Devoir surveillé 6

► Exercice 1 : analyse asymptotique

Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes. Vous prendrez soin de justifier toutes les étapes de vos calculs.

1. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} \ln(x)\tan(\ln(1+x))$, $\lim_{n\to+\infty} n(n+1)\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{2n^4+n}\right)}$.

2. Donner un équivalent (lorsque $n \to +\infty$), le plus simple possible, des trois suites suivantes :

$$u_n = n\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right) \qquad v_n = \frac{\sqrt{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}}{(-1)^n + n\ln(n) + n\sqrt{n}} \qquad w_n = \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\left(n^{2/n}-1\right)^2}.$$

3. a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation $1+\ln(x+n) = x$, d'inconnue $x \in \mathbf{R}_+$ possède une unique solution que l'on notera x_n.
   b. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
   c. Montrer que pour tout n suffisamment grand, $\ln(n) \leqslant x_n \leqslant n$.
   d. En déduire un équivalent de x_n.
   e. Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + 1 + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

► Exercice 2 : fonctions

Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ deux fonctions continues telles que $f\circ g = g\circ f$.
On note $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f.

1. Justifier que A possède une borne inférieure que l'on notera a et une borne supérieure que l'on notera b.
2. En utilisant par exemple une caractérisation séquentielle de la borne supérieure, montrer que $b \in A$.
3. Prouver que $g(b) \in A$. Quelle inégalité liant $g(b)$ et b en déduit-on ?
4. Montrer enfin qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

► Problème : étude d'une famille de polynômes

Dans tout le problème, on fixe un entier $n \in \mathbf{N}^*$.
On dit qu'un couple $(U, V) \in \mathbf{R}[X]^2$ satisfait la relation $(\star)$ si $(1-X)^n U + X^n V = 1$.

Partie I. Étude des couples (F_n, G_n)

1. Soient (U_1, V_1) et (U_2, V_2) deux couples de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ satisfaisant tous les deux $(\star)$.
   - a. Montrer que 0 est racine de $U_1 - U_2$ de multiplicité au moins n.
   - b. En déduire qu'il existe $A \in \mathbf{R}[X]$ tel que $(U_2, V_2) = (U_1 - X^n A, V_1 + (1-X)^n A)$.
   - c. Prouver qu'il existe au plus un couple $(U, V) \in \mathbf{R}_{n-1}[X]^2$ satisfaisant $(\star)$.
2. En développant $\left((1-X)+X\right)^{2n-1}$, justifier qu'il existe un unique couple (F_n, G_n) formé de polynômes de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ et satisfaisant $(\star)$.
   On exprimera F_n et G_n sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à simplifier.
3.
   - a. Calculer $F_n(0)$ et $F_n(1)$.
   - b. Montrer que $G_n = F_n(1-X)$.
   - c. Calculer $F_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

Partie II. Une équation différentielle vérifiée par F_n.

Dans toute la suite du problème, on suppose que n est un entier supérieur ou égal à 2.

4.
   - a. Après avoir justifié que $(1-X)^n F_n + X^n F_n(1-X) = 1$, et en dérivant les deux membres de cette relation, justifier que 0 est racine de multiplicité au moins $n-1$ de $(1-X)F_n' - nF_n$.
   - b. En déduire que $(X-1)F_n' + nF_n = n\binom{2n-1}{n}X^{n-1}$.
   - c. Montrer alors que F_n est degré $n-1$ et de coefficient dominant égal à $\binom{2n-2}{n-1}$.
5. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note a_k le coefficient de degré k de F_n, de sorte que $F_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
   - a. Déduire de la question précédente une relation liant a_k et a_{k+1}.
   - b. Déterminer alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la valeur de a_k. On déterminera en particulier le signe de a_k.
6. Déduire de ce qui précède les deux égalités suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+n-1}{k} = \binom{2n-1}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{2n-1}{k} = \binom{2n-2}{n-1}.$$

Partie III. Racines de F_n

Dans cette partie, on suppose toujours $n \geqslant 2$. On note alors $A_n = (1-X)^n F_n$.

7. Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme A_n.
8. Déterminer le polynôme dérivée A_n' de A_n. Déterminer ses racines et leurs multiplicités.
9. Dans cette question, on suppose que n est pair.
   - a. Déterminer les limites de A_n' en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - b. Montrer que A_n' est de signe constant sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
   - c. Justifier **soigneusement** que pour tout $x \in]0, 1[$, $A_n'(x) < 0$.
   - d. En déduire le tableau de variations de A_n.
   - e. Prouver finalement que F_n possède une unique racine réelle, dont on déterminera le signe et la multiplicité.
10. On suppose à présent que n est impair. En adaptant la méthode proposée à la question précédente, déterminer le nombre de racines réelles de F_n.

Correction du Devoir surveillé 6

▶ Exercice 1 : analyse asymptotique

1. ▶ Puisque $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a $\tan(\ln(1+x)) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
Et donc $\ln(x)\tan(\ln(1+x)) \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(x)$.
Or un résultat de croissance comparée nous informe que $\ln(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$, soit encore $x\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Et donc $\boxed{\lim_{x\to 0} \ln(x)\tan(\ln(1+x)) = 0.}$

▶ Puisque $\dfrac{1}{2n^4+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a donc $\ln\left(\dfrac{1}{2n^4+n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^4+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^4}$.
Et donc[1] $\sqrt{\ln\left(1+\dfrac{1}{2n^4+n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}n^2}$.
Puisque par ailleurs, $n(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, par produit d'équivalents,

$$n(n+1)\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{2n^4+n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{\sqrt{2}n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

[1] Rappelons que si deux suites positives sont équivalentes, alors leurs racines carrées le sont aussi.

2. ▶ On a $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, si bien que $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}$.

Avec clairement[2] $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} = 0$.

Donc $\ln\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n\ln n}$.

Et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln n}.}$

[2] Il n'y a pas de forme indéterminée.

▶ Puisque $(-1)^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n\sqrt{n})$ et que[3] $n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n\sqrt{n})$, alors

$$(-1)^n + n\ln(n) + n\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sqrt{n}.$$

[3] Par croissances comparées car $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

Par ailleurs, $1-\cos\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ donc $\sqrt{1-\cos\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}n}$.

Rappel

$\cos x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Et donc par produit d'équivalents, $\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}n^{5/2}}.}$

▶ Il est évident[4] que $\sin\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.
De plus, $n^{2/n} - 1 = \exp\left(\frac{2}{n}\ln(n)\right) - 1$.
Puisque $\frac{2}{n}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut utiliser l'équivalent classique $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, si bien que $n^{2/n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}\ln(n)$ et donc $\left(n^{2/n}-1\right)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{4\ln^2 n}{n^2}$.

On en déduit enfin que $\boxed{w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4\ln^2 n}.}$

[4] $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

3.a. Soit $n \geqslant 2$. Notons $f_n : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1+\ln(x+n) - x \end{array}\right.$.
Alors f_n est dérivable par somme et composée de fonctions qui le sont, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $f_n'(x) = \frac{1}{x+n} - 1 < 0$ car $x+n \geqslant n > 1$.
Donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$. Par ailleurs elle est continue car dérivable,

et $f_n(0) = 1 + \ln(n) > 0$ et par croissances comparées, $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$, si bien que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -\infty$.

Par le théorème de la bijection, $\boxed{\text{il existe un unique } x_n \in \mathbf{R}_+ \text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$

3.b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $1 + \ln((n+1) + x_{n+1}) - x_{n+1} = 0$.
Et donc $f_n(x_{n+1}) = 1 + \ln(n + x_{n+1}) - x_{n+1} < 1 + \ln((n+1) + x_{n+1}) - x_{n+1} = 0$.
Donc $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$ si bien que par stricte décroissance de f_n, $x_{n+1} > x_n$.
Donc $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est croissante.}}$

3.c. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $f_n(n) = 1 + \ln(2n) - n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $f_n(n) \leqslant 0$.
Et alors pour $n \geqslant n_0$, $f_n(n) \leqslant f_n(x_n)$, si bien que toujours par stricte décroissance de f_n, $x_n \leqslant n$.

