

DEVOIR SURVEILLÉ 1 (3H)

► Les calculatrices sont **interdites**.

► Toutes les réponses doivent être justifiées.

► Vous apporterez un soin particulier à la présentation, à la lisibilité et à l'orthographe de vos copies.

La qualité de la rédaction, la clarté et la finesse des raisonnements sont prises en compte dans la note finale.

► Merci de numérotter entièrement les réponses (par exemple 6.c. et pas seulement c.) et **d'encadrer vos résultats**.

► Si vous repérez ce qui **vous semble être une erreur d'énoncé**, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.

► Exercice 1 : échauffement calculatoire

 30 minutes

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation $|4 - x| = 2x + 10$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
2. Résoudre l'inéquation $\ln(x)^2 + 2|\ln(x)| > 3$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}_+^*$.
3. On souhaite résoudre l'équation (E) : $\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.
 - a. Soit $x \in \mathbf{R}$ solution de (E). Montrer que $x \in [0, 1[$.
 - b. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

► Exercice 2 : logique (fonctions périodiques et croissantes)

 30min

Soit $T \in \mathbf{R}_+^*$. Une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est dite T -périodique si $\forall x \in \mathbf{R}, f(x + T) = f(x)$.

1. Justifier qu'il existe une fonction T -périodique non constante.
2. Soit f une fonction T -périodique. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, f est nT -périodique.
3. Soit f une fonction T -périodique et croissante.
 - a. Prouver que f est constante sur $[0, T]$, c'est-à-dire que $\exists \alpha \in \mathbf{R}, \forall x \in [0, T], f(x) = \alpha$.
 - b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, f est constante sur $[0, nT]$.
 - c. Montrer que f est constante sur $\mathbf{R}$.

► Exercice 3 : raisonnements divers.

 35min

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, $\left\lfloor 2\sqrt{n^2 + n + 1} \right\rfloor$ est un entier impair.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = (n + 1)(u_n + u_{n+1})$.
Donner une expression de u_n en fonction de n .
3. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1$ et pour tout $n \geq 5$, $u_n = 2u_{\lfloor \frac{n}{4} \rfloor} + n$.
Pour tout réel x strictement positif, on note $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$.
 - a. Calculer u_5 et u_6 , puis prouver que pour tout $n \in \llbracket 2, 7 \rrbracket$, $u_n \leq \frac{3}{4}n \log_2(n)$.
 - b. Prouver par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n \leq \frac{3}{4}n \log_2(n)$.

► **Problème 1 : une équation fonctionnelle**

 **45min**

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}, f(xf(x) + f(y)) = y + f(x)^2 \quad (\star).$$

On note f_1 et f_2 les fonctions définies par $\forall x \in \mathbf{R}, f_1(x) = x$ et $f_2(x) = -x$.

1. Montrer que f_1 et f_2 vérifient $(\star)$.

Dans toute la suite, on considère une fonction f vérifiant $(\star)$.

2. Prouver que pour tout $y \in \mathbf{R}, f(f(y)) = y + f(0)^2$.

3. En déduire que $\forall u, v \in \mathbf{R}, f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$.

4. À l'aide de la question 2, montrer que pour tout $a \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, f(x) = a$.

5. Justifier qu'il existe un unique réel, que l'on notera t_0 dans la suite, tel que $f(t_0) = 0$.

6. En utilisant t_0 , prouver que pour tout $y \in \mathbf{R}, f(f(y)) = y$.

7. Prouver que $t_0 = 0$.

8. Justifier que pour tout $u \in \mathbf{R}, f(f(u)u) = u^2$.

9. En déduire que pour tout $u \in \mathbf{R}, f(u)^2 = u^2$.

10. Montrer que $\forall u \in \mathbf{R}, (f(u) = f_1(u) \text{ ou } f(u) = f_2(u))$.

Ceci prouve-t-il que $f = f_1$ ou $f = f_2$? Justifier.

11. Dans cette question, on suppose de plus que $f(1) = 1$.

a. Prouver que pour tout réel $y, f(1 + f(y)) = 1 + y$, puis que $(1 + y)^2 = 1 + 2f(y) + f(y)^2$.

b. En déduire que $f = f_1$.

