DEVOIR SURVEILLÉ 9

▸ Exercice 1 : inégalité de Jensen pour les intégrales.

Dans cet exercice, f désigne une fonction M-lipschitzienne sur $[0,1]$, avec $M \geqslant 0$.
Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note alors $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

a. Prouver que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt - S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dt$.

b. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left|\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dt\right| \leqslant \dfrac{M}{n^2}$.

c. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\exp\left(S_n(f)\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.

3. En déduire que $\exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt\right) \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{f(t)}\,dt$.

4. Soit $g : [0,1] \to \mathbf{R}_+^*$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que

$$\int_0^1 \ln(g(t))\,dt \leqslant \ln\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right).$$

▸ Exercice 2 : probabilités

Dans tout l'exercice, N est un entier supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes identiques U_1 et U_2 contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $N-1$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

Dans les deux situations décrites, on admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$, que l'on ne chercher pas à déterminer, et qui modélise la situation décrite.

Vous veillerez à bien justifier tous vos raisonnement à l'aide de formules du cours.

Partie I. Une première expérience
On choisit l'une des deux urnes au hasard, puis on effectue des tirages sans remise dans cette urne.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires afin d'être en mesure de savoir dans quelle urne ont lieu les tirages.
On notera également, pour $i \in [\![1,2]\!]$, A_i l'événement «les tirages ont lieu dans l'urne U_i».

1. Donner le support de X.

2. Justifier que pour tout $k \in X(\Omega)$, $\mathbf{P}_{A_1}(X = k) = \dfrac{1}{N}$.

3. Montrer que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $\mathbf{P}(X = k) = \dfrac{1}{2N}$.

4. Donner la loi de X (on ne demande pas de reconnaître une loi usuelle).

Partie II. Une autre expérience

À présent on se fixe un entier $n \geqslant 2$, et on effectue n tirages avec remise dans l'urne U_1.
On note T la variable aléatoire qui vaut 0 si lors des n tirages on n'a obtenu que des boules de même couleur, et qui sinon est égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'au moins une boule de chaque couleur.
Enfin, on note V la variable aléatoire qui vaut 0 si on n'a obtenu que des boules de même couleur et qui sinon est égale au nombre de boules blanches obtenues jusqu'à l'obtention d'au moins une boule de chaque couleur.
Ainsi, si les tirages ont donné dans cet ordre : NOIR, NOIR, NOIR, BLANC, BLANC, NOIR, ... alors $T = 4$ et $V = 1$.

5. Déterminer le support de T.
6. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\mathbf{P}(T = k) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \dfrac{N-1}{N}\left(\dfrac{1}{N}\right)^{k-1}$.
7. Déterminer $\mathbf{P}(T = 0)$.
8. Soit $j \in V(\Omega)$ avec $j \geqslant 2$.
   - **a.** Donner la valeur de $\mathbf{P}([V = j] \cap [T = j+1])$.
   - **b.** Soit $k \in T(\Omega)$. Déterminer $\mathbf{P}([V = j] \cap [T = k])$.
9. Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si $\forall (i, j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $[X = i]$ et $[Y = j]$ sont indépendants.
   Est-ce que V et T sont indépendantes ? Justifier.
10. Déterminer la loi de V.

▸ Problème : endomorphismes cycliques

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
On note $f^0 = \mathrm{id}_E$, et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

On dit que f est cyclique s'il existe $x_0 \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(f^k(x_0), k \in \mathbf{N}) = \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \dots)$.

Partie I. Premiers exemples

1. Dans cette question, et seulement dans cette question, $E = \mathbf{R}^3$.
   On considère $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{R}^3$, et on note f l'unique endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix}$.
   Calculer $f(1, 0, 0)$ et $f^2(1, 0, 0)$ et en déduire que f est cyclique.
2. Dans cette question, E est un espace vectoriel de dimension 4, soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
   On note $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$.
   - **a.** Calculer A^2.
   - **b.** En déduire que f n'est pas cyclique.
3. Dans cette question, $E = \mathbf{R}^n$, et on note $\mathscr{B}_{can} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$.
   Soit f l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}_{can}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. La matrice A est-elle inversible ?

b. Déterminer le rang de f.

c. Montrer que f est cyclique.

4. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On suppose qu'il existe des réels deux à deux distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On pose $x_0 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$.

a. Exprimer $f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)$ en fonction des λ_i.

b. Écrire la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

c. Soit $\varphi : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)) \end{array} \right.$. Montrer que φ est linéaire, et exprimer sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{R}^n$ en fonction de la matrice M de la question précédente.

d. En déduire que f est cyclique.

Partie II. Cas général

Dans cette partie, on suppose que f est un endomorphisme cyclique, et on considère $x_0 \in E$ tel que $E = \mathrm{Vect}(f^k(x_0), k \in \mathbf{N})$.

5. Une base de E adaptée à f

a. Justifier que $x_0 \neq 0_E$.

b. Soit $K = \{k \in \mathbf{N} \mid (x_0, f(x_0), \dots, f^k(x_0)) \text{ est libre}\}$.
Prouver que K possède un plus grand élément m.

c. Montrer que $f^{m+1}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$, puis que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $f^{m+k}(x_0) \in \mathrm{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$.

d. Montrer que $m = n - 1$, et que $(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$ est une base de E.

6. D'après la question précédente, il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

On note alors P le polynôme $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_1 X - a_0$.

a. Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$.

b. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\mathrm{rg}\,(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \begin{cases} n & \text{si } \lambda \text{ n'est pas racine de } P \\ n-1 & \text{si } \lambda \text{ est racine de } P \end{cases}$$

Partie III. Commutant d'un endomorphisme cyclique

Dans cette partie, on reprend les hypothèses et les notations de la partie précédente.
Soit alors $g \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme qui commute avec f, c'est-à-dire tel que $f \circ g = g \circ f$.
On note alors $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ les réels tels que $g(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$, et on pose $h = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k \in \mathscr{L}(E)$.

7. Montrer que f et h commutent.

8. Prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $g\left(f^k(x_0)\right) = h\left(f^k(x_0)\right)$.

9. En déduire que $g = h$.

10. Prouver que $\{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\} = \mathrm{Vect}(f^k, k \in \mathbf{N})$, puis donner la dimension de ce sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 9

▸ Exercice 1 : inégalité de Jensen pour les intégrales

1.a. Puisque $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt$ par la relation de Chasles, on a donc

$$\int_0^1 f(t)\,dt - S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Mais[1] $\displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dt = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$, si bien que

[1] C'est l'intégrale d'une constante.

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\,dt - S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dt\right).}$$

1.b. Puisque f est M-lipschitzienne, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et pour tout $t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, on a

$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant M\left|t - \frac{k}{n}\right| \leqslant M\left(t - \frac{k}{n}\right) \leqslant M\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \leqslant \frac{M}{n}.$$

Et alors il vient

$$\begin{aligned}\left|\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dt\right| &\leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|dt\\ &\leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\frac{M}{n}\,dt\\ &\leqslant \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)\frac{M}{n} \leqslant \boxed{\frac{M}{n^2}.}\end{aligned}$$

Inégalité triangulaire pour les intégrales.

1.c. On a donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt - S_n(f)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_0^1\left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{n^2} \leqslant n\frac{M}{n^2} \leqslant \frac{M}{n}.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_0^1 f(t)\,dt - S_n(f)\right| = 0 \text{ et donc } \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,dt.}$$

2. On a $\exp(S_n(f)) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.
Mais la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$, si bien que par l'inégalité de Jensen, avec tous les λ_i égaux à $\frac{1}{n}$, il vient

$$\boxed{\exp(S_n(f)) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\exp\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right).}$$

3. Le membre de droite de la question précédente n'est rien d'autre que $S_n(e^f)$.
Or, la fonction f étant lipschitzienne, elle est continue sur $[0,1]$.
Et donc par le théorème des bornes atteintes, f est bornée, si bien qu'il existe $A \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \in [-A, A]$.

