

DEVOIR SURVEILLÉ 2

► Exercice 1 : un système à paramètre

 20 minutes

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Déterminer suivant la valeur de λ le nombre de solutions du système

$$\begin{cases} (3 - \lambda)x + y + 2z = 0 \\ x + (1 - \lambda)y = 0 \\ -x + y + (2 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

► Exercice 2 : ensembles

 50 minutes

Si A et B sont deux parties de $\mathbf{N}$, on note $A \trianglelefteq B$ si et seulement si $(A \subset B \text{ et } \forall x \in A, \forall y \in B \setminus A, x < y)$.

1. Soit $I = \{2n + 1, n \in \mathbf{N}\}$ l'ensemble des entiers impairs. A-t-on $I \trianglelefteq \mathbf{N}$? A-t-on $\mathbf{N} \trianglelefteq I$?

2. Déterminer toutes les parties $M \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ telles que $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbf{N}), M \trianglelefteq A$.

3. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbf{N}), (A \trianglelefteq B \text{ et } B \trianglelefteq C) \Rightarrow A \trianglelefteq C$.

4. Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbf{N}), A \trianglelefteq B \Rightarrow A = B$

ii) $\forall m \in \mathbf{N}, \exists a \in A, a \geq m$.

5. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ tels que $A \trianglelefteq C$ et $B \trianglelefteq C$.

a. Montrer que si $A \not\subset B$, alors $B \subset A$.

b. En déduire que $A \trianglelefteq B$ ou $B \trianglelefteq A$.

► Exercice 3 : nombres de Bernoulli et formule de Faulhaber

 1h

Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p$.

On définit une suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en posant $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbf{N}, b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} b_k$.

Les b_n sont appelés les nombres de BERNOULLI.

1. Donner sans justification les valeurs de $S_1(n)$ et $S_2(n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Partie I. Nombres de Bernoulli

2. Calculer b_1, b_2 et b_3 .

3. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}, b_n \in \mathbf{Q}$.

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = 0$.

Partie II. Formule de Faulhaber

Soit $p \in \mathbf{N}^*$ fixé. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $T_p(n) = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}$.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbf{N}, T_p(n+1) - T_p(n) = \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p+1}{k} \binom{p+1-k}{j} b_k n^j$.

6. Soient k, j deux entiers naturels vérifiant $k \leq p$ et $j \leq p - k$.

Exprimer $\binom{p+1}{k} \binom{p+1-k}{j}$ comme produit de deux coefficients binomiaux dont un seul dépend de k .

7. En utilisant le changement de variable $i = p - j$, prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $T_p(n+1) - T_p(n) = (p+1)n^p$.
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_p(n) = \frac{1}{p+1}T_p(n)$.
9. On admet que $b_3 = 0$ et $b_4 = -\frac{1}{30}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, donner la valeur de $\sum_{k=0}^n k^4$.

► Problème : autour du sinus hyperbolique



Dans tout le problème, on note φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\forall x \in \mathbf{R}, \varphi(x) = e^x - e^{-x}$.

1. Étudier la parité de φ , et prouver qu'elle est strictement croissante.
2. Justifier que φ est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}$, simplifier $\varphi'(x)^2 - \varphi(x)^2$.
En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) = \sqrt{4 + \varphi(x)^2}$.

Les deux parties I et II sont indépendantes.

Partie I. Étude d'une somme

Soit $p \in \mathbf{N}^*$ fixé. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=n}^{np} \varphi\left(\frac{1}{2k}\right)$.

On note g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = e^{\varphi(x)} - 1 - 2x$.

3. Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $2\varphi(\alpha) + 1 = 0$, et prouver que cet unique α est négatif.
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) + \varphi'(x)^2 \geq 0$.
5. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) \geq 0$. On pourra notamment dériver deux fois g pour dresser son tableau de variations.
6. En déduire que pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}[$, $1 + 2x \leq e^{\varphi(x)} \leq \frac{1}{1 - 2x}$.
7. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$.
8. En déduire que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.

Partie II. Étude d'une fonction

On définit une fonction f sur $\mathbf{R}_+^*$ en posant pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}$.

9. Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x^2} \varphi'\left(\frac{1}{x}\right) f(x)^2$.
10. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

Dans la suite, on note f^{-1} la bijection réciproque de f .

11. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\varphi\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}\right) = \frac{1}{x}$.
12. En déduire que f^{-1} est dérivable et que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)^2}{x\sqrt{1+4x^2}}$.
13. Soit $y \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer que l'équation $\varphi(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}_+^*$ possède une unique solution que l'on déterminera.
14. En déduire une expression de f^{-1} . Retrouver alors le résultat de la question 12.
15. Asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$
 - a. Déterminer la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x}$ et en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$.
 - b. On admet que $2 < e < 3$. Prouver que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \varphi(x) - 2x \leq 2x^2$.
 - c. En déduire que $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote au voisinage de $+\infty$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 2

► Exercice 1 : un système à paramètre

Commençons par observer que le système aura toujours au moins une solution, à savoir $(0, 0, 0)$. Ce qui nous assure déjà qu'il n'y aura jamais aucune solution.

Réolvons le système avec la méthode habituelle : pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{cases} (3-\lambda)x + y + 2z = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \\ -x + y + (2-\lambda)z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_1} \begin{cases} -x + y + (2-\lambda)z = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \\ (3-\lambda)x + y + 2z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + (3-\lambda)L_1} \begin{cases} -x + y + (2-\lambda)z = 0 \\ (2-\lambda)y + (2-\lambda)z = 0 \\ (4-\lambda)y + (\lambda^2 - 5\lambda + 8)z = 0 \end{cases}$$

Plus généralement

Un système linéaire dont le second membre est nul a toujours $(0, \dots, 0)$ comme solution.

► Si $\lambda = 2$, alors il reste $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2y + 2z = 0 \end{cases}$ qui possède une infinité de solutions (que l'on peut aisément déterminer, ce sont les $(y, y, -y)$, $y \in \mathbb{R}$).

► Si $\lambda \neq 2$, alors en divisant la seconde équation par $2 - \lambda \neq 0$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} -x + y + (2-\lambda)z = 0 \\ y + z = 0 \\ (4-\lambda)y + (\lambda^2 - 5\lambda + 8)z = 0 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - (4-\lambda)L_2} \begin{cases} -x + y + (2-\lambda)z = 0 \\ y + z = 0 \\ (\lambda^2 - 4\lambda + 4)z = 0 \end{cases}$$

Or $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \neq 0$ puisque $\lambda \neq 2$.

Et donc le système est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, donc il possède une unique solution (et bien que ce ne soit pas demandé, cette solution a été trouvée précédemment : c'est $(0, 0, 0)$).

Donc le système de l'énoncé possède toujours une unique solution, sauf lorsque $\lambda = 2$, où il possède une infinité de solutions.

► Exercice 2 : ensembles

1. On a bien $I \subset \mathbb{N}$, mais il n'est pas vrai que $\forall x \in I, \forall y \in \mathbb{N} \setminus I, x < y$.

En effet, $1 \in I$, $0 \in \mathbb{N} \setminus I$, mais $0 \leq 1$. Donc $\boxed{\text{on n'a pas } I \leq \mathbb{N}}$.

Et puisque $\mathbb{N} \not\subset I$, $\boxed{\text{on n'a pas } \mathbb{N} \leq I}$.

2. Si un tel ensemble M existe, il doit notamment vérifier $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), M \subset A$.

Or le seul ensemble possédant cette propriété est $M = \emptyset$.

Donc si un tel ensemble M existe, c'est l'ensemble vide.

De plus, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), \forall x \in \emptyset, \forall y \in A \setminus \emptyset, x < y$.

Et donc $M = \emptyset$ a bien la propriété souhaitée.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble vide est l'unique partie } M \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ telle que } \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), M \leq A}$.

3. Soient A, B, C trois parties de $\mathbb{N}$ avec $A \leq B$ et $B \leq C$.

Alors $A \subset B$ et $B \subset C$, si bien que $A \subset C$.

Soit alors $x \in A$ et $y \in C \setminus A$.

► Si $y \in B$, alors $y \in B \setminus A$, et puisque $A \leq B$, alors $x < y$.