12. On suppose dans cette question que $f(1) = -1$.

En vous inspirant de la question précédente, prouver que $f = f_2$.

13. Conclure, en donnant toutes les fonctions f vérifiant $(\star)$.

► **Problème 2 : nombres échangeables**

 **45min**

Si a et b sont deux réels, on note $f_{a,b}$ la fonction définie sur $[-b, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [-b, +\infty[, f_{a,b}(x) = a - \sqrt{b + x}.$$

Deux réels u et v sont dits échangeables s'il existe $a, b \in \mathbf{R}$ avec $-b \leq u$ et $-b \leq v$ tels que

$$f_{a,b}(u) = v \text{ et } f_{a,b}(v) = u.$$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}, t$ et t sont échangeables.

2. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.

3. Justifier que 2 et 4 ne sont pas échangeables.

4. Soient u et v deux réels échangeables, avec $u \leq v$. Soient alors $a, b \in \mathbf{R}$ vérifiant $-b \leq u, -b \leq v, f_{a,b}(u) = v$ et $f_{a,b}(v) = u$.

a. Montrer que $2a(u - v) = (u - v)(u + v + 1)$.

b. Si de plus $u \neq v$, déterminer les valeurs de a et b .

5. Soient u, v deux entiers. Justifier que u et v sont échangeables si et seulement si $|u - v| \leq 1$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

► Exercice 1 : échauffement calculatoire

1. Nous allons devoir distinguer deux cas suivant le signe de $x - 4$.

► Soit $x \in [4, +\infty[$. Alors

$$|x - 4| = 2x + 10 \Leftrightarrow x - 4 = 2x + 10 \Leftrightarrow x = -14.$$

Puisque $-14 \notin [4, +\infty[$, on en déduit que l'équation n'a pas de solution dans $[4, +\infty[$.

► Soit $x \in]-\infty, 4[$. Alors $x - 4 \leq 0$, si bien que $|x - 4| = 4 - x$. Donc

$$|x - 4| = 2x + 10 \Leftrightarrow -(x - 4) = 2x + 10 \Leftrightarrow -6 = 3x \Leftrightarrow x = -2.$$

Puisque $-2 \leq 4$, -2 est bien une solution de l'équation.

Et donc l'équation possède une unique équation, qui est -2 .

2. Soit $x \in [1, +\infty[$. Alors $\ln(x) \geq 0$ et donc $|\ln(x)| = \ln(x)$. Et donc

$$\ln(x)^2 + 2|\ln(x)| > 3 \Leftrightarrow \ln(x)^2 + 2\ln(x) - 3 > 0.$$

Or le polynôme $X^2 + 2X - 3$ possède 1 et -3 pour racines, de sorte que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $t^2 + 2t - 3 > 0 \Leftrightarrow t < -3$ ou $t > 1$.

Et donc ici, puisque $\ln(x) \geq 0$,

$$\ln(x)^2 + 2\ln(x) - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 1 \Leftrightarrow x > e.$$

Soit à présent $x \in]0, 1[$, de sorte que $\ln(x) \leq 0$ et donc $|\ln(x)| = -\ln(x)$. Alors

$$\ln(x)^2 + 2|\ln(x)| > 3 \Leftrightarrow \ln(x)^2 - 2\ln(x) - 3 > 0.$$

Cette fois le polynôme $X^2 - 2X - 3$ possède -1 et 3 pour racines, et donc pour tout $t \in \mathbf{R}$, $t^2 - 2t - 3 > 0 \Leftrightarrow t < -1$ ou $t > 3$.

Et en particulier, puisque $\ln(x) < 0$,

$$\ln(x)^2 - 2\ln(x) - 3 > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < -1 \Leftrightarrow x < e^{-1}.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]0, e^{-1}[\cup]e, +\infty[$.

- 3.a. Soit $t \geq 1$. Alors $\lfloor t \rfloor \geq 1$ et donc $2 - \lfloor t \rfloor \leq 1$.