Or exp est $\mathscr{C}^1$ sur $[-A, A]$. Donc par l'inégalité des accroissements finis, elle y est lipschitzienne puisque sa dérivée est bornée.
Soit $K > 0$ tel que exp soit K-lipschitzienne sur $[-A, A]$.
Alors pour tous $(x, y) \in [0, 1]^2$,

$$\left|e^{f(x)} - e^{f(y)}\right| \leqslant K|f(x) - f(y)| \leqslant KM|x - y|.$$

Remarque
Nous venons en fait de prouver que la composée de deux fonctions lipschitziennes est lipschitzienne.

Donc $\exp(f)$ est encore lipschitzienne sur $[0, 1]$.
Il s'ensuit que le résultat de la question 1 s'applique : $S_n(\exp(f)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 e^{f(t)}\,dt$.

Puisque par ailleurs $S_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$, par continuité de l'exponentielle,
$\exp(S_n(f)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt\right)$. Et donc par passage à la limite dans l'inégalité de la question 2,

$$\boxed{\exp\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right) \leqslant \int_0^1 e^{f(t)}\,dt.}$$

4. Posons $f = \ln \circ g$. Alors f est bien définie [2] et elle est de classe $\mathscr{C}^1$ par composition de fonctions qui le sont.
Donc en particulier, f' est continue sur le segment $[0, 1]$, et donc par le théorème des bornes atteintes, elle y est bornée.
Et donc par l'inégalité des accroissements finis, f est lipschitzienne sur $[0, 1]$, si bien que tout ce qui a été dit précédemment s'applique.
Par l'inégalité de la question 3,

$$\exp\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right) \leqslant \int_0^1 e^{f(t)}\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt.$$

[2] Car g est à valeurs strictement positives.

En appliquant le logarithme[3] aux deux membres de l'inégalité, il vient donc

$$\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \ln\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right).$$

[3] Qui est croissant, et donc préserve le sens de l'inégalité.

En remplaçant $f(t)$ par sa définition, on a bien $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln(g(t))\,dt \leqslant \ln\left(\int_0^1 g(t)\,dt\right).}$

▸ Exercice 2 : probabilités

Dans tout l'exercice, notons B_i (resp. N_i) l'événement «on a obtenu une boule blanche (resp. noire) lors du $i^{\text{ème}}$ tirage».

Partie I. Une première expérience

1. Pour savoir dans quelle urne on tire, il faut soit obtenir une boule noire (auquel cas on tire dans U_1), soit avoir obtenu N boules blanches (auquel cas on tire dans U_2).
Il est évident qu'il faut au moins un tirage pour déterminer l'urne dans laquelle on tire, et il en faut maximum N puisqu'au bout de N tirages, l'urne est vide.
Et donc $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$.

Remarque
En réalité, il faudrait prouver que pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, l'événement $[X = k]$ peut bien se produire, ce qui est par exemple le cas si on tire dans l'urne U_1 et que la boule noire apparaît lors du $k^{\text{ème}}$ tirage.

2. Si les tirages ont lieu dans l'urne U_1, alors on sait qu'on tire dans U_1 à partir du moment où la boule noire est sortie.
Donc si on a besoin de k tirages pour savoir dans quelle urne on est, c'est que les $k-1$ premiers ont apporté une boule blanche et le $k^{\text{ème}}$ la boule noire.
Autrement dit, on a $A_1 \cap [X = k] = A_1 \cap B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap N_k$.
Par la formule des probabilités composées, il vient alors

⚠ Attention !
On n'a d'autre choix que de faire figurer A_1 dans l'intersection, il n'est notamment pas question de dire «si A_1 est réalisé», alors

$$[X = k] = B_1 \cap \cdots \cap N_k.$$

Il n'y a pas «d'événement conditionnel».

