Devoir surveillé 1 (3h)

► *Les calculatrices sont **interdites**.*
► *Toutes les réponses doivent être justifiées.*
► *Vous apporterez un soin particulier à la présentation, à la lisibilité et à l'orthographe de vos copies.*
***La qualité de la rédaction, la clarté et la finesse des raisonnements** sont prises en compte dans la note finale.*
► *Merci de numéroter entièrement les réponses (par exemple 6.c. et pas seulement c.) et **d'encadrer vos résultats**.*
► *Si vous repérez ce qui **vous semble être une erreur d'énoncé**, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.*

► Exercice 1 — *1h*

Les questions 1), 2), 3), 4) et 5) sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Écrire la négation de l'assertion suivante :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x, y \in \mathbf{R},\ |x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
   a. Prouver que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ (n-1)x^n + 1 \geqslant nx^{n-1}$.
   b. En déduire que : $\forall a, b \in \mathbf{R}_+^*,\ (n-1)a^n + b^n \geqslant na^{n-1}b$.
3. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction affine g et une unique fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui s'annule en -1 et en 1 telles que $f = g + h$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Calculer $\left\lfloor \sqrt{n^2+3n+3} \right\rfloor$.
5. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$.
   a. Justifier que $\forall x \in [0,1[,\ f(x) = 0$.
   b. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x+1) = f(x)$.
   c. En déduire alors que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

► Exercice 2 — *15 min*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite telle que $u_1 = 2$ et $\forall k \in \mathbf{N}^*,\ \begin{cases} u_{2k} = 2u_k \\ u_{2k+1} = u_k + u_{k+1} \end{cases}$.

1. Déterminer u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer la valeur de u_n.

► Exercice 3 — *30 min*

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{1\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

1. Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+x} - 1 \geqslant \frac{x}{3}$, d'inconnue $x \in [-1, +\infty[$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1 \geqslant \frac{1}{3(n+1)}$.
3. Prouver alors que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \leqslant 4 - \frac{3}{\sqrt{n}}$.
4. En déduire que la suite (u_n) admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

▸ Exercice 4 : une équation fonctionnelle — 45 min

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant la relation (♥) suivante :

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ |f(x) + f(y)| = |x + y| \qquad (\heartsuit).$$

1. Dans la suite, on notera $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ et $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array} \right.$.
   Justifier que les fonctions f_1 et f_2 satisfont (♥).
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On considère les deux assertions (P_1) et (P_2) suivantes :

$$(P_1) \qquad (\forall x \in \mathbf{R}, |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x) \textbf{ ou } (\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = -x)\,.$$

$$(P_2) \qquad (\forall x \in \mathbf{R},\ |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x \textbf{ ou } f(x) = -x)\,.$$

   Justifier soigneusement que l'une de ces assertions est vraie et que l'autre est fausse.
3. Dans cette question, et seulement dans cette question, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant (♥).
   a. Prouver que $f(0) = 0$.
   b. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| = |x|$.
   c. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, prouver que

$$(\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x) \textbf{ ou } (\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = -x).$$

4. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfaisant (♥).

▸ Exercice 5 : nombres de Fibonacci — 45 min

On définit une suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $F_0 = F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Un entier naturel k est appelé un nombre de Fibonacci s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $k = F_n$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n \in \mathbf{N}$.
2. Montrer que $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.
3. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F_n \geqslant n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sqrt{2}F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n$.
   En déduire que les côtés d'un triangle rectangle ne peuvent pas tous être des nombres de Fibonacci.
5. Résoudre l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

Dans la suite, on note α la plus grande des deux solutions de $x^2 - x - 1 = 0$ et β la plus petite.

6. Prouver que si $x \in \{\alpha, \beta\}$, alors pour tout $n \geqslant 2$, $x^n = xF_{n-1} + F_{n-2}$.
7. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right)$.
8. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, F_n est l'entier le plus proche de $\dfrac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}$. Quand a-t-on $F_n = \left\lfloor \dfrac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \right\rfloor$?

▸ Question subsidiaire (à n'aborder que si vous estimez avoir <u>très bien</u> réussi tout le reste)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On joue au jeu (à un seul joueur) suivant :

- au départ on dispose d'une pile de n jetons.
- un tour de jeu consiste à diviser en deux une des piles comportant au moins deux jetons.
  On marque alors autant de points que le produit des tailles des deux petites piles ainsi créées. Par exemple si on divise une pile de 8 jetons en une pile des 5 jetons et une pile de 3 jetons, alors on marque $5 \times 3 = 15$ points.
- le jeu s'arrête lorsque toutes les piles ne comportent qu'un seul jeton.