Mais par ailleurs, $3t \geq 3$, donc¹ $\lfloor 3t \rfloor \geq 3$, si bien que $\lfloor 3t \rfloor \neq 2 - \lfloor t \rfloor$.

Soit $t < 0$. Alors $\lfloor t \rfloor \leq 0$, donc $2 - \lfloor t \rfloor \geq 2$.

Et puisque $3t \leq 0$, $\lfloor 3t \rfloor \leq 0$, et donc $\lfloor 3t \rfloor \neq 2 - \lfloor t \rfloor$.

Ainsi, $t \notin [0, 1[\Rightarrow t$ n'est pas solution de (E).

Par contraposée, si t , est solution de (E), $t \in [0, 1[$.

Et en particulier, $x \in [0, 1[$.

- 3.b. Soit $x \in [0, 1[$. Alors $\lfloor x \rfloor = 0$, et donc $2 - \lfloor x \rfloor = 2$.

Ainsi, $\lfloor 3x \rfloor = 2 - \lfloor x \rfloor \Leftrightarrow \lfloor 3x \rfloor = 2 \Leftrightarrow 2 \leq 3x < 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x < 1$.

Et donc l'ensemble des solutions de l'équation est $[\frac{2}{3}, 1[$.

Rappel

On a

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{si } x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & \text{sinon} \end{cases}$$

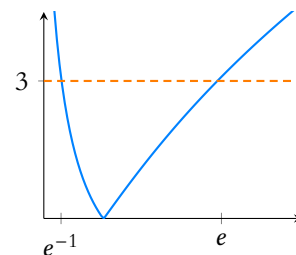


FIGURE 0.1— La fonction $x \mapsto \ln(x)^2 + 2|\ln(x)|$.

¹ Par croissance de la partie entière.

Remarque

Le fait d'avoir raisonné par équivalence nous dispense d'une synthèse/vérification.

► Exercice 2 : logique

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ de la manière suivante : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 1$ si il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $x = nT$, et $f(x) = 0$ sinon.

Alors f est non constante, puisque $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{T}{2}\right) = 0$.

De plus f est bien T -périodique puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$,

► Si il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = nT$, et alors $x+T = \underbrace{(n+1)T}_{\in \mathbb{Z}}$, de sorte que $f(x+T) = 1 = f(x)$.

► Si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x \neq nT$. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $x+T = pT$. Alors $x = (x+T) - T = (p-1)T$, avec $p-1 \in \mathbb{Z}$, ce qui est absurde.

Donc pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $x+T \neq pT$, si bien que $f(x+T) = 0 = f(x)$.

On a donc bien prouvé que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, et donc f est T -périodique et non constante.

2. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $\mathcal{P}(n)$ le prédicat « f est nT -périodique». Par hypothèse, $\mathcal{P}(1)$ est vrai puisque f est T -périodique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que f soit nT -périodique.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + (n+1)T) = f((x+T) + nT) \stackrel{\text{H.R.}}{=} f(x+T) = f(x)$.

Donc f est $(n+1)T$ -périodique, si bien que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est nT -périodique.

- 3.a. Notons $\alpha = f(0)$. Par T -périodicité de f , $f(T) = f(0+T) = f(0) = \alpha$. Soit alors $x \in [0, T]$. Alors $0 \leq x$, si bien que par croissance de f , $f(0) \leq f(x)$, soit encore $\alpha \leq f(x)$.

Par ailleurs, $x \leq T$ et donc², $f(x) \leq f(T)$, donc $\alpha \leq f(x) \leq \alpha$, si bien que $f(x) = \alpha$.

Nous avons donc prouvé que pour tout $x \in [0, T]$, $f(x) = \alpha$.

Et donc f est constante sur $[0, T]$.

- 3.b. Par la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f est nT -périodique. Donc par la question 3.a appliquée avec nT au lieu de T , f est constante sur $[0, nT]$.

- 3.c. Notons toujours $\alpha = f(0)$, et soit $x \in \mathbb{R}$.

► Si $x = 0$, alors $f(x) = \alpha$.