► Sinon, $y \in C \setminus B$, et puisque $x \in A$, alors $x \in B$. Mais $B \leq C$, et donc $x < y$.

Ainsi, nous avons bien prouvé que $\forall x \in A, \forall y \in C \setminus A, x < y$, si bien que $\boxed{A \leq C}$.

4. $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Supposons que $\forall B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), A \leq B \Rightarrow A = B$.

Supposons par l'absurde que $ii)$ est fautive, c'est-à-dire qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall a \in A, a < m$, et soit alors un tel m .

Posons $B = A \cup \{m\}$. Alors $A \subset B$, et puisque m est strictement plus grand que tous les éléments de A , $m \notin A$.

Ainsi, $B \setminus A = \{m\}$, et donc¹ $\forall a \in A, \forall x \in B \setminus A, a < x$.

Rappel

Toute assertion commençant par $\forall x \in \emptyset$ est vraie.

Détails

La négation de

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists a \in A, a \geq m$$

est

$$\exists m \in \mathbb{N}, \forall a \in A, a < m.$$

¹ Car par définition de m ,

$$\forall a \in A, m > a.$$

Et donc $A \leq B$.

Mais par hypothèse, ceci implique $A = B$, ce qui est faux puisque $m \in B$ et $m \notin A$.

On en déduit donc que 2) est vraie.

$i) \Rightarrow ii)$ Supposons que 2) est vraie, et soit $B \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ telle que $A \leq B$.

Alors par définition, $A \subset B$. Supposons par l'absurde que $B \neq A$, et soit donc $m \in B$ tel que $m \notin A$.

Puisque $ii)$ est vraie, il existe $a \in A$ tel que $a \geq m$. Soit un tel a .

Alors $a \in A$ et $m \in B \setminus A$, si bien que $a < m$, ce qui contredit $a \geq m$.

C'est donc que $B \subset A$, et par double inclusion $A = B$.

Nous venons de prouver que $A \leq B \Rightarrow A = B$, et donc $i)$ est vraie.

5.a. Supposons $A \not\subset B$. Considérons alors un élément $a \in A$ tel que $a \notin B$.

Soit alors $b \in B$. Puisque $B \subset C$, alors $b \in C$.

Supposons par l'absurde que $b \notin A$, si bien que $b \in C \setminus A$.

Puisque $A \leq C$, alors $a < b$.

Mais par ailleurs, puisque $A \subset C$, $a \in C \setminus B$, et $b \in B$, si bien que $b < a$, ce qui est absurde.

Ainsi, $b \in A$, et ceci étant vrai pour tout $b \in B$, on a prouvé que $B \subset A$.

5.b. La question précédente prouve que $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Supposons par exemple que $A \subset B$, et prouvons qu'alors $A \leq B$.

Soit $a \in A$ et soit $b \in B \setminus A$. Alors $b \in C$ (car $B \subset C$) et donc $b \in C \setminus A$.

Puisque $a \in A$ et que $A \leq C$, alors $a < b$.

Nous venons donc de prouver que $\forall a \in A, \forall b \in B \setminus A, a < b$, et donc $A \leq B$.

On prouve de même que si $B \subset A$, alors $B \leq A$.

Et donc $A \leq B$ ou $B \leq A$.

⚠ Attention !

Si $A \not\subset B$, alors la négation de

$$\forall a \in A, a \in B$$

est fautive. C'est-à-dire que

$$\exists a \in A, a \notin B.$$

On notera que ce n'est pas la même chose que

$$\forall a \in A, a \notin B$$

qui signifie que A et B sont disjoints.

► Exercice 3 : nombres de Bernoulli et formule de Faulhaber

1. Il s'agit juste d'appliquer les formules du cours² : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$S_1(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2} \text{ et } S_2(n) = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}.$$

² En notant que la somme définissant $S_p(n)$ s'arrête à $n-1$ et non à n comme on en a l'habitude.