Quel est le score maximal d'une partie qui commence avec n jetons ?

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

► Exercice 1

1. La seule difficulté est dans la négation de l'implication, on se souviendra que la négation de $P \Rightarrow Q$ est P **et** (**non** Q).
Donc ici, la négation de l'assertion donnée est

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x, y \in \mathbf{R},\ |x-y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.}$$

Rappel

En cas de doute sur cette négation, on se souviendra que

$P \Rightarrow Q \equiv$ (**non** P) **ou** Q.

2.a. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f : x \mapsto (n-1)x^n + 1 - nx^{n-1}$.
Alors f est dérivable car polynomiale, et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$f'(x) = n(n-1)x^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} = n(n-2)x^{n-2}(x-1).$$

Par conséquent, $f'(x)$ est du signe de $x-1$. On en déduit le tableau de variations suivant

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Et puisque $f(1) = (n-1) + 1 - n = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) \geqslant 0$, soit encore $(n-1)x^n + 1 - nx^{n-1} \geqslant 0$.
Et donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R}_+^*,\ (n-1)x^n + 1 \geqslant nx^{n-1}.}$

2.b. Soient $a, b \in \mathbf{R}_+^*$. Alors $\frac{a}{b} \in \mathbf{R}_+^*$, si bien que par la question précédente, $(n-1)\dfrac{a^n}{b^n} + 1 \geqslant n\dfrac{a^{n-1}}{b^{n-1}}$.
Après multiplication[1] par b^n, $\boxed{(n-1)a^n + b^n \geqslant na^{n-1}b.}$

[1] Puisque $b^n > 0$, le sens de l'inégalité est préservé.

3. Procédons par analyse-synthèse.

► **Analyse** : supposons qu'il existe g affine et $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant $h(1) = h(-1) = 0$ et $f = g + h$, et fixons de telles fonctions g et h.
Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = ax + b$. Alors

$$f(1) = g(1) + \underbrace{h(1)}_{=0} = a + b \text{ et } f(-1) = g(-1) + \underbrace{h(-1)}_{=0} = -a + b.$$

On en déduit que $f(1) + f(-1) = 2b$ et donc $b = \frac{f(1)+f(-1)}{2}$ et de même, $f(1) - f(-1) = 2a$ si bien que $a = \frac{f(1)-f(-1)}{2}$.

Et alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \dfrac{f(1) - f(1)}{2}x - \dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$.
Ainsi, si de telles g et h existent, elles sont uniques, déterminées par les formules ci-dessus.

Existence

F... se ne

Rédaction

Pour prouver l'existence, il est important de bien préciser ce qu'on va appeler g et h dans la suite. Même si les formules sont celles qui sont sorties de l'analyse.

► **Synthèse** : définissons deux fonctions g et h sur $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = \frac{f(1) - f(-1)}{2}x + \frac{f(1) + f(-1)}{2} \text{ et } h(x) = f(x) - g(x).$$

Alors g est clairement affine, et il est évident que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$.
Par ailleurs, on a $h(1) = f(1) - \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} - \dfrac{f(1) + f(-1)}{2} = f(1) - \dfrac{2f(1)}{2} = 0$ et de même, $h(-1) = f(-1) + \dfrac{f(1) - f(-1)}{2} - \dfrac{f(1) + f(-1)}{2} = f(-1) - \dfrac{2f(-1)}{2} = 0$.
Et donc on a bien prouvé l'existence d'un couple (g, h) de fonctions avec g affine, h s'annulant en -1 et en 1 et $f = g + h$.

Puisque nous avons prouvé à la fois l'existence et l'unicité de g et h, il existe donc un unique couple de fonctions (g, h), avec g affine et $h(1) = h(-1) = 0$ tel que $f = g + h$.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $n^2+2n+1 \leqslant n^2+3n+3 < n^2+4n+4$ soit encore $(n+1)^2 \leqslant n^2+3n+3 < (n+2)^2$.
Par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbf{R}_+$, on en déduit que

$$n+1 \leqslant \sqrt{n^2+3n+3} < n+2.$$

Et donc $\boxed{\left\lfloor \sqrt{n^2+3n+3} \right\rfloor = n+1.}$

> **Détails**
> Nous venons de trouver un entier k tel que
> $$k+1 \leqslant \sqrt{n^2+3n+3} < k+1.$$
> Or un tel entier est unique, et est égal, par définition, à la partie entière cherchée.