► Si $x > 0$, soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nT > x$.

On a donc $x \in [0, nT]$, et donc par la question précédente, $f(x) = \alpha$.

► Soit $x < 0$. Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x + nT > 0$ (un tel n existe puisqu'on a encore $x + nT \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.)

Alors $f(x) = f(x + nT)$, et puisque $x + nT > 0$, par le cas précédent, $f(x + nT) = \alpha$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha$, si bien que f est constante.

Autrement dit

$\mathcal{P}(n)$ est le prédicat :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + nT) = f(x).$$

² Toujours par croissance de f .

Remarque

Un tel n existe toujours puisque $nT \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Mais si on souhaite en construire un, on peut prendre $n = \lfloor \frac{x}{T} \rfloor + 1$. En effet,

$$\left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor \leq \frac{x}{T} < \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor + 1$$

et donc $x < (\lfloor \frac{x}{T} \rfloor + 1)T$.

► Exercice 3 : raisonnements divers

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$n^2 < n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 \text{ et donc } n < \sqrt{n^2 + n + 1} < n + 1.$$

On en déduit que $2n < 2\sqrt{n^2 + n + 1} < 2(n+1)$.

Ceci suffit à affirmer³ que $\lfloor 2\sqrt{n^2 + n + 1} \rfloor = 2n$ ou $\lfloor 2\sqrt{n^2 + n + 1} \rfloor = 2n + 1$, mais pas à répondre à la question.

³ Par croissance de la partie entière.

Puisque l'énoncé nous indique qu'il s'agit d'un entier impair, on aimerait donc $\lfloor 2\sqrt{n^2 + n + 1} \rfloor = 2n + 1$, soit encore

$$2n + 1 \leq 2\sqrt{n^2 + n + 1} < 2n + 2.$$

L'inégalité de droite est déjà prouvée.

Pour celle de gauche, notons que

$$2n + 1 \leq 2\sqrt{n^2 + n + 1} \Leftrightarrow n + \frac{1}{2} \leq \sqrt{n^2 + n + 1} \Leftrightarrow n^2 + n + \frac{1}{4} \leq n^2 + n + 1.$$

Cette inégalité étant clairement vraie, on a bien $2n + 1 \leq 2\sqrt{n^2 + n + 1}$.

Et donc au final, $2n + 1 \leq 2\sqrt{n^2 + n + 1} < 2n + 2$, si bien que $\lfloor 2\sqrt{n^2 + n + 1} \rfloor = 2n + 1$ qui

est bien un entier impair.

2. Calculons les premiers termes de notre suite : $u_2 = u_{0+2} = u_0 + u_1 = 2$.

Puis $u_3 = u_{1+2} = 2(u_1 + u_2) = 2 \times 3 = 6$.

Et $u_4 = u_{2+2} = 3(u_2 + u_3) = 24$.

Il est raisonnable de conjecturer que $u_n = n!$

Prouvons le par récurrence double sur n .

L'initialisation est facile car $u_0 = 1 = 0!$ et $u_1 = 1 = 1!$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = n!$ et $u_{n+1} = (n+1)!$. Alors

$$u_{n+2} = (n+1)(u_n + u_{n+1}) = (n+1)(n! + (n+1)!) = (n+1)n!(1 + n + 1) = n! \times (n+1)(n+2) = (n+2)!$$

Par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, u_n = n!}$.

3.a. On a $u_4 = 1$, puis $u_5 = 2u_{\lfloor \frac{5}{4} \rfloor} + 5 = 2u_1 + 5 = 7$.

De même, puisque $\lfloor \frac{6}{4} \rfloor = \lfloor \frac{7}{4} \rfloor = 1$, alors $u_6 = 8$ et $u_7 = 9$.

Notons que $\log_2(4) = \frac{\ln(4)}{\ln(2)} = \frac{2\ln(2)}{\ln(2)} = 2$, et donc par croissance du $\ln$, pour tout $x \geq 4$, $\log_2(x) \geq 2$.