Partie I. Nombres de Bernoulli

2. On a donc $b_1 = b_{0+1} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^0 \binom{2}{k} b_k = -\frac{1}{2} \binom{2}{0} b_0 = -\frac{1}{2}$.

$$\text{Puis } b_2 = b_{1+1} = -\frac{1}{3} \left(\binom{3}{0} b_0 + \binom{3}{1} b_1 \right) = -\frac{1}{3} \left(1 - 3 \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Enfin } b_3 = b_{2+1} = -\frac{1}{4} \left(\binom{4}{0} b_0 + \binom{4}{1} b_1 + \binom{4}{2} b_2 \right) = -\frac{1}{4} \left(1 - 4 \frac{1}{2} + 6 \frac{1}{6} \right) = 0.$$

3. Prouvons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}$ que $b_n \in \mathbf{Q}$. On a déjà $b_0 \in \mathbf{Q}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, b_k \in \mathbf{Q}$.

$$\text{Alors } b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \underbrace{\binom{n+2}{k}}_{\in \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}} \underbrace{b_k}_{\in \mathbf{Q}} \in \mathbf{Q}.$$

Par le principe de récurrence forte, pour tout $n \in \mathbf{N}, b_n \in \mathbf{Q}$.

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k + \binom{n+1}{n} b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k + (n+1) b_{n-1+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k - (n+1) \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} b_k = 0.$$

Partie II. Formule de Faulhaber

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$T_p(n+1) - T_p(n) = \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k (n+1)^{p+1-k} - \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k n^{p+1-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k \left((n+1)^{p+1-k} - n^{p+1-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k \left(\sum_{j=0}^{p+1-k} \binom{p+1-k}{j} n^j - n^{p+1-k} \right) \\
&= \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} b_k \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p+1-k}{j} n^j \\
&= \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p+1}{k} \binom{p+1-k}{j} n^j.
\end{aligned}$$

Binôme de Newton.

6. On a donc

$$\begin{aligned}
\binom{p+1}{k} \binom{p+1-k}{j} &= \frac{(p+1)!}{k!(p+1-k)!} \frac{(p+1-k)!}{j!(p+1-k-j)!} \\
&= \frac{(p+1)!}{k!j!(p+1-k-j)!} \\
&= \frac{(p+1-j)!(p+1)!}{(p+1-j)!k!j!(p+1-j-k)!} = \frac{(p+1-j)!}{k!(p+1-j-k)!} \frac{(p+1)!}{j!(p+1-j)!} \\
&= \binom{p+1-j}{k} \binom{p+1}{j}.
\end{aligned}$$

Méthode

Puisqu'on a du $k!$ au dénominateur, on aimerait bien que le coefficient binomial dépendant de k soit de la forme $\binom{a}{k}$. Ce qui ferait apparaître un $(a-k)!$ au dénominateur. Puisqu'on a déjà un $(p+1-j-k)!$ au dénominateur, il est légitime de prendre $a = p+1-j$.

7. Soit $n \in \mathbf{N}$. Par la question précédente,

$$T_p(n+1) - T_p(n) = \sum_{k=0}^p \sum_{j=0}^{p-k} \binom{p+1-j}{k} \binom{p+1}{j} b_k n^j.$$

Comme indiqué, procédons au changement d'indice $i = p - j$, si bien que $j = p - i$ et donc

$$\begin{aligned}
T_p(n+1) - T_p(n) &= \sum_{k=0}^p \sum_{i=k}^p \binom{p+1-(p-i)}{k} \binom{p+1}{p-i} b_k n^{p-i} \\
&= \sum_{0 \leq k \leq i \leq p} \binom{i+1}{k} \binom{p+1}{p-i} b_k n^{p-i} \\
&= \sum_{i=0}^p \binom{p+1}{p-i} n^{p-i} \sum_{k=0}^i \binom{i+1}{k} b_k.
\end{aligned}$$

Bornes

Lorsque $j = 0$, $i = p$ et lorsque $j = p - k$, $i = k$.