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 \cap [X = k]) &= \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B_1)\mathbf{P}_{A_1\cap B_1}(B_2)\cdots\mathbf{P}_{A_1\cap B_1\cap\ldots B_{k-2}}(B_{k-1})\mathbf{P}_{A_1\cap B_1\cap\ldots B_{k-1}}(N_k)\\ &= \mathbf{P}(A_1)\frac{\cancel{N-1}}{N}\frac{\cancel{N-2}}{\cancel{N-1}}\cdots\frac{\cancel{N-k+1}}{\cancel{N-k+2}}\frac{1}{\cancel{N-k+1}}\end{aligned}$$

$$= \mathbf{P}(A_1)\frac{1}{2N}.$$

Et donc $\mathbf{P}_{A_1}(X=k) = \dfrac{\mathbf{P}(A_1 \cap [X=k])}{\mathbf{P}(A_1)} = \boxed{\dfrac{1}{N}}.$

3. Si $k < N$, alors $A_2 \cap [X=k] = \emptyset$ car on ne peut être sûr qu'on tire dans l'urne U_2 que lors du $N^{\text{ème}}$ tirage, après avoir constaté que les N boules étaient blanches.
Autrement dit, $A_2 \subset [X=N]$, et en particulier, $A_2 \cap [X=k] = \emptyset$.
Et donc $\mathbf{P}_{A_2}(X=k) = \dfrac{\mathbf{P}(A_2 \cap [X=k])}{\mathbf{P}(A_2)} = 0.$
Par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{A_1, A_2\}$, on a donc

$$\mathbf{P}(X=k) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(X=k) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(X=k) = \frac{1}{2}\frac{1}{N} = \boxed{\frac{1}{2N}}.$$

4. Puisque $\{[X=1], [X=2], \dots, [X=N]\}$ est un système complet d'événements[4], alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}(X=k) = 1$.
Et donc $\mathbf{P}(X=N) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{P}(X=k) = 1 - \frac{N-1}{2N} = \frac{N+1}{2N}.$
Et donc la loi de X est donnée par

$$\boxed{\forall k \in [\![1,N]\!],\ \mathbf{P}(X=k) = \begin{cases} \frac{1}{2N} & \text{si } k \neq N \\ \frac{N+1}{2N} & \text{si } k = N \end{cases}}$$

[4] Car $X(\Omega) = [\![1,N]\!]$.

Partie II.Une deuxième expérience

5. On a $T(\Omega) = \{0\} \cup [\![2,n]\!]$.

6. Soit $k \in [\![2,n]\!]$. Alors

$$[T=k] = (N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) \cup (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k).$$

Par incompatibilité de ces événements,

$$\mathbf{P}(T=k) = \mathbf{P}(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k) + \mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap N_k).$$

Et les tirages ayant lieu avec remise, les $B_i, i < k$ et N_k sont mutuellement indépendants, si bien que

$$\mathbf{P}(T=k) = \mathbf{P}(B_1)\cdots\mathbf{P}(B_{k-1})\mathbf{P}(N_k) + \mathbf{P}(N_1)\cdots\mathbf{P}(N_{k-1})\mathbf{P}(B_n) = \boxed{\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}}.$$

Indépendance

Il n'est pas question de prouver cette indépendance, il s'agit bien de la reconnaître à l'aide du contexte donné par l'énoncé.

7. On pourrait raisonner comme à la question 4, et utiliser $\mathbf{P}(T=0) = 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \mathbf{P}(T=k)$.

Mais plus simplement,

$$[T=0] = (B_1 \cap \dots \cap B_n) \cup (N_1 \cap \dots \cap N_n)$$

si bien que les mêmes arguments d'incomaptibilité et d'indépendance qu'à la question précédente prouvent que

$$\mathbf{P}(T=0) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \frac{1}{N^n} = \boxed{\frac{(N-1)^n + 1}{N^n}}.$$

Vérification

Un moyen de vérifier la cohérence de notre résultat pourrait être de s'assurer que

$$\sum_{k \in T(\Omega)} \mathbf{P}(T=k) = 1.$$

8.a. On a $[V=j] \cap [T=j+1] = B_1 \cap \dots \cap B_j \cap N_{j+1}$, et donc par indépendance de ces événements,

$$\mathbf{P}([V=j] \cap [T=j+1]) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^j \frac{1}{N}.$$