En particulier, on a $\frac{3}{4}4\log_2(4) = 6 \geq u_4$, $\frac{3}{4}5\log_2(5) \geq \frac{30}{4} \geq \frac{28}{4} \geq u_5$.

Puis $\frac{3}{4}6\log_2(6) \geq \frac{3}{4} \times 6 \times 2 \geq 9 \geq u_6$, et enfin $\frac{3}{4}7\log_2(7) \geq \frac{42}{4} \geq \frac{36}{4} \geq u_7$.

Et donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \llbracket 2, 7 \rrbracket, u_k \leq \frac{3}{4}k\log_2(k)}$.

3.b. Procédons par récurrence forte sur $n \geq 2$ en notant $\mathcal{P}(n) : u_n \leq \frac{3}{4}n\log_2(n)$.

Soit $n \geq 2$ tel que pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket, u_k \leq \frac{3}{4}k\log_2(k)$.

Alors $u_{n+1} = 2u_{\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor} + n + 1$.

► Si $\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor = 0$ ou $\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor = 1$, alors on ne peut pas utiliser l'hypothèse de récurrence pour majorer $u_{\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor}$, puisque nous n'avons supposé avoir une majoration de u_k que pour $2 \leq k \leq n$.

En revanche, ceci ne se produit que si $\frac{n+1}{4} < 2$, soit encore $n+1 < 8$, et donc $n \leq 6$.

Et puisque nous avons déjà prouvé $\mathcal{P}(k)$ pour $k \in \llbracket 2, 7 \rrbracket$, alors en particulier $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

► Dans le cas où $n \geq 8$, $\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor \geq 2$, et donc $\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

Donc par hypothèse de récurrence, $u_{\lfloor \frac{n+1}{4} \rfloor} \leq \frac{3}{4} \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \log_2 \left(\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \right)$.

Et donc il vient

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq 2 \frac{3}{4} \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \log_2 \left(\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \right) + n + 1 \\ &\leq \frac{3}{2} \frac{n+1}{4} \log_2 \left(\frac{n+1}{4} \right) + n + 1 \\ &\leq \frac{3}{8} (n+1) \left(\log_2(n+1) - \underbrace{\log_2(4)}_{=2} \right) + n + 1 \\ &\leq \frac{3}{8} (n+1) \log_2(n+1) - \frac{3}{4} (n+1) + (n+1) \\ &\leq \frac{3}{8} (n+1) \log_2(n+1) + \frac{1}{4} (n+1) \\ &\leq \frac{3}{8} (n+1) \log_2(n+1) + \frac{1}{4} (n+1) \log_2(n+1) \\ &\leq \frac{5}{8} (n+1) \log_2(n+1) \leq \frac{3}{4} (n+1) \log_2(n+1). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a bien prouvé $\mathcal{P}(n+1)$.

Et donc par le principe de récurrence forte, $\boxed{\text{pour tout } n \geq 2, u_n \leq \frac{3}{4}n\log_2(n)}$.

⚠ Attention !

Qui dit récurrence double dit initialisation double.

Remarque

$\frac{n+1}{4} \leq n$ et donc

$$\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \leq n.$$

La fonction $\log_2$ est croissante et

$$\left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor \leq \frac{n+1}{4}.$$

► Problème 1 : une équation fonctionnelle

1. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Alors

$$f_1(xf_1(x) + f_1(y)) = f_1(x^2 + y) = x^2 + y = f_1(x)^2 + y.$$

Donc f_1 est bien solution de $(\star)$.

De même, on a

$$f_2(xf_2(x) + f_2(y)) = -xf_2(x) - f_2(y) = x^2 + y = y + f_2(x)^2.$$

Donc f_2 est bien solution de $(\star)$.

2. Soit $y \in \mathbf{R}$, et prenons $x = 0$ dans la relation $(\star)$. Il vient alors

$$f(0f(0) + f(y)) = y + f(0)^2$$

soit encore $f(f(y)) = y + f(0)^2$.

3. Soient $u, v \in \mathbf{R}$ tels que $f(u) = f(v)$.

On a alors $f(f(u)) = f(f(v))$, et donc par la question précédente, $u + f(0)^2 = v + f(0)^2$.