Mais par la question 4, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=0}^i \binom{i+1}{k} b_k = 0$, si bien qu'il ne reste dans la somme ci-dessus que le terme $i = 0$. Et donc

$$T_p(n+1) - T_p(n) = \binom{p+1}{p} n^p = \binom{p+1}{1} n^p = (p+1)n^p.$$

8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors par somme télescopique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (T_p(k+1) - T_p(k)) = T_p(n) - \underbrace{T_p(0)}_{=0} = T_p(n).$$

Et par ailleurs, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (T_p(k+1) - T_p(k)) = \sum_{k=0}^{n-1} (p+1)k^p = (p+1) \sum_{k=0}^{n-1} k^p = (p+1)S_p(n).$$

Et donc $S_p(n) = \frac{1}{p+1} T_p(n).$

9. On a donc, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^4 &= S_4(n) + n^4 = \frac{1}{5} \sum_{k=0}^4 \binom{5}{k} b_k n^{5-k} + n^4 \\ &= \frac{1}{5} \left(\binom{5}{0} b_0 n^5 + \binom{5}{1} b_1 n^4 + \binom{5}{2} b_2 n^3 + \binom{5}{3} b_3 n^2 + \binom{5}{4} b_4 n \right) + n^4 = \frac{1}{5} \left(n^5 - \frac{5}{2} n^4 + 10 \frac{1}{6} n^3 - 5 \times \frac{1}{30} n \right) + n^4 \\ &= \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n + 30n^4}{30} = \boxed{\frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}}. \end{aligned}$$

► Problème : autour de la fonction sinus hyperbolique

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $\varphi(-x) = e^{-x} - e^x = -(e^x - e^{-x}) = -\varphi(x)$.

Donc φ est impaire.

Par ailleurs, $x \mapsto e^x$ est strictement croissante, donc $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante, et donc $x \mapsto -e^{-x}$ est croissante³.

Par somme de fonctions croissantes, et l'une des deux⁴ étant strictement croissante, φ est strictement croissante.

³ Et même strictement croissante.

⁴ Et en fait les deux.

2. Par somme de fonctions dérivables, φ est dérivable et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\varphi'(x) = e^x + e^{-x}.$$

On a alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\varphi'(x)^2 - \varphi(x)^2 = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + \underbrace{2e^x e^{-x}}_{=1} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}) = \boxed{4}.$$

Et donc $\varphi'(x)^2 = 4 + \varphi(x)^2$.

Puisque par ailleurs il est clair⁵ que $\varphi'(x) \geq 0$, alors $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) = \sqrt{4 + \varphi(x)^2}}.$

⁵ C'est une somme d'exponentielles.

Partie I. Étude d'une somme.

3. La fonction φ est dérivable, donc continue sur $\mathbf{R}$, et nous avons prouvé à la question 2 qu'elle est strictement croissante.

Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

Donc par le théorème de la bijection, φ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Et donc il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\varphi(\alpha) = -\frac{1}{2}$, soit encore $2\varphi(\alpha) + 1 = 0$.

On a alors $\varphi(\alpha) = -\frac{1}{2} < 0 = \varphi(0)$, et donc par stricte croissance de φ , $\boxed{\alpha < 0}$.

4. Notons $h : x \mapsto \varphi(x) + \varphi'(x)^2$.

Alors h est dérivable car somme et produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h'(x) = \varphi'(x) + \underbrace{2\varphi'(x) \varphi''(x)}_{=\varphi(x)} = \varphi'(x) (1 + 2\varphi(x)).$$

Or φ' est à valeurs positives, donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h'(x)$ est du signe de $1 + 2\varphi(x)$.

Mais $x \mapsto 1 + 2\varphi(x)$ est croissante, et donc h' est négative sur $] -\infty, \alpha[$ et positive sur $]\alpha, +\infty[$.

On en déduit que h est décroissante sur $] -\infty, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Elle admet donc un minimum en α , et $h(\alpha) = \underbrace{\varphi(\alpha) + \varphi'(\alpha)^2}_{=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + 4 + \varphi(\alpha)^2 > 0$.

Et par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) \geq h(\alpha) > 0$.

Nous avons donc prouvé que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) + \varphi(x)^2 \geq 0}.$

5. La fonction φ étant dérivable, g l'est car somme et composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)} - 2.$$

Rappel

Pour une fonction **strictement** croissante, on a $f(a) < f(b) \Leftrightarrow a < b$. Alors que pour une fonction croissante, l'implication $\Leftarrow$ n'est pas nécessairement vraie.