De plus, par croissance de la fonction ln, il est clair que pour tout $n \geqslant 2$,

$$x_n = 1 + \ln(x+n) \geqslant 1 + \ln(0+n) \geqslant \ln(n).$$

Et donc pour tout $n \geqslant n_0$, on a bien $\boxed{\ln(n) \leqslant x_n \leqslant n.}$

3.d. On en déduit notamment que pour tout $n \geqslant 2$,

$$x_n = 1 + \ln(n + x_n) \leqslant 1 + \ln(n+n) \leqslant 1 + \ln(2) + \ln(n).$$

Donc $\ln(n) \leqslant x_n \leqslant 1 + \ln(2) + \ln(n)$.
Or $1 + \ln(2) + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, si bien que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

> **Rappel**
> Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, avec $u_n \sim w_n$, alors $v_n \sim u_n$.
> Ceci se retrouve facilement à l'aide d'un théorème des gendarmes.

3.e. On a donc $x_n = 1 + \ln(x_n + n) = 1 + \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)$.
Mais $\frac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien que $\ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.
Donc $\ln\left(1 + \frac{x_n}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$, ce qui nous conduit bien à

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).}$$

▸ Exercice 2 : fonctions continues.

1. Puisque l'ensemble A est clairement majoré par 1, il s'agit de prouver qu'il est non vide, c'est-à-dire que f possède au moins un point fixe.
À cet effet, notons $g : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$.
Alors g est continue puisque f l'est. Et puisque f est à valeurs dans $[0,1]$, on a $g(0) = f(0) - 0 \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.
Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$, si bien que f possède au moins un point fixe.
Et donc comme toute partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$, A possède une borne supérieure.
Puisque de plus 0 est un minorant de A, A possède également[5] une borne inférieure.
Notons que puisque 1 est un majorant de A, et que b est le plus petit de ces majorants, on a automatiquement $b \leqslant 1$.
Et de même, $0 \leqslant a$, si bien que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$.

[5] Car non vide et minorée.

2. Rappelons que par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (x_n) à valeurs dans A telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.
Une telle suite est donc une suite de points fixes de f, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = f(x_n)$.
Mais par continuité de f en b, $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(b)$.
Et par ailleurs, $\lim_{n\to+\infty} x_n = b$, si bien que par unicité de la limite, $b = f(b)$, et donc b est un point fixe de f.

3. Puisque $g \circ f = f \circ g$, alors $g(f(b)) = f(g(b))$.
Mais $g(f(b)) = g(b)$, si bien que $g(b) = f(g(b))$, donc $g(b) \in A$.
On en déduit en particulier que $\boxed{g(b) \leqslant b.}$

4. Sur le même principe, on prouverait à l'aide d'une caractérisations séquentielle que $a \in A$, puisque que $g(a) \in A$, et donc $a \leqslant g(a)$.

Puisque pour $c \in [0,1]$, $f(c) = g(c) \Leftrightarrow f(c) - g(c) = 0$, posons $\varphi : x \mapsto f(x) - g(x)$.
Alors nous savons que $\varphi(a) = f(a) - g(a) = a - g(a) \leqslant a - a = 0$.
Et de même, $\varphi(b) = f(b) - g(b) = b - g(b)$, et puisque $g(b) \leqslant b$, $\varphi(b) \geqslant 0$.
Puisque φ est continue[6], par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0,1]$ tel que $\varphi(c) = 0$, et donc $g(c) = f(c)$.

[6] Car f et g le sont.

▸ Problème

Partie I. Étude des couples (F_n, G_n).

1.a. On a donc $(1-X)^n U_1 + X^n V_1 = 1 = (1-X)^n U_2 + X^n V_2$, et donc en particulier,

$$(1-X)^n (U_1 - U_2) = X^n (V_2 - V_1).$$

Donc X^n divise $(1-X)^n(U_1 - U_2)$, si bien que $(1-X)^n(U_1-U_2)$ possède 0 pour racine de multiplicité au moins n. Puisque par ailleurs il possède également 1 pour racine de multiplicité au moins n, il est divisible par $X^n(1-X)^n$.
Et donc il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $(1-X)^n(U_1-U_2) = (1-X)^n X^n Q$, et donc $U_1 - U_2 = X^n Q$.

Ainsi, 0 est racine de $U_1 - U_2$ de multiplicité au moins n.

Remarque
Tout ceci serait bien plus facile si on avait une notion polynômes premiers entre eux et un analogue au théorème de Gauss : X^n divise $(1-X)^n(U_1 - U_2)$ et est premier avec $(1-X)^n$, donc il divise $U_1 - U_2$.
Patience...