5.a. Soit $x \in [0,1[$. Alors $0 \leqslant \frac{x}{3} < \frac{1}{3} < 1$, $0 \leqslant \frac{x+1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ et $0 \leqslant \frac{x+2}{3} < 1$, si bien que

$$\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor = 0.$$

Et de plus, $\lfloor x \rfloor = 0$, et donc $\boxed{f(x) = 0.}$

5.b. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+3}{3} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3}+1 \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) = \boxed{f(x).} \end{aligned}$$

5.c. Nous venons donc de prouver que f est 1-périodique.
Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)$, avec $\lfloor x \rfloor \in \mathbf{Z}$ et $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$.
Par 1-périodicité de f, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(x + n \times 1) = f(x)$, et donc en particulier, pour $n = \lfloor x \rfloor$, il vient $f(x) = f(x - \lfloor x \rfloor)$.
Mais par la question 5.a., $f(x - \lfloor x \rfloor) = 0$, et donc $f(x) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ et donc $\boxed{\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.}$

▸ Exercice 2

1. On a $u_2 = u_{2\times 1} = 2u_1 = 4$, puis $u_3 = u_{2\times 1+1} = u_1 + u_{1+1} = 2+4 = 6$.
Ensuite, $u_4 = u_{2\times 2} = 2u_2 = 8$ et $u_5 = u_{2\times 2+1} = u_2 + u_3 = 10$.

2. Il semble légitime au vu des premières valeurs de penser que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 2n$.
Prouvons-le par récurrence **forte**, en notant, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n) : u_n = 2n$.
Puisque $u_1 = 2 = 2 \times 1$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \dots, \mathscr{P}(n)$ soient vraies.
▸ Si $n+1$ est pair, notons $k = \frac{n+1}{2}$, qui est dans $[\![1,n]\!]$. Alors $u_{n+1} = u_{2k} = 2u_k$.
Mais par hypothèse de récurrence, $u_k = 2k$, et donc $u_{n+1} = 2 \times 2k = 2(n+1)$.
▸ Si $n+1$ est impair, notons alors $k = \frac{n}{2}$, de sorte que $n+1 = 2k+1$.
Notons que k est clairement dans $[\![1,n]\!]$, et puisque $\frac{n}{2} < n$ et donc $k+1 \leqslant n$.
Donc par hypothèse de récurrence, $u_k = 2k$ et $u_{k+1} = 2(k+1)$.
Et donc $u_{n+1} = 2k + 2(k+1) = 2(2k+1) = 2(n+1)$.
Ainsi, quelle que soit la parité de n, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence forte, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, u_n = 2n.}$

> **Méthode**
> La nécessité d'une récurrence forte est claire ici : pour déterminer la valeur de u_{n+1}, il ne suffit pas de connaître celle de u_n, mais celle de l'un des termes entre u_1 et u_n.

▸ Exercice 3.

1. Soit $x \in [-1, +\infty[$.

$$\sqrt{1+x} - 1 \geqslant \frac{x}{3} \Leftrightarrow \sqrt{1+x} \geqslant \left(1 + \frac{x}{3}\right) \Leftrightarrow 1 + x \geqslant \left(1 + \frac{x}{3}\right)^2.$$

Soit encore si et seulement si

$$1 + x \geqslant \frac{x^2}{9} + \frac{2}{3}x + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{1}{3}x \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leqslant 0 \Leftrightarrow x(x-3) \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant 3.$$

Et donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'inéquation est } [0,3].}$

> **Détails**
> Puisque $1 + \frac{x}{3} \geqslant 0$, et que la fonction carré est **strictement** croissante sur $\mathbf{R}_+$, le passage au carré dans l'inégalité est bien une équivalence.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $\frac{1}{n} \in [0,3]$, de sorte que

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1 \geqslant \frac{1}{3n} \geqslant \boxed{\frac{1}{3(n+1)}.}$$

3. Prouvons par récurrence[2] sur $n \in \mathbf{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(n)\ : u_n \leqslant 4 - \dfrac{3}{\sqrt{n}}$.

[2] Simple.