Puisque φ' est encore dérivable car somme de fonctions dérivables, g' est dérivable, et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g''(x) = \varphi'(x)^2 e^{\varphi(x)} + \varphi''(x) \varphi'(x) e^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)} (\varphi''(x) + \varphi'(x)^2).$$

Mais $\varphi'' = \varphi$, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g''(x) = e^{\varphi(x)} (\varphi(x) + \varphi'(x)^2) \geq 0$.

On en déduit que g' est croissante. Mais $g'(0) = \varphi''(0) e^{\varphi(0)} - 2 = 2e^0 - 2 = 0$.

Par croissance de g' , g' est négative sur $\mathbf{R}_-$, croissante sur $\mathbf{R}_+$.

Et donc g est décroissante sur $\mathbf{R}_-$, croissante sur $\mathbf{R}_+$ et donc admet un minimum en 0.

Détails

On a utilisé l'inégalité de la question précédente.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$		+	
$g'(x)$		0	
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		0	

Ce minimum vaut $g(0) = e^{\varphi(0)} - 1 = 0$, si bien que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, g(x) \geq 0.}$

6. On a donc déjà, par la question précédente, pour tout $x \in]0, \frac{1}{2}[$, $1 + 2x \leq e^{\varphi(x)}$.
Et par ailleurs, pour $x \in]0, \frac{1}{2}[$, par imparité de φ ,

$$e^{\varphi(x)} = e^{-\varphi(-x)} = \frac{1}{e^{\varphi(-x)}}.$$

Mais par la question 5, $\varphi(-x) \geq 1 + 2(-x) = 1 - 2x > 0$, et donc $e^{\varphi(x)} = \frac{1}{e^{\varphi(-x)}} \leq \frac{1}{1 - 2x}$.

7. Soit $n \geq 2$. Alors pour tout $k \in \llbracket n, np \rrbracket$, $\frac{1}{2k} \in]0, \frac{1}{2}[$ et donc

$$1 + 2\frac{1}{2k} \leq e^{\varphi(\frac{1}{2k})} \leq \frac{1}{1 - 2\frac{1}{2k}}.$$

Par croissance du $\ln$, $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \varphi\left(\frac{1}{2k}\right) \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Soit encore $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \varphi\left(\frac{1}{2k}\right) \leq -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$.

On en déduit, par somme d'inégalités, que

$$\sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq S_n \leq \sum_{k=n}^{np} -\ln\left(\frac{k-1}{k}\right).$$

$$\text{Or } \sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=n}^{np} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(np+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{np+1}{n}\right).$$

$$\text{Et de même, la somme } -\sum_{k=n}^{np} \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) \text{ est télescopique, égale à } -(\ln(n-1) - \ln(np)) = -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right).$$

$$\text{Et donc nous avons prouvé que } \boxed{\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)}.$$

8. Puisque $\frac{np+1}{n} = p + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$, par continuité du $\ln$, $\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p)$.

$$\text{De même, } -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln\left(\frac{1}{p}\right) = \ln(p).$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{(S_n) \text{ converge vers } \ln(p).}$

Continuité

C'est la continuité du $\ln$ en p qui garantit que puisque $\frac{np+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$, alors $\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p)$.

Partie II. Étude d'une fonction

9. Puisque φ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de même que $x \mapsto \frac{1}{x}$, alors par composée, $x \mapsto \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
Et donc par quotient, f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$. On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$f'(x) = -\frac{-\frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \boxed{\frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{1}{x}\right)f(x)^2}.$$

10. Puisque φ' est à valeurs strictement positives, de même que f , pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x) > 0$.
Donc f est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$, et continue car dérivable.
Puisque par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, par le théorème de la bijection,

f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

11. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Alors $f(f^{-1}(x)) = x$.

Soit encore $\frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}\right)} = x$ et donc $\boxed{\varphi\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}\right) = \frac{1}{x}}$.

