frac{1 - \cos r}{\sin r} = \frac{1 - \cos\left(2\frac{r}{2}\right)}{\sin\left(2\frac{r}{2}\right)} = \frac{2 \sin^2 \frac{r}{2}}{2 \sin \frac{r}{2} \cos \frac{r}{2}} = \frac{\sin \frac{r}{2}}{\cos \frac{r}{2}} = \tan \frac{r}{2}.$$

Rappel

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x).$$

$$\text{Et donc } \frac{I_n}{\sin r} = \alpha_n \tan \frac{r}{2} + \beta_n.$$

7. Soit $n \in \mathbf{N}$. Avec les notations précédentes⁵, on a

⁵ Et en se rappelant que $r = \frac{a}{b}$.

$$b^n \alpha_n = b^n \sum_{k=0}^n a_{n,k} r^k = b^n \sum_{k=0}^n a_{n,k} \frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^n a_{n,k} a^k b^{n-k} \in \mathbf{Z}.$$

De même, $b^n \beta_n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} a^k b^{n-k} \in \mathbf{Z}$.

Enfin, $q \tan \frac{r}{2} = q \frac{a}{b} = p \in \mathbf{Z}$.

Et donc par somme d'entiers, $\frac{b^n q}{\sin r} I_n = b^n \alpha_n q \tan \frac{r}{2} + q b^n \beta_n \in \mathbf{Z}$.

8. Le cas $r \in]0, \pi[$.
- 8.a. Puisque $[0, r] \subset [0, \pi]$, pour tout $x \in [0, r]$, $\sin(x) \geq 0$ et donc $f_n(x) \sin(x) \geq 0$.
Par positivité de l'intégrale, on a donc $I_n \geq 0$.
Mais puisque la fonction $x \mapsto f_n(x) \sin(x)$ est continue et positive sur $[0, r]$, et que ce n'est pas la fonction nulle (par exemple car elle ne s'annule pas en $\frac{r}{2}$), alors $I_n \neq 0$, si bien que $I_n > 0$.
- 8.b. Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\left| \frac{b^n q}{\sin r} I_n \right|$ est un entier non nul⁶, si bien que $\left| \frac{b^n q}{\sin r} I_n \right| \geq 1$.
- 8.c. Puisque $b^n I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente, il vient $0 \geq 1$, ce qui est absurde.
C'est donc que notre hypothèse de départ est fausse, et donc $\tan \frac{r}{2} \notin \mathbf{Q}$.
9. Supposons par l'absurde que π soit rationnel. Alors $\frac{\pi}{2}$ est un rationnel dans $]0, \pi[$, et donc par la question précédente, $\tan \frac{\pi}{4} \notin \mathbf{Q}$.
Or $\tan \frac{\pi}{4} = 1 \in \mathbf{Q}$, d'où une contradiction. Ainsi, π est irrationnel.
10. Le cas général.
- 10.a. Procédons par récurrence simple sur $n \in \mathbf{N}$. On a déjà $I_0 = 1 - \cos r \neq 0$ car $r \neq 0 \pmod{\pi}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que l'un au moins des deux nombres I_n et I_{n+1} soit non nul.
Si $I_{n+1} \neq 0$, alors l'un au moins des deux nombres I_{n+1} et I_{n+2} est non nul.
Et si $I_{n+1} = 0$, alors c'est que $I_n \neq 0$. Mais alors par la question 4.b,

$$I_{n+2} = (4n+6)I_{n+1} - r^2 I_n = -r^2 I_n \neq 0.$$

Et donc dans tous les cas, l'un au moins des deux nombres I_{n+1} et I_{n+2} est non nul, si bien que notre propriété est vérifiée au rang $n+1$.

Par le principe de récurrence simple, pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'un au moins des deux nombres I_n et I_{n+1} est non nul.

- 10.b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme à la question 9.b, $\frac{b^n q}{\sin r} I_n$ et $\frac{b^{n+1} q}{\sin r} I_{n+1}$ sont deux entiers, dont l'un au moins est non nul.
Et donc $\left| \frac{b^n q}{\sin r} I_n \right| + \left| \frac{b^{n+1} q}{\sin r} I_{n+1} \right| \geq 1$.
- 10.c. Comme en 9.c, puisque $b^n I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\frac{b^n q}{\sin r} I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{b^{n+1} q}{\sin r} I_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Et donc par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente, $0 \geq 1$, ce qui est absurde.
Et donc $\tan \frac{r}{2} \notin \mathbf{Q}$.
11. Soit $q \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$. Alors $2q \in \mathbf{Q}$, et $2q \neq 0 \pmod{\pi}$.
En effet, dans le cas contraire, il existerait $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ tel que $2q = k\pi$, et donc $\pi = \frac{2q}{k} \in \mathbf{Q}$.
Or nous avons déjà prouvé que π est irrationnel. On en déduit donc que $2q \neq 0 \pmod{\pi}$.
Et donc d'après la question 10.c, $\tan q = \tan \frac{2q}{2} \notin \mathbf{Q}$.
Enfin, si on avait $\operatorname{Arctan}(q) \in \mathbf{Q}$, puisque $q \neq 0$, $\operatorname{Arctan} q \neq 0$ et donc $\operatorname{Arctan}(q) \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$.
Mais alors comme nous l'avons prouvé précédemment, $q = \tan(\operatorname{Arctan} q) \notin \mathbf{Q}$, ce qui est absurde.
Et donc pour tout $q \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Arctan} q \notin \mathbf{Q}$.