On en déduit donc que $u = v$.

Nous avons donc bien prouvé que $\forall u, v \in \mathbf{R}, f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$.

4. Soit $a \in \mathbf{R}$. Posons $y = a - f(0)^2$, de sorte que $y + f(0)^2 = a$.

Si on note $x = f(y)$, la relation de la question 2 devient alors $f(x) = y + f(0)^2 = a$.

Et donc nous avons bien prouvé qu'il existe $x \in \mathbf{R}$ tel que $f(x) = a$.

Ceci étant vrai quel que soit le réel a , nous venons donc de prouver que

$$\forall a \in \mathbf{R}, \exists x \in \mathbf{R}, f(x) = a.$$

5. La question précédente, appliquée avec $a = 0$ prouve l'existence d'un tel réel t_0 .

Et par la question 3, un tel réel est unique⁴.

6. Soit $y \in \mathbf{R}$. En prenant alors $x = t_0$ dans la relation $(\star)$, il vient $f(t_0f(t_0) + f(y)) = y + f(t_0)^2$.

Mais puisque $f(t_0) = 0$, il ne reste que $f(f(y)) = y$.

7. On a donc, par la question 2, $f(f(t_0)) = t_0 + f(0)^2$, et donc $t_0 = t_0 + f(0)^2$.

On en déduit que $f(0) = 0$, et puisque $f(t_0) = f(0)$, alors $t_0 = 0$.

8. Soit $u \in \mathbf{R}$. Alors en prenant $x = f(u)$ et $y = 0$ dans $(\star)$, il vient

$$f(f(u)f(f(u)) + f(0)) = 0 + f(f(u))^2.$$

Mais $f(f(u)) = u$, si bien que $f(f(u)u) = u^2$.

9. Soit $u \in \mathbf{R}$. Alors par la question précédente appliquée à $f(u)$ au lieu de u ,

$$f(f(f(u))f(u)) = f(u)^2 \text{ soit encore } f(uf(u)) = f(u)^2.$$

Et donc $u^2 = f(uf(u)) = f(u)^2$.

10. Soit $u \in \mathbf{R}$. Puisque $f(u)^2 = u^2$, on a donc soit $f(u) = u = f_1(u)$, soit $f(u) = -u = f_2(u)$.

Il n'est pas vrai pour autant que $f = f_1$ ou $f = f_2$.

En effet, cette dernière assertion est équivalente à

$$(\forall u \in \mathbf{R}, f(u) = f_1(u)) \text{ ou } (\forall u \in \mathbf{R}, f(u) = f_2(u))$$

et on notera que la place des quantificateurs n'est pas la même.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ vérifie bien l'assertion

$$\forall u \in \mathbf{R}, (f(u) = f_1(u)) \text{ ou } (f(u) = f_2(u)).$$

Pourtant f n'est égale ni à f_1 (par exemple car $f(-1) \neq f_1(-1)$) ni à f_2 (car $f(1) \neq f_2(1)$).

Intuition

L'assertion que nous venons de prouver signifie que f ne prend pas deux fois la même valeur : si deux nombres ont même image, alors ils sont égaux.

⁴ Puisque si $f(t) = 0 = f(t_0)$ alors $t = t_0$.

- 11.a. Soit $y \in \mathbf{R}$. Prenons alors $x = 1$ dans $(\star)$, de sorte que $f(1f(1) + f(y)) = y + f(1)^2$, et donc puisque $f(1) = 1$, il reste $f(1 + f(y)) = 1 + y$.

En élevant au carré les deux membres, $f(1 + f(y))^2 = (1 + y)^2$ et donc par la question 9 $(1 + f(y))^2 = (1 + y)^2$. Ce qui nous donne donc

$$(1 + y)^2 = 1 + 2f(y) + f(y)^2.$$

- 11.b. Soit $y \in \mathbf{R}$. Puisque $f(y)^2 = y^2$, la relation de la question précédente devient $1 + 2y + y^2 = 1 + 2f(y) + y^2$, si bien que $f(y) = y = f_1(y)$.