8.b. Nous venons de traiter le cas où $k = j+1$.
Si $k \neq j+1$, alors les événements $[V = j]$ et $[T = k]$ sont incompatibles.
En effet, si $k < j+1$, puisque $T \geqslant V+1$, on ne peut avoir $[V = j]$ et $[T = k]$ en même temps.
Et si $k > j+1$, si on pouvait avoir à la fois $[V = j]$ et $[T = k]$, cela signifierait que lors des k premiers tirages, on a eu exactement j boules blanches, et donc $k-j \geqslant 2$ boules noires. Et donc au bout de $k-1$ tirages, puisque $j \geqslant 2$, on avait déjà au moins une boule blanche et une boule noire, ce qui est absurde puisque nous avons supposé que ceci se produisait pour la première fois au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Ainsi,

$$\mathbf{P}([V = j] \cap [T = k]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j+1 \\ \left(\dfrac{N-1}{N}\right)^j \dfrac{1}{N} & \text{si } k = j+1 \end{cases}$$

9. On a $\mathbf{P}(T = 0) \neq 0$, $\mathbf{P}(V = 1) \neq 0$, mais pourtant $\mathbf{P}([T = 0] \cap [V = 1]) = 0$, donc $\mathbf{P}([T = 0] \cap [V = 1]) \neq \mathbf{P}(T = 0)\mathbf{P}(V = 1)$, de sorte que les deux événements $[T = 0]$ et $[V = 1]$ ne sont pas indépendants.
Et donc $\boxed{\text{les variables aléatoires } T \text{ et } V \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

10. Notons que le support de V est $V(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.
Soit $j \in [\![2, n-1]\!]$. Alors par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[T = k], k \in T(\Omega)\}$,

$$\mathbf{P}(V = j) = \sum_{k \in T(\Omega)} \mathbf{P}([V = j] \cap [T = k]) = \mathbf{P}([V = j] \cap [T = j+1]) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{j-1} \frac{1}{N}.$$

Par ailleurs, puisque les événements $[T = 0]$ et $[V = 0]$ sont égaux,

$$\mathbf{P}(V = 0) = \frac{(N-1)^n + 1}{N^n}.$$

Et donc par la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[V = j], 0 \leqslant j \leqslant n-1\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(V = 1) &= 1 - \sum_{j=2}^{n-1} \mathbf{P}(V = j) - \mathbf{P}(V = 0) \\
&= 1 - \frac{1}{N} \sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{N-1}{N}\right)^j - \frac{(N-1)^n + 1}{N^n} \\
&= 1 - \frac{1}{N} \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 \frac{1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-2}}{1 - \frac{N-1}{N}} - \frac{(N-1)^n + 1}{N^n} \\
&= 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-2}\right) - \frac{(N-1)^n + 1}{N^n} \\
&= 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 - \frac{1}{N^n} = \frac{2}{N} - \frac{1}{N^2} - \frac{1}{N^n}.
\end{aligned}$$

Remarque
On peut arriver au même résultat en distinguant tous les cas qui peuvent conduire à $[V = 1]$, puis en calculant leurs probabilités.

▸ Problème : endomorphismes cycliques

Partie I. Premiers exemples

1. Il suffit de le lire dans la première colonne de la matrice de f : $f(1,0,0) = (0,1,0)$.
Et alors $f^2(1,0,0) = f(0,1,0) = (0,0,1)$, d'après la deuxième colonne de la matrice.
Et donc si on pose $x_0 = (1,0,0)$, $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$ est la base canonique de $\mathbf{R}^3$, qui est donc génératrice de $\mathbf{R}^3$.
Par conséquent, $\text{Vect}(f^k(x_0), k \in \mathbf{N})$ contient $\text{Vect}(x_0, f(x_0), f^(x_0)) = \mathbf{R}^3$, si bien que[5] $\mathbf{R}^3 = \text{Vect}(f^k(x_0), k \in \mathbf{N})$.
Et donc $\boxed{f \text{ est cyclique}^6.}$

[5] $\text{Vect}(f^k(x_0), k \in \mathbf{N})$ est inclus dans $\mathbf{R}^3$.