12. Nous avons déjà mentionné que f est dérivable, et que sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbf{R}_+^*$.
Nous savons qu'alors f^{-1} est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{f^{-1}(x)^2}{\varphi'\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}\right)f(f^{-1}(x))^2} = \frac{f^{-1}(x)^2}{\varphi'\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}\right)x^2}.$$

Or par la question 2,

$$\varphi'\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}\right) = \sqrt{4 + \varphi\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}.$$

Et donc

$$(f^{-1})'(x) = \frac{f^{-1}(x)^2}{x^2\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = \boxed{\frac{f^{-1}(x)^2}{x\sqrt{4x^2 + 1}}}.$$

13. L'existence et l'unicité pourraient se prouver en appliquant le théorème de la bijection à φ , mais il ne nous donnerait pas la solution cherchée⁶.
Soit donc $y \in \mathbf{R}_+^*$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$. Alors

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow ye^x = (e^x)^2 - 1 \Leftrightarrow (e^x)^2 - ye^x - 1 = 0.$$

Donc $y = \varphi(x)$ si et seulement si e^x est solution de l'équation $X^2 - yX - 1 = 0$, d'inconnue X .

Le discriminant de cette équation est $\Delta = y^2 + 4 > 0$, et donc les deux solutions sont

$$X_1 = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{y - \sqrt{y^2 + 4}}{2}.$$

Puisque $X_1 > 0$ et $X_2 < 0$, on a donc $x = \varphi(y)$ si et seulement si $e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$.

Soit si et seulement si $\boxed{x = \ln\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}\right)}$, qui est donc la seule solution de l'équation.

14. Soient $x, y \in \mathbf{R}_+^*$. Alors

$$y = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)} = y \Leftrightarrow \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \ln\left(\frac{\frac{1}{y} + \sqrt{4 + \frac{1}{y^2}}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{4y^2 + 1}}{2y}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln\left(\frac{1 + \sqrt{4y^2 + 1}}{2y}\right)}.$$

Et donc pour tout $y \in \mathbf{R}_+^*$, $\boxed{f^{-1}(y) = \frac{1}{\ln\left(\frac{1 + \sqrt{4y^2 + 1}}{2y}\right)}}.$

⁶ C'est-à-dire la bijection réciproque de φ .

Par opération sur les fonctions usuelles, on retrouve alors la dérivabilité de f^{-1} . Pour calculer sa dérivée procédons par étape, et notons $u : x \mapsto \frac{1 + \sqrt{4x^2 + 1}}{2x}$. Alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\frac{8x \times 2x}{2\sqrt{4x^2+1}} - 2(1 + \sqrt{4x^2+1})}{4x^2} \\ &= \frac{8x^2 - 2\sqrt{4x^2+1} - 2(4x^2+1)}{4x^2\sqrt{4x^2+1}} = -\frac{1 + \sqrt{4x^2+1}}{2x^2\sqrt{4x^2+1}}. \end{aligned}$$

Si on pose $v = \ln(u)$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$v'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = -\frac{\frac{1+\sqrt{4x^2+1}}{2x^2\sqrt{4x^2+1}}}{\frac{1+\sqrt{4x^2+1}}{2x}} = -\frac{1 + \sqrt{4x^2+1}}{2x^2\sqrt{4x^2+1}} \frac{2x}{1 + \sqrt{4x^2+1}} = -\frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}.$$

Et enfin, $f^{-1} = \frac{1}{v}$ si bien que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -v'(x)f^{-1}(x)^2 = \boxed{\frac{f^{-1}(x)^2}{x\sqrt{4x^2+1}}}.$$

15. Asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

15.a. On a, pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \varphi'(0) = 2$.

Posons alors $X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, si bien que

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{X}{\varphi(X)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$$

15.b. Prouvons ces inégalités en étudiant des fonctions bien choisies. Définissons deux fonctions g_1 et g_2 sur $[0, 1]$ par

$$g_1 : x \mapsto \varphi(x) - 2x \text{ et } g_2 : x \mapsto \varphi(x) - 2x - 2x^2.$$

Alors g_1 est dérivable sur $[0, 1]$, et pour tout $x \in [0, 1]$, $g_1'(x) = \varphi'(x) - 2$. Puisque φ' est croissante sur $[0, 1]$, il en est de même de g_1' . Mais

$$g_1'(0) = e^0 + e^{-0} - 2 = 0$$

si bien que pour tout $x \in [0, 1]$, $g_1'(x) \geq 0$.

On en déduit que g_1 est croissante sur $[0, 1]$.

Puisque $g_1(0) = \varphi(0) = 0$, g_1 est positive sur $[0, 1]$ et donc pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \varphi(x) - 2x$.