► Exercice 3 : autour des solutions d'une équation de degré 2.

1. Il s'agit des relations racines-coefficients données en cours : on a $z_1 + z_2 = 2a$ et $z_1 z_2 = b$.
Puisque $b \neq 0$, on a donc z_1 et z_2 non nuls.

Partie I. Étude d'un cas particulier

2. Il s'agit donc de résoudre l'équation du second degré $z^2 - (1-4i)z - 6+8i = 0$.
Son discriminant est $\Delta = (1-4i)^2 - 4(-6+8i) = 1 - 8i - 16 + 24 - 32i = 9 - 40i$.
Cherchons donc une racine carrée de Δ sous forme algébrique $\delta = c + id$.

$$\text{On a alors } \delta^2 = 9 - 40i \Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - d^2 = 9 \\ 2cd = -40 \\ c^2 + d^2 = |\Delta| = \sqrt{1681} = 41 \end{cases}$$

Rappel

Une fonction continue et positive sur $[a, b]$, avec $a < b$, est d'intégrale nulle si et seulement si c'est la fonction nulle.

⁶ Car aucun des facteurs du produit n'est nul.

Alors en sommant la première et la dernière équation, il vient $2c^2 = 50$ et donc $c = \pm 5$.

Puisque $cd = -20$, si $c = 5$, alors $d = -4$ et si $c = -5$, alors $d = 4$.

Donc $\delta = 5 - 4i$ est une racine carrée de $9 - 40i$.

Et donc les solutions de l'équation (E) sont

$$\frac{1 - 4i + 5 - 4i}{2} = 3 - 4i \text{ et } \frac{1 - 4i - 5 + 4i}{2} = -2.$$

3. Le milieu de $[M_1M_2]$ est sur l'axe des ordonnées si et seulement si $\frac{z_1+z_2}{2} \in i\mathbf{R}$.
Mais $z_1 + z_2 = 2a$, donc le milieu de $[M_1M_2]$ est sur l'axe des ordonnées si et seulement si a est imaginaire pur.
4. Les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses si et seulement si $z_1 = \overline{z_2}$.
Mais si c'est le cas, alors $b = z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2$.
Puisque b n'est pas réel, ceci n'est pas possible : il n'existe pas de tel a .
- 5.a. Le triangle AM_1M_2 est isocèle et rectangle en A si et seulement si M_1 est l'image de M_2 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ ou par la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
Autrement dit si et seulement si

$$z_1 = \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{=i} (z_2 - 2a) + 2a \text{ ou } z_1 = \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{=-i} (z_2 - 2a) + 2a.$$

Mais puisque $z_1 + z_2 = 2a$, alors $z_2 - 2a = z_1$, et donc

$$z_1 = i(z_2 - 2a) + 2a \Leftrightarrow z_1 = iz_1 + 2a \Leftrightarrow z_1(1 - i) = 2a \Leftrightarrow z_1 = \frac{2a}{1 - i} = \frac{2a(1 + i)}{|1 - i|^2} = a(1 + i).$$

Et de même, $z_1 = -i(z_2 - 2a) + 2a \Leftrightarrow z_1 = a(1 - i)$.

Et donc AM_1M_2 est isocèle rectangle en A si et seulement si $z_1 = a(1 + i)$ ou $z_1 = a(1 - i)$.

- 5.b. Si $z_1 = a(1 + i)$, alors $z_2 = 2a - z_1 = a(1 - i)$.
Et alors $b = z_1 z_2 = a^2(1 + i)(1 - i) = 2a^2$.
De même, si $z_1 = a(1 - i)$, alors $z_2 = 2a - z_1 = a(1 + i)$, et donc $b = 2a^2$.

Inversement, si $b = 2a^2$, alors l'équation (E) est l'équation $z^2 - 2az + 2a^2 = 0$, de discriminant $\Delta = 4a^2 - 8a^2 = -4a^2 = (2i)^2 a^2 = (2ia)^2$.

Donc les solutions de (E) sont $\frac{2a + 2ia}{2} = a(1 + i)$ et $\frac{2a - 2ia}{2} = a(1 - i)$.

Et par conséquent, $z_1 = a(1 + i)$ ou $z_1 = a(1 - i)$, de sorte que par la question précédente, AM_1M_2 est isocèle rectangle en A .

Par double implication, AM_1M_2 est isocèle rectangle en A si et seulement si $b = 2a^2$.