[6] Quelles que soient les valeurs de α, β, γ.

2.a. On peut s'en tirer facilement à l'aide d'un produit par blocs, en notant que $A = \begin{pmatrix} B & 0_2 \\ 0_2 & B \end{pmatrix}$, où $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $B^2 = -I_2$, de sorte que par produit par blocs,

$$A^2 = \begin{pmatrix} B^2 & 0_2 \\ 0_2 & B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_2 & 0_2 \\ 0_2 & -I_2 \end{pmatrix} = \boxed{-I_4}.$$

2.b. On a donc, pour tout vecteur $x_0 \in E$, $f^2(x_0) = -x_0$, puis

$$f^3(x_0) = -f(x_0),\ f^4(x_0) = -f^2(x_0) = x_0.$$

Et alors on a facilement que pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$f^k(x_0) = \begin{cases} (-1)^p x_0 & \text{si } n = 2p \text{ est pair} \\ (-1)^p f(x_0) & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc $\text{Vect}(f^k(x_0), k \in \mathbf{N}) = \text{Vect}(x_0, f(x_0), -x_0, -f(x_0)) = \text{Vect}(x_0, f(x_0))$, qui est donc de dimension au plus 2, et donc n'est jamais égal à E tout entier.
Ainsi, $\boxed{f \text{ n'est pas cyclique.}}$

3.a. Les deux dernières colonnes de A étant égales, elles ne forment pas une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, et donc $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$

> **Autrement dit**
> L'espace engendré par les colonnes de A est engendré par les $n-1$ premières colonnes et donc de dimension au plus $n-1$. Donc $\text{rg}(A) \leqslant n-1 < n$.

3.b. Les $n-1$ premières colonnes de A sont des vecteurs distincts de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, donc forment une famille libre.
En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A, puisque $C_n = C_{n-1}$, on a donc $\text{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_{n-1})$ qui est de dimension $n-1$.
Et donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = \boxed{n-1.}$

3.c. On a donc $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3, \dots, f(e_{n-1}) = e_n$, de sorte que

$$\text{Vect}(f^k(e_1), k \in \mathbf{N}) \supset \text{Vect}(e_1, f(e_1), \dots, f(e_{n-1})) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = \mathbf{R}^n.$$

Et donc $\boxed{f \text{ est cyclique.}}$

4.a. On a donc $f(x_0) = f(e_1 + \cdots + e_n) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
Et plus généralement, puisque $f(e_i) = \lambda_i e_i$, alors $f^2(e_i) = \lambda_i f(e_i) = \lambda_i^2 f(e_i)$, puis $f^3(e_i) = \lambda_i^2 f(e_i) = \lambda_i^3 e_i$ et une récurrence facile prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^k(e_i) = \lambda_i^k e_i$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$f^k(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f^k(e_i) = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k e_i.}$$

4.b. On a donc

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_0 & f(x_0) & f^2(x_0) & \dots & f^{n-1}(x_0) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_n \end{array}.$$

4.c. Soient $P, Q \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Alors

$$\varphi(\mu P+Q) = ((\mu P+Q)(\lambda_1), \dots, (\mu P+Q)(\lambda_n)) = (\mu P(\lambda_1)+Q(\lambda_1), \dots, \mu P(\lambda_n)+Q(\lambda_n)) = \mu\varphi(P)+\varphi(Q).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a alors $\varphi(X^k) = (\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$, si bien que la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{R}^n$ est

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \dots & \varphi(X^{n-1}) \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{n-1} & \lambda_{n-1}^2 & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} (1,0,\dots,0) \\ (0,1,\dots,0) \\ \vdots \\ (0,\dots,1,0) \\ (0,\dots,0,1) \end{array} = M.$$

4.d. Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_n)$. Puisque les λ_i sont deux à deux distincts, P possède alors n racines distinctes, et étant de degré au plus n, c'est le polynôme nul.
Donc $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_{\mathbf{R}[X]}\}$, si bien que φ est injectif.
Puisque $\dim \mathbf{R}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbf{R}^n$, φ est donc bijectif.