Ainsi, on a bien $\forall y \in \mathbf{R}, f(y) = f_1(y)$, et donc $f = f_1$.

12. Soit $y \in \mathbf{R}$. Alors en prenant $x = 1$ dans $(\star)$, il vient $f(-1 + f(y)) = y + f(1)^2 = y + 1$.

Et donc $(-1 + f(y))^2 = f(-1 + f(y))^2 = (1 + y)^2$.

On en déduit que $1 - 2f(y) + f(y)^2 = 1 + 2y + y^2$, et puisque $f(y)^2 = y^2$, $f(y) = -y$.

Ceci étant vrai pour tout $y \in \mathbf{R}$, $f = f_2$.

13. Nous avons prouvé que si f est une solution de $(\star)$, alors $f(1)^2 = 1^2 = 1$. Et donc soit $f(1) = 1$, auquel cas la question 11.b prouve que $f = f_1$.

Soit $f(1) = -1$, auquel cas la question 12 prouve que $f = f_2$.

Ainsi, les seules fonctions susceptibles d'être solution de $(\star)$ sont f_1 et f_2 .

Puisque par ailleurs nous avons déjà prouvé qu'il s'agit de solutions, les deux seules solutions de $(\star)$ sont f_1 et f_2 .

► Problème 2 : nombres échangeables

1. Soit $t \in \mathbf{R}$. Prenons $a = t$ et $b = -t$.

Alors $f_{a,b}$ est définie en t , et $f_{a,b}(t) = t - \sqrt{-t} + t = t$.

Donc t et t sont échangeables.

2. Procédons par analyse-synthèse pour trouver deux réels a et b tels que $f_{a,b}(2) = 3$ et $f_{a,b}(3) = 2$.

Analyse : supposons que 2 et 3 sont échangeables, et soient $a, b \in \mathbf{R}$, avec $-b \leq 2$ tels que $f_{a,b}(2) = 3$ et $f_{a,b}(3) = 2$.

Alors $a - \sqrt{b} + 2 = 3$ et $a - \sqrt{b+3} = 2$.

On en déduit que $a - 3 = \sqrt{b} + 2$ et donc $b + 2 = (a - 3)^2 = a^2 - 6a + 9$ (E_1) .

De même, $a - 2 = \sqrt{b+3}$ et donc $b + 3 = (a - 2)^2 = a^2 - 4a + 4$ (E_2) .

En soustrayant (E_1) à (E_2) , il vient donc

$$1 = b + 3 - (b + 2) = a^2 - 4a + 4 - a^2 + 6a - 9 = 2a - 5$$

et donc $a = 3$. On en déduit alors que $b + 2 = (3 - 3)^2 = 0$, donc $b = -2$.

Synthèse : posons $a = 3$ et $b = -2$. Alors $-2 \leq 2$ et $-2 \leq 3$ et

$$f_{a,b}(2) = 3 - \sqrt{-2} + 2 = 3 \text{ et } f_{a,b}(3) = 3 - \sqrt{-2+3} = 2.$$

Ainsi, 2 et 3 sont bien échangeables.

3. Supposons par l'absurde qu'il existe deux réels a et b , avec $-b \leq 2$ tels que $f_{a,b}(2) = 4$ et $f_{a,b}(4) = 2$.

Alors comme précédemment, $a - \sqrt{b} + 2 = 4$, donc $b + 2 = (a - 4)^2 = a^2 - 8a + 16$ et de même $b + 4 = (a - 2)^2 = a^2 - 4a + 4$.

Par soustraction, on en déduit que $2 = (b + 4) - (b + 2) = 4a - 12$, et donc $a = \frac{7}{2}$.

Il vient alors $b = \left(\frac{7}{2} - 4\right)^2 - 2 = -\frac{7}{4}$.

⚠ Attention !

À ce stade, on n'a pas prouvé que 2 et 3 sont échangeables, seulement qu'il existe un seul couple (a, b) susceptible de les échanger.