- 5.c. Il s'agit donc de trouver les racines carrées de $\frac{b}{2} = -3 + 4i$.
Ce sont $1 + 2i$ et $-1 - 2i$, de sorte que AM_1M_2 est isocèle rectangle en A si et seulement si $a = \pm(1 + 2i)$.

Partie II. Étude des solutions d'une équation de degré 2.

6. Il est classique que si a et b sont réels, avec $\Delta = 4(a^2 - b) \leq 0$, alors les deux solutions de l'équation sont conjuguées.

Inversement, supposons que $z_1 = \overline{z_2}$.

Alors $2a = z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} = 2\operatorname{Re}(z_1)$. Donc a est un réel.

Et $b = z_1 z_2 = z_1 \overline{z_1} = |z_1|^2 \in \mathbf{R}$.

Enfin, $a^2 - b = \operatorname{Re}(z_1)^2 - |z_1|^2 \leq 0$.

7. Une condition nécessaire et suffisante pour que $|z_1| = |z_2|$.

- 7.a. Si $r_1 = r_2$, alors $a = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{r_1}{2} (e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}) = r_1 e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} \right) = r_1 \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$.

Et donc $a^2 = r_1^2 \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Et $b = z_1 z_2 = r_1^2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

On en déduit donc que $\frac{a^2}{b} = \cos^2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right)$, qui est donc bien un réel de $[0, 1]$, nécessairement non nul car on a supposé $a \neq 0$.

$\Delta = 0$

Le cas où le discriminant est nul est un peu particulier :
on a alors $z_1 = z_2 \in \mathbf{R}$.
Donc on peut bien affirmer que z_1 et z_2 sont conjuguées.

Rappel

Pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|.$$

- 7.b. Inversement, supposons $\frac{a^2}{b} \in]0, 1]$, si bien que $\frac{b}{a^2} \in [1, +\infty[$. Alors le discriminant de (E) est

$$\Delta = 4a^2 - 4b = (2a)^2 \left(1 - \frac{b}{a^2}\right), \text{ avec } 1 - \frac{b}{a^2} \text{ un réel négatif.}$$

Donc une racine carrée de Δ est $\delta = 2ai\sqrt{\frac{b}{a^2} - 1}$.

$$\text{Et donc on a } z_1 = \frac{2a + \delta}{2} = a + ia\sqrt{\frac{b}{a^2} - 1} = a \left(1 + i\sqrt{\frac{b}{a^2} - 1}\right) \text{ et } z_2 = a \left(1 - i\sqrt{\frac{b}{a^2} - 1}\right).$$

Et donc on en déduit que

$$|z_1| = |a| \left|1 + i\sqrt{\frac{b}{a^2} - 1}\right| = |a| \left|1 - i\sqrt{\frac{b}{a^2} - 1}\right| = |z_2|.$$

Donc z_1 et z_2 ont bien le même module.

8. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\arg(z_1) = \arg(z_2)$

- 8.a. Cette fois, on a $a = \frac{z_1 + z_2}{2} = e^{i\theta_1} \frac{r_1 + r_2}{2}$ et $b = z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{2i\theta_1}$.

Et donc $\frac{a^2}{b} = \frac{(r_1 + r_2)^2}{4r_1 r_2}$. Donc déjà $\frac{a^2}{b}$ est un réel positif.

De plus, $(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 = r_1^2 + 2r_1 r_2 + r_2^2 - 4r_1 r_2 = (r_1 - r_2)^2 \geq 0$.

On en déduit que $(r_1 + r_2)^2 \geq 4r_1 r_2$ et donc que $\frac{a^2}{b} \geq 1$.

- 8.b. Le discriminant de (E) est toujours $\Delta = 4(a^2 - b) = (2a)^2 \left(1 - \frac{b}{a^2}\right)$.

Cette fois, $\frac{b}{a^2} \leq 1$ et donc $1 - \frac{b}{a^2} \geq 0$.

Donc les racines carrées de Δ sont $\pm 2a\sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}$.

On en déduit que les solutions de (E) sont $z_1 = a + a\sqrt{1 - \frac{b}{a^2}} = a \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}\right)$ et

$$z_2 = a \left(1 - \sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}\right).$$

Puisque $\sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}$ est un réel dans $[0, 1]$, $1 + \sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}$ et $1 - \sqrt{1 - \frac{b}{a^2}}$ sont des réels positifs, ils sont tous deux d'argument nul.

Et donc $\arg(z_1) = \arg(z_2) = \arg(a)$.

⚠ Danger !

N'oublions pas que a est un complexe, il n'est pas question d'écrire $\sqrt{a^2}$.

Conjugués

Les deux réels $1 \pm i\sqrt{\frac{b}{a^2} - 1}$ sont conjugués. En revanche, z_1 et z_2 ne sont pas forcément conjugués.

Argument

Rappelons que la multiplication par un réel positif ne change pas l'argument (alors que la multiplication par un réel négatif lui ajoute π).