On a $u_1 = 1$, et donc $u_1 \leqslant 4 - \dfrac{3}{\sqrt{1}}$ si bien que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie.
On a donc $u_n \leqslant 4 - \dfrac{3}{\sqrt{n}}$, et puisque $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}$, alors

$$u_{n+1} \leqslant 4 - \frac{3}{\sqrt{n}} + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}.$$

Prouvons que $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} - \dfrac{3}{\sqrt{n}} \leqslant -\dfrac{3}{\sqrt{n+1}}$.
On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} - \frac{3}{\sqrt{n}} \leqslant -\frac{3}{\sqrt{n+1}} &\Leftrightarrow \frac{1}{3(n+1)\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant -\frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3(n+1)} - \sqrt{\frac{n+1}{n}} \leqslant -1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{3(n+1)} \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1.
\end{aligned}$$

On a multiplié les deux membres par $\sqrt{n+1}$.

Or nous avons prouvé à la question précédente que cette dernière inégalité est vraie.
On en déduit que $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} - \dfrac{3}{\sqrt{n}} \leqslant -\dfrac{3}{\sqrt{n+1}}$, si bien que

$$u_{n+1} \leqslant 4 + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} - \frac{3}{\sqrt{n}} \leqslant 4 - \frac{3}{\sqrt{n+1}}.$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ u_n \leqslant 4 - \dfrac{3}{\sqrt{n}}.}$

⚠ Attention !
Pour prouver qu'une suite est majorée, il faut prouver qu'elle est toujours plus petite qu'une constante indépendante de n. D'où la nécessité de se débarasser du $\frac{3}{\sqrt{n}}$ dans l'inégalité précédente.

4. En particulier, on a $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \leqslant 4$. Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée.
Par ailleurs, puisque pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} > 0$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
Par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$

▸ Exercice 4 : une équation fonctionnelle.

1. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Alors $|f_1(x) + f_1(y)| = |x+y|$, et donc $\boxed{f_1 \text{ vérifie } (\heartsuit).}$
De même, pour $x, y \in \mathbf{R}$, $|f_2(x)+f_2(y)| = |-x-y| = |-(x+y)| = |x+y|$ donc $\boxed{f_2 \text{ vérifie } (\heartsuit).}$

2. Prouvons que (P_2) est vraie, en prouvant l'équivalence par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\forall x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| = |x|$, et soit $x \in \mathbf{R}$.
Alors $|f(x)| = |x|$, et donc $f(x) = x$ **ou** $f(x) = -x$.
Ainsi, on a bien $\forall x \in \mathbf{R}$, $(f(x) = x$ **ou** $f(x) = -x)$, si bien que l'implication

$$(\forall x \in \mathbf{R},\ |f(x)| = |x|) \Rightarrow (\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x \textbf{ ou } f(x) = -x)$$

est vraie.

Rappel
Deux réels ont même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall x \in \mathbf{R}$, $(f(x) = x$ **ou** $f(x) = -x)$.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$, de sorte qu'on a $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.
Dans le premier cas, il vient $|f(x)| = |x|$, et dans le second cas, $|f(x)| = |-x| = |x|$.

Et donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| = |x|$.
Et ainsi, on a prouvé

$$(\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x \textbf{ ou } f(x) = -x) \Rightarrow (\forall x \in \mathbf{R},\ |f(x)| = |x|).$$

Par double implication, (P_2) est vraie.

En revanche l'assertion (P_1) n'est pas toujours vraie, comme le prouve le cas de la fonction $f : x \mapsto |x|$.
En effet, celle-ci vérifie bien $\forall x \in \mathbf{R}$, $|f(x)| = \big||x|\big| = |x|$.
Mais par ailleurs, $f(1) = 1 \neq -1$, de sorte que l'assertion $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = -x$ est fausse, et $f(-1) = 1 \neq -1$, de sorte que l'assertion $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = -x$ est fausse.
Et donc il n'est pas vrai que $(\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x)$ **ou** $(\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = -x)$.
Donc les assertions $(\forall x \in \mathbf{R},\ |f(x)| = |x|)$ et $(\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x)$ **ou** $(\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = -x)$ ne sont pas équivalentes et donc (P_1) est fausse.

> **Remarque**
> Si ces deux assertions ne sont pas équivalentes, on a tout de même la seconde qui implique la première.