Ainsi, sa matrice dans n'importe quelles bases de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{R}^n$ est inversible, et c'est notamment le cas de M.
On en déduit que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est libre, et étant de cardinal $n = \dim \mathbf{R}^n$, c'est une base de $\mathbf{R}^n$.
Et donc $E = \operatorname{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, de sorte que $\boxed{f \text{ est cyclique.}}$

Partie II. Cas général

5. Une base de E adaptée à f.

5.a. Si on avait $x_0 = 0_E$, alors il viendrait $E = \operatorname{Vect}(f^k(0_E), k \in \mathbf{N}) = \operatorname{Vect}(0_E) = \{0_E\}$, ce qui n'est pas le cas puisque $\dim E \geqslant 2$.

Détails
Puisque $x_0 \neq 0_E$, la famille formée du seul vecteur x_0 est libre.

5.b. L'ensemble K est non vide car il contient $k = 0$.
Par ailleurs, puisque E est dimension n, une famille libre possède au plus n vecteurs, et donc $K \subset [\![0, n-1]\!]$.
Donc comme toute partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$, K possède un plus grand élément m.

5.c. Par définition de m, $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m+1}(x_0))$ est une famille liée.

Il existe donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{m+1}$ des réels non tous nuls[7] tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m+1} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$.

Si on avait $\lambda_{m+1} = 0$, alors il viendrait $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f^k(x_0) = 0_E$, ce qui par liberté de $(x_0, \dots, f^m(x_0))$ impliquerait que $\lambda_0 = \cdots = \lambda_m = 0$, contredisant le fait que $(\lambda_0, \dots, \lambda_{m+1}) \neq (0, \dots, 0)$.

Et donc $\lambda_{m+1} \neq 0$, si bien que $f^{m+1}(x_0) = -\dfrac{1}{\lambda_{m+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \lambda_k f^k(x_0)$.

Ainsi, $f^{m+1}(x_0) \in \operatorname{Vect}(x_0, \dots, f^m(x_0))$.

[7] Rappelons que ceci signifie que l'un au moins des λ_i est non nul, à ne pas confondre avec «tous non nuls».

Une fois ceci établi, prouvons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ que $f^{m+k}(x_0) \in \operatorname{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$.
Nous venons d'initialiser la récurrence. Soit $k \in \mathbf{N}$ tel que $f^{m+k}(x_0) \in \operatorname{Vect}(x_0, \dots, f^m(x_0))$, et soient $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in \mathbf{R}$ tels que $f^{m+k}(x_0) = \alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_m f^m(x_0)$.
Alors

$$f^{m+k+1}(x_0) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k f^m(x_0)$$

Mais $f(x_0), \dots, f^{m+1}(x_0)$ sont dans le sous-espace vectoriel $\operatorname{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$, donc il en est de même de $f^{m+k+1}(x_0)$.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N},\ f^{m+k}(x_0) \in \operatorname{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0)).}$

5.d. Ainsi, $E = \operatorname{Vect}(f^k(x_0), k \in \mathbf{N}) \subset \operatorname{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$, si bien que $(x_0, f(x_0), \dots, f^m(x_0))$ est génératrice de E. Puisqu'elle est libre, c'est $\boxed{\text{une base de } E}$, donc de cardinal n.
Or son cardinal est $m+1$, si bien que $n = m+1$, et donc $\boxed{m = n-1.}$.

6.a. On a donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(x_0) & f(f(x_0)) & \dots & f(f^{n-2}(e_1)) & f(f^{n-1}(x_0)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_0 \\ f(x_0) \\ \vdots \\ f^{n-2}(x_0) \\ f^{n-1}(x_0) \end{array}.$$

Terminologie
Une matrice de cette forme est appelée une matrice compagnon, et vous avez peut-être remarqué que les matrices des questions 1 et 3 sont toutes deux de cette forme.