De même, g_2 est deux fois dérivable sur $[0, 1]$, et pour tout $x \in [0, 1]$, $g_2'(x) = \varphi'(x) - 2 - 4x$ et $g_2''(x) = \varphi''(x) - 4$.

Donc g_2'' est croissante sur $[0, 1]$, et $g_2''(1) = e^1 - e^{-1} - 4 < 3 - 4 < 0$.

Par conséquent, g_2' est décroissante sur $[0, 1]$, avec $g_2'(1) = e^1 + e^{-1} - 6 < 3 + \frac{1}{2} - 6 < 0$.

Donc g_2' est négative sur $[0, 1]$, et donc g_2 est décroissante sur $[0, 1]$.

Or $g_2(1) = e^1 - e^{-1} - 2 - 4 < 0$, si bien que pour tout $x \in [0, 1]$, $g_2(x) \leq 0$.

Et donc $\boxed{\text{pour tout } x \in [0, 1], 0 \leq \varphi(x) - 2x \leq 2x^2.}$

15.c. À ce stade, l'existence d'une asymptote n'est pas acquise, mais s'il en existe une, par la question 15.a. elle possède $\frac{1}{2}$ pour coefficient directeur. Reste à prouver que $f(x) - \frac{x}{2}$ possède une limite finie.

Taux accroissement

Rappelons que par **définition**,

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}.$$

Ici on utilise le fait qu'on sait par ailleurs calculer $\varphi'(0)$ par d'autres moyens.

Attention au fait que $\varphi'(0)$ n'est pas égal au taux d'accroissement, mais à sa **limite**.

Détails

$e^{-1} = \frac{1}{e}$, et puisque $e > 2$, alors $e^{-1} < \frac{1}{2}$.

Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{x}{2} = \frac{2 - x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)}$.

Posons $X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, si bien que

$$f(x) - \frac{x}{2} = X \frac{2 - \varphi(X)}{\varphi(X)} = \frac{2X - \varphi(X)}{\varphi(X)} = \frac{2X - \varphi(X)}{X} \frac{X}{\varphi(X)}.$$

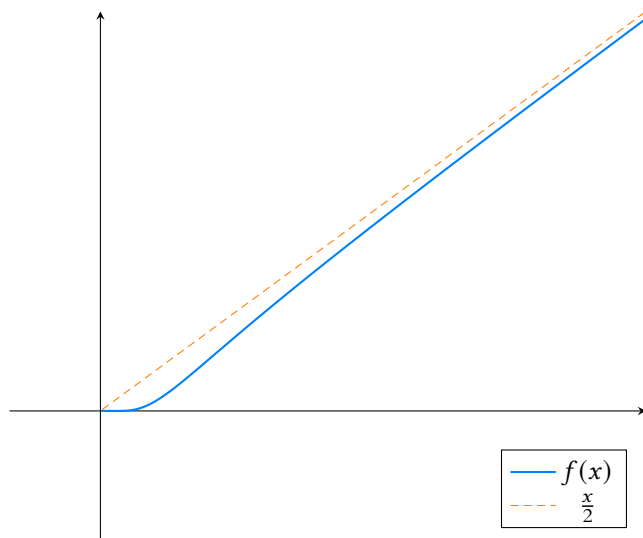
Lorsque $x \geq 1$, $X \in]0, 1]$, et donc par la question précédente, $-2X^2 \leq 2X - \varphi(X) \leq 0$, et donc $-2X \leq \frac{2X - \varphi(X)}{X} \leq 0$.

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{2X - \varphi(X)}{X} = 0$.

Puisque par ailleurs $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{X}{\varphi(X)} = \frac{1}{2}$, on a donc

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{2X - \varphi(X)}{X} \frac{X}{\varphi(X)} = 0 \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{x}{2} = 0.$$

On en déduit que la droite d'équation $y = \frac{x}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.



$x \geq 1$

Nous n'allons établir des inégalités que pour les $x \geq 1$, et pas pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$.

Mais la limite en $+\infty$ ne «regardant» que les très grandes valeurs de x , cela devrait suffire.

Ces points seront clarifiés dans le chapitre consacré aux limites.