3.a. En prenant $x = y = 0$ dans la relation (♥), on obtient $|f(0)+f(0)| = |0+0| = 0$, soit encore $2|f(0)| = 0$.
Donc $|f(0)| = 0$, si bien que $\boxed{f(0) = 0.}$

> **Remarque**
> 0 est le seul réel dont la valeur absolue est nulle. C'est même souvent un bon moyen de prouver qu'un nombre est nul.

3.b. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $|f(x) + f(0)| = |x + 0|$, soit encore $\boxed{|f(x)| = |x|.}$

3.c. Procédons par l'absurde en supposant vraie la négation de l'assertion demandée.
Cette négation est

$$(\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq x) \textbf{ et } (\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq -x).$$

Notons que bien que la variable soit nommée x dans nos deux assertions, celle-ci signifie qu'il existe un réel qui n'est pas égal à son image, et il existe un réel qui n'est pas égal à l'opposé de son image. Mais rien n'indique qu'il s'agisse du même x.
Les noms de variables étant muets, on peut encore écrire la négation ci-dessus sous la forme

$$(\exists x \in \mathbf{R},\ f(x) \neq x) \textbf{ et } (\exists y \in \mathbf{R},\ f(y) \neq -y).$$

Considérons donc deux tels réels x et y, avec $f(x) \neq x$ et $f(y) \neq -y$.
Puisque $|f(x)| = |x|$ et que $f(x) \neq x$, alors $f(x) = -x$, et de même $f(y) = y$. Notons tout de suite que x et y sont nécessairement non nuls, puisque $f(0) = 0 = -0$.
Alors $|f(x)+f(y)| = |-x+y|$, et puisque f vérifie (♥), on a également $|f(x)+f(y)| = |x+y|$.
Donc nécessairement, $-x + y = x + y$ ou $-x + y = -x - y$.
Si $-x + y = x + y$, alors $x = -x$ et donc $x = 0$, ce qui est absurde.
Et si $-x + y = -x - y$, alors $y = -y$ et donc $y = 0$, ce qui n'est pas non plus le cas.
Dans tous les cas, nous sommes arrivés à une contradiction, et donc

$$\boxed{(\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x) \textbf{ ou } (\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = -x).}$$

> **⚠ Attention !**
> Toute seule, cette affirmation dit juste que f_1 et f_2 sont les deux seules fonctions susceptibles de vérifier (♥). Autrement dit que l'ensemble des fonctions vérifiant (♥) est **inclus** dans $\{f_1, f_2\}$. Rien ne dit que ce soit une **égalité**.

4. La question précédente montre en fait que si f vérifie (♥), alors $f = f_1$ ou $f = f_2$.
Puisque par ailleurs nous avons déjà prouvé que f_1 et f_2 vérifient (♥), alors on peut en déduire $\boxed{\text{qu'il existe exactement deux fonctions vérifiant (♥), qui sont } f_1 \text{ et } f_2.}$

▸ Exercice 5 : suite de Fibonacci

1. Prouvons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $F_n \in \mathbf{N}$.
Il est évident que $F_0 \in \mathbf{N}$ et $F_1 \in \mathbf{N}$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que F_n et F_{n+1} soient entiers naturels.
Alors $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \in \mathbf{N}$.
Et donc par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ F_n \in \mathbf{N}.}$

> **⚠ Attention !**
> Qui dit récurrence double dit initialisation double.

2. Commençons par noter que la croissance de cette suite est facile puisque $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $F_{n+1} - F_n = F_n + F_{n-1} - F_n = F_{n-1} \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $F_n \geqslant F_1 = 1$.
Et donc pour tout $n \geqslant 2$, $F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geqslant 1 > 0$.
Puisque par ailleurs, $F_1 < F_2$, on a bien prouvé que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $F_n < F_{n+1}$, et donc $\boxed{(F_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante.}}$

> **Détails**
> Si on pris soin de supposer $n \geqslant 2$, c'est car on veut garder $n - 1 \in \mathbf{N}^*$ pour utiliser l'affirmation
> $$F_{n-1} \geqslant 1$$
> prouvée ci-dessus.