✍ Rédaction

L'énoncé ne mentionnant aucune sorte d'unicité sur (a, b) , l'analyse peut être faite au brouillon, seule la synthèse est nécessaire.

Ainsi, si de tels a et b échangeant 2 et 4 existent, alors $a = \frac{7}{2}$ et $b = -\frac{7}{4}$.

Or $\frac{7}{2} - \sqrt{-\frac{7}{4} + 4} = \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{11}{4}} = \frac{7-\sqrt{11}}{2} \neq 2$.

On en déduit que $\boxed{2 \text{ et } 4 \text{ ne sont pas échangeables.}}$

4.a. Comme précédemment, $(a-u)^2 = b+v$ et $(a-v)^2 = b+u$.

Par différence,

$$u-v = (a-v)^2 - (a-u)^2 = a^2 - 2av + v^2 - a^2 + 2au - u^2 = 2a(u-v) - (u^2 - v^2) = 2a(u-v) - (u-v)(u+v).$$

Et donc

$$2a(u-v) = u-v + (u-v)(u+v) = \boxed{(u-v)(u+v+1)}.$$

4.b. Si de plus $u \neq v$, alors $u-v \neq 0$, et donc après division par $u-v$, il reste $2a = u+v+1$, si

bien que $\boxed{a = \frac{u+v+1}{2}}.$

Et puisque par ailleurs, $b+u = (a-v)^2 = \left(\frac{u+v+1}{2} - v\right)^2 = \left(\frac{u-v+1}{2}\right)^2$, on en déduit que

$$\boxed{b = \left(\frac{u-v+1}{2}\right)^2 - u}.$$

5. Soient u et v deux entiers, et quitte à échanger u et v , supposons $u \leq v$.

Alors $|u-v| \leq 1 \Leftrightarrow v-u \leq 1 \Leftrightarrow v \leq u+1$.

Et donc $|u-v| \leq 1$ si et seulement si $v = u$ ou $v = u+1$.

Supposons u et v échangeables, et notons comme précédemment a et b deux réels tels que

$f_{a,b}(u) = v$ et $f_{a,b}(v) = u$.

► Si $u = v$, alors $|u-v| \leq 1$.

► Si $u \neq v$, alors par la question précédente, on a $a = \frac{u+v+1}{2}$ et $b = \left(\frac{u-v+1}{2}\right)^2 - u$.

$$\text{On a alors } f_{a,b}(u) = \frac{u+v+1}{2} - \sqrt{\left(\frac{u-v+1}{2}\right)^2} = \frac{u+v+1}{2} - \left|\frac{u-v+1}{2}\right|.$$

Mais $u < v$, et u et v étant entiers, $u+1 \leq v$, si bien que $u+1-v \leq 0$, et donc

$$f_{a,b}(u) = \frac{u+v+1}{2} - \frac{v-u-1}{2} = u+1.$$

Et puisque $f_{a,b}(u) = v$, on a bien $v = u+1$.

Ainsi, nous venons de prouver que si u et v sont échangeables, alors $|u-v| \leq 1$.

Inversement, si $|u-v| \leq 1$, prouvons que u et v sont bien échangeables.

► Si $u = v$, nous avons déjà justifié que u et v sont échangeables.

► Si $v = u+1$, posons alors⁵, $a = \frac{u+v+1}{2} = u+1$, et $b = \left(\frac{u-v+1}{2}\right)^2 - u = -u$.

Alors $f_{a,b}(u) = u+1 - \sqrt{-u+u} = u+1 = v$, et $f_{a,b}(v) = u+1 - \sqrt{-u+v} = u+1 - \sqrt{1} = u$.

Et donc u et v sont bien échangeables.

Ainsi, nous avons prouvé par double implication que $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont échangeables si et seulement si } |u-v| \leq 1}.$

Autrement dit

Il existe **au plus** un couple (a, b) échangeant 2 et 4, et s'il y en a un, c'est celui que nous venons de trouver.

Détails

Il n'y a pas d'entiers dans $]u, u+1[$, donc si $v > u$, alors $v \geq u+1$.

⁵ Conformément aux calculs des questions précédentes.