6.b. Puisque $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \lambda I_n$, on a donc $\mathrm{rg}(f - \lambda\mathrm{id}_E) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) - \lambda I_n\right)$.
Échelonnons donc cette dernière matrice à l'aide d'opérations sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ -\lambda & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 + \lambda a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 + \lambda a_1 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda^2 L_2}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -\lambda^3 & \dots & \dots & 0 & a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_2 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1}-\lambda \end{pmatrix}$$

De proche en proche, en répétant les opérations $L_i \leftrightarrow L_{i+1}$ et $L_{i+1} \leftarrow L_{i+1} + \lambda^i L_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$, on se ramène à

$$\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & a_3 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & -\lambda^{n-1} & a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \underset{L_{n-1} \leftrightarrow L_n}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & a_3 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1} - \lambda \\ \vdots & & \ddots & & & -\lambda^{n-1} & a_0 + + \dots + a_{n-2}\lambda^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_n \leftarrow L_n + \lambda^{n-1} L_{n-1}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -\lambda & & & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \dots & 0 & a_3 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & 1 & a_{n-1} - \lambda \\ \vdots & & \ddots & & & 0 & a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} - \lambda^n \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est échelonnée, possède des pivots[8] sur les $n-1$ premières lignes, et un $-P(\lambda)$ en dernière position.
▶ Si λ est racine de P, alors al dernière ligne est nulle, et donc notre matrice est de rang $n-1$. Et donc $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = n-1$.
▶ Si λ n'est pas racine de P, on a une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls : elle est inversible, et donc de rang n. Et donc $\mathrm{rg}(f - \lambda\mathrm{id}_E) = n$.

[8] Tous égaux à 1.

Partie III. Commutant d'un endomorphisme cyclique

7. Puisque f commute avec toute puissance de f, il vient facilement

$$h \circ f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k \circ f = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f \circ f^k = f \circ \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k = f \circ h.$$

Donc $\boxed{f \text{ et } h \text{ commutent.}}$

8. Il suffit de faire le calcul : pour tout $k \in \mathbf{N}$, comme g et f commutent, il en est de même de g et f^k, et donc

$$g\left(f^k(x_0)\right) = f^k(g(x_0)) = f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(x_0)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{i+k}(x_0) = h\left(f^k(x_0)\right).$$

9. En particulier, les deux endomorphismes g et h coïncident sur la base $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, et donc sont égaux.

10. Notons $F = \{g \in \mathscr{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$.
Alors $0_{\mathscr{L}(E)} \in F$, et pour $g_1, g_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$f \circ (\lambda g_1 + g_2) = \lambda f \circ g_1 + f \circ g_2 = \lambda g_1 \circ f + g_2 \circ f = (\lambda g_1 + g_2) \circ f.$$

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

> **Terminologie**
> L'ensemble F est appelé le **commutant** de f.

Il est clair qu'il contient tous les $f^k, k \in \mathbf{N}$, et donc $\mathrm{Vect}(f^k, k \in \mathbf{N}) \subset F$.
Et la question précédente prouve que si $g \in F$, alors $g \in \mathrm{Vect}(f^k, k \in \mathbf{N})$.
Donc par double inclusion, $\boxed{F = \mathrm{Vect}(f^k, k \in \mathbf{N}).}$

Mais la question précédente est plus fine, et prouve que $F \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$. Et l'inclusion réciproque est évidente, si bien que $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$. Et donc $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est génératrice de F.

Prouvons qu'elle est libre : soient $\mu_0, \dots, \mu_{n-1} \in \mathbf{R}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Alors en particulier, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mu_k f^k(x_0) = 0_E$, et donc par liberté de $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$, $\mu_0 = \mu_1 = \dots = \mu_{n-1} = 0$.

Ainsi $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre, donc une base de F, qui se trouve donc être de dimension n.