3. Prouvons par récurrence simple sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $F_n \geqslant n$.
Pour $n = 1$, on a bien $F_1 = 1 \geqslant 1$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $F_n \geqslant n$.
Alors $F_{n+1} > F_n$, et puisque F_{n+1} et F_n sont des entiers, $F_{n+1} \geqslant F_n + 1 \geqslant n + 1$.
Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ F_n \geqslant n.}$

Puisque par ailleurs $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} F_n = +\infty.}$

$\sqrt{2} < 2$
Sans calculatrice ou sans parler de valeur approchée de $\sqrt{2}$, on a $\sqrt{2} < 2$ car $2 < 4$ et par stricte croissance de la racine.
De même, $2\sqrt{2} < 3$ car $8 < 9$.

4. Procédons de nouveau par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}^*$.
On a $F_2 = 2$, et donc $\sqrt{2}F_1 < F_2 \leqslant 2F_1$ et de même $F_3 = 3$, et donc $\sqrt{2}F_2 < 3 \leqslant 2F_2$
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\sqrt{2}F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n$ et $\sqrt{2}F_{n+1} < F_{n+2} \leqslant 2F_{n+1}$.
Alors par somme d'inégalités,

$$\sqrt{2}(F_n + F_{n+1}) < F_{n+1} + F_{n+2} \leqslant 2(F_n + F_{n+1})$$

soit encore $\sqrt{2}F_{n+2} < F_{n+3} \leqslant 2F_{n+2}$.
Par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ \sqrt{2}F_n < F_{n+1} \leqslant 2F_n.}$

Supposons par l'absurde qu'il existe trois entiers p, q, r tels que F_p, F_q et F_r soient les trois côtés d'un triangle rectangle.
Puisque $F_0 = F_1$, on peut supposer que p, q et r sont tous non nuls.
Quitte à les renuméroter, supposons même que $p \leqslant q \leqslant r$, de sorte que

$$F_p^2 + F_q^2 = F_r^2.$$

Détails
Par croissance de (F_n), on a $F_p \leqslant F_q \leqslant F_r$, et dans un triangle rectanle, le plus grand côté est toujours l'hypoténuse.

Puisque $F_p^2 \geqslant 1$, $q \neq r$. Et donc $q < r$. Mais alors par ce qui vient d'être dit, on a alors $F_r > \sqrt{2}F_{r-1} \geqslant \sqrt{2}F_q$.
Et donc $F_r^2 > 2F_q^2 \geqslant F_q^2 + F_p^2$, ce qui est absurde.
Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de triangle rectangle dont les trois côtés soient des nombres de Fibonacci.}}$

5. Les deux solutions de l'équation sont $\boxed{\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}.}$

6. Soit $x \in \{\alpha, \beta\}$. Par définition, on a $x^2 = x + 1 = xF_0 + xF_1$.
Prouvons par récurrence simple sur $n \geqslant 2$ que $x^n = xF_{n-1} + F_{n-2}$.
La récurrence vient d'être initialisée.
Soit $n \geqslant 2$ tel que $x^n = xF_{n-1} + F_{n-2}$. Alors

$$x^{n+1} = xx^n = xxF_{n-1}+xF_{n-2} = x^2F_{n-1}+xF_{n-2} = (x+1)F_{n-1}+xF_{n-2} = x(F_{n-1}+F_{n-2})+F_{n-1} = xF_n+F_{n-1}.$$

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2,\ x^n = xF_{n-1} + F_{n-2}.}$

7. Pour $n = 0$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 = F_0$.
Et pour $n \geqslant 1$, on a $n + 1 \geqslant 2$, si bien que par la question précédente,

$$\alpha^{n+1} - \beta^{n-1} = \alpha F_n + F_{n-1} - \beta F_n - F_{n-1} = (\alpha - \beta)F_n = \sqrt{5}F_n$$

si bien que

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) = F_n.}$$

Remarque
L'énoncé laisse entendre qu'il existe bien un seul entier qui soit plus proche de $\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}$. Ce n'est pas le cas pour tous les réels, puisque pour $x = \frac{1}{2}$, les deux entiers 0 et 1 sont à la même distance de x, et donc sont les deux les entiers les plus proches de x. Les calculs qui vont suivre vont prouver que ce cas de figure ne peut se produire ici.

8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Nous allons prouver que $\left|\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} - F_n\right| < \frac{1}{2}$.
Par la question précédente, cette condition équivalent à $\left|\frac{\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{2}$.
Puisque $2 < \sqrt{5} < 3$, $-1 < \beta < 0$, et donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|\beta^{n+1}| = |\beta|^{n+1} < 1$, et donc

$$\left|\frac{\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

Et donc F_n est bien l'entier le plus proche de $\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}$.