1.b. Soit $A \in \mathbf{R}[X]$ tel que $U_1 - U_2 = X^n A$. Alors $U_2 = U_1 - X^n A$, et alors

$$(1-X)^n X^n A = X^n (V_2 - V_1).$$

Puisque $\mathbf{R}[X]$ est un anneau intègre, on peut simplifier par X^n, si bien que
$(1-X)^n A = V_2 - V_1$, et donc $V_2 = V_1 + (1-X)^n A$.

1.c. Soient (U_1, V_1), (U_2, V_2) deux couples de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ satisfaisant tous les deux $(\star)$. Soit alors A comme dans la question précédente. Puisque U_1 et U_2 sont tous deux de degré inférieur strict à n, $U_1 - U_2$ aussi.
Et donc $X^n A \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$, ce qui n'est possible que si $A = 0_{\mathbf{R}[X]}$.
On en déduit que $(U_2, V_2) = (U_1, V_1)$, ce qui est bien l'unicité souhaitée[7].

[7] Sous réserve d'existence.

2. Développons la quantité indiquée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
1 = ((1-X)+X)^{2n-1} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{2n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{2n-1-k} + \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{2n-1-k} \\
&= X^n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{n-1-k} + (1-X)^n \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^{k-n} X^{2n-1-k}.
\end{aligned}$$

Binôme de Newton.

Donc si on pose $F_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^{k-n} X^{2n-1-k}$ et $G_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^k X^{n-1-k}$, on a bien deux polynômes, avec $(1-X)^n F_n + X^n G_n = 1$.

Reste à justifier qu'ils sont bien tous deux de degré inférieur ou égal à $n-1$.
Mais pour tout $k \in [\![n, 2n-1]\!]$, $\deg\left((1-X)^{k-n} X^{2n-1-k}\right) = k - n + 2n - 1 - k = n - 1$, si bien que F_n est combinaison linéaire de polynômes de $\mathbf{R}_{n-1}[X]$, et donc[8] est lui-même dans $\mathbf{R}_{n-1}[X]$.
On prouve sur le même principe que $G_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

[8] $\mathbf{R}_{n-1}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

Ainsi, il existe bien un couple de $\mathbf{R}_{n-1}[X]^2$ satisfaisant $(\star)$, et par la question précédente, un tel couple est nécessairement unique.

3.a. On a $(1-0)^n F_n(0) + 0^n G_n(0) = 1$, et donc $\boxed{F_n(0) = 1.}$

Par ailleurs, on a prouvé que $F_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} (1-X)^{k-n} X^{2n-1-k}$.

Si on évalue en 1, il vient

$$F_n(1) = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} 0^{k-n} = \boxed{\binom{2n-1}{n}.}$$

⚠ Attention !
0^{n-k} est toujours nul... sauf si $n = k$ car $0^0 = 1$.

3.b. Toujours à l'aide des expressions obtenues à la question 2, il vient

$$F_n(1-X) = \sum_{k=n}^{2n-1} \binom{2n-1}{k} X^{k-n} (1-X)^{2n-1-k}.$$

Si on procède au changement d'indice $j = 2n-1-k$, on a donc

$$F_n(1-X) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-1}{2n-1-j} X^{2n-1-j-n} (1-X)^j = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-1}{j} X^{n-1-j} (1-X)^j = \boxed{G_n.}$$

3.c. On a donc, en évaluant $(\star)$ en $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^n} F_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^n} G_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

Mais $G_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_n\left(1-\frac{1}{2}\right) = F_n\left(\frac{1}{2}\right)$, si bien que $\frac{1}{2^n} F_n\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2^n} F_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ et donc $\boxed{F_n\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{n-1}.}$

Partie II. Une équation différentielle vérifiée par F_n.

4.a. Puisque $(1-X)^n F_n + X^n G_n = 1$ et que $G_n = F_n(1-X)$, alors $(1-X)^n F_n + X^n F_n(1-X) = 1$.
Donc en dérivant les deux membres, il vient

$$(1-X)^n F_n' - n(1-X)^{n-1} F_n - X^n F_n'(1-X) + nX^{n-1} F_n(1-X) = 0.$$

Soit encore $(1-X)^{n-1} \left((1-X)F_n' - nF_n\right) = X^{n-1} \left(XF_n'(1-X) - nF_n(1-X)\right)$.

En particulier, 0 est racine de multiplicité supérieure ou égale à $n-1$ du membre de droite, et donc également du membre de gauche.
Mais $(1-X)^{n-1}$ n'a pas 0 pour racine, donc[9] 0 est racine de $(1-X)F_n' + nF_n$ de multiplicité au moins $n-1$.
Or ce polynôme étant de degré au plus $n-1$, il est scindé, et possède 0 pour unique racine, nécessairement de multiplicité égale[10] à $n-1$.
Il est donc de la forme λX^{n-1}, où $\lambda \in \mathbf{R}$ = est son coefficient dominant.
Et en particulier, $(1-1)F_n'(1) - nF_n(1) = \lambda 1^{n-1}$, soit encore $\lambda = -nF_n(1) = -n\binom{2n-1}{n}$.

Et donc au final, $(1-X)F_n' + nF_n = -n\binom{2n-1}{n} X^{n-1}$, ce qui après multiplication par -1 nous conduit à l'égalité souhaitée :

$$\boxed{(X-1)F_n' + nF_n = n\binom{2n-1}{n} X^{n-1}.}$$

[9] C'est le même résultat qu'à la question 1.

[10] Et plus seulement supérieure ou égale.

4.b. Nous savons déjà que F_n est de degré au plus $n-1$.
S'il était de degré $k < n-1$, alors $(X-1)F_n'$ serait de degré au plus k, et donc il en serait de même de $(X-1)F_n' + nF_n = n\binom{2n-1}{n} X^{n-1}$, ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\deg F_n = n-1.}$

Notons a_{n-1} le coefficient de degré $n-1$ de F_n. Alors na_{n-1} est le coefficient de degré $n-1$ de nF_n, et $(n-1)a_{n-1}$ est celui de $(X-1)F_n'$.

Donc[11] $(2n-1)a_{n-1} = n\binom{2n-1}{n}$, si bien que $a_{n-1} = \frac{n}{2n-1}\binom{2n-1}{n}$.

Mais par la formule du capitaine, $n\binom{2n-1}{n} = (2n-1)\binom{2n-2}{n-1}$, et donc $\boxed{a_{n-1} = \binom{2n-2}{n-1}.}$

[11] Par identification des coefficients de degré $n-1$ dans la question précédente.

5.a. On a

$$(X-1)F_n' = (X-1)\sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^k - \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}X^k$$

si bien que l'équation différentielle de la question précédente s'écrit encore

$$\sum_{k=1}^{n-1} ka_kX^k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_{k+1}X^k + n\sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k = n\binom{2n-1}{n}X^{n-1}.$$

Donc en particulier, par identification des coefficients de degré k,

$$(k+n)a_k - (k+1)a_{k+1} = 0 \text{ et donc } \boxed{a_{k+1} = \frac{k+n}{k+1}a_k.}$$

Rédaction La récurrence finie se produit lorsque l'hérédité n'est plus valable à partir d'un certain rang. Ici elle n'a plus de sens lorsque $k = n-1$.
Donc il faut bien prendre garde de prendre, au début de l'hérédité, k dans l'intervalle où on a encore $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$.
Donc ici c'est bien $k \in [\![0, n-2]\!]$, ce qui fait que notre récurrence prouvera quelque chose pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, et pas plus loin.

5.b. Nous connaissons déjà $a_0 = F_n(0) = 1$. Donc $a_1 = a_{0+1} = na_0 = n = \binom{n}{1}$.
Puis $a_2 = \dfrac{n+1}{2}a_1 = \dfrac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$. Et alors $a_3 = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{6} = \binom{n+2}{3}$.
Prouvons par récurrence finie sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ que $a_k = \binom{n+k-1}{k}$.
La récurrence est bien initialisée.
Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ tel que $a_k = \binom{n+k-1}{k}$.
Alors $a_{k+1} = \dfrac{n+k}{k+1}\binom{n+k-1}{k} = \dfrac{1}{k+1}(k+1)\binom{n+k}{k+1} = \binom{n+(k+1)-1}{k+1}$.

Détails C'est encore la formule du capitaine.

Par le principe de récurrence, pour tout $k \in [\![0, -1]\!]$, $a_k = \binom{n+k-1}{k}$.
Notons qu'on retrouve en particulier $a_{n-1} = \binom{n+n-1-1}{n-1} = \binom{2n-2}{n-1}$.

6. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = F_n(1) = \boxed{\binom{2n-