► Si n est pair, $n+1$ est impair, si bien que $\beta^{n+1} < 0$, et donc $F_n > \dfrac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}$.
Nécessairement[3] $F_n > \left\lfloor \dfrac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \right\rfloor$.

► En revanche, lorsque n est impair, $\beta^{n+1} \geqslant 0$, et donc $0 < \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} - F_n < \frac{1}{2}$ si bien que $F_n < \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} < F_n + \frac{1}{2} < F_n + 1$, et donc $F_n = \left\lfloor \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \right\rfloor$.
Ainsi, $F_n = \left\lfloor \frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} \right\rfloor$ si et seulement si n est impair.

Remarque : même si je n'attendais pas forcément autant de détails ici[4], justifions que pour $x \in \mathbf{R}$, s'il existe un entier $p \in \mathbf{Z}$ tel que $|x-p| < \frac{1}{2}$, alors cet entier est l'unique entier le plus proche de x.
En effet, si $q \in \mathbf{Z}$ est différent de p, alors on a $p - q \neq 0$, et donc $|p-q| \geqslant 1$.
Et alors[5]

$$|x-q| = |(x-p)+(p-q)| \geqslant \big||p-q| - |x-p|\big| \geqslant 1 - \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} > |x-p|.$$

Et donc q est strictement plus loin de p que ne l'est q.

[3] Un réel est toujours plus grand que sa partie entière.

[4] Le résultat est assez intuitif pour qu'on ait envie de penser qu'il est vrai.

[5] Par inégalité triangulaire renversée.

► Question subsidiaire

Pour commencer, il faut essayer de faire quelques parties avec un petit nombre de jetons.
Pour une partie à 3 jetons, il n'y a en gros qu'une partie possible[6] de la partie, et le seul score possible est 3.
De même, pour une partie à 4 jetons, il y a deux stratégies possibles (commencer par faire apparaître deux piles de deux jetons, ou une pile de 3 et une pile de 1) et dans les deux cas on marque 6 points.
En essayant avec un peu plus de jetons, on n'arrive pas à produire deux parties dont le score soit différent.

[6] On coupe la première pile en une pile d'un seul jeton et une pile de deux jetons.

Prouvons donc que quelle que soit la stratégie adoptée, le score est le même.
Si c'est bien le cas, cet unique score est celui de la partie la plus simple qui soit, à savoir celle où on enlève à chaque fois un seul jeton de la pile.
Mais avec cette stratégie, le score d'une partie à n jetons est

$$1 \times (n-1) + 1 \times (n-2) + \cdots + 1 \times 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Prouvons par récurrence **forte** sur $n \geqslant 2$ qu'une partie à n jetons se termine toujours par un score de $\frac{n(n-1)}{2}$. La récurrence a déjà été initialisée pour $n = 2$.
Soit $n \geqslant 2$ tel que toute partie commencée à k jetons, avec $k \in [\![1, n]\!]$ se termine par un score de $\frac{k(k-1)}{2}$.
Commençons alors une partie avec une pile de $n+1$ jetons.
Le premier mouvement va consister à séparer notre pile en une pile de k jetons, avec $k \in [\![1, n]\!]$ et une pile de $n+1-k$ jetons.
Ce premier mouvement nous rapporte $k(n+1-k)$ points.
Il s'agit ensuite de jouer une partie avec la pile de k jetons et une partie avec la pile de $n+1-k$ jetons.
Par hypothèse de récurrence, quelle que soit la manière dont on joue, le score de la partie à k jetons est $\frac{k(k-1)}{2}$, et puisque $n+1-k \in [\![1, n]\!]$, le score de la partie à $n+1-k$ jetons est $\frac{(n+1-k)(n-k)}{2}$.
Donc le score final de notre partie à $n+1$ jetons est

$$\begin{aligned}
k(n+1-k) + \frac{k(k-1))}{2} + \frac{(n+1-k)(n-k)}{2} &= \frac{1}{2}\left(2kn + 2k - 2k^2 + k^2 - k + (n-k)^2 + n - k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2kn + 2k - 2k^2 + k^2 - k + n^2 - 2kn + k^2 + n - k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(n^2 + n\right) = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence forte, pour tout $n \geqslant 2$, une partie commencée à n jetons amène toujours un score final de $\frac{n(n-1)}{2}$, qui est donc le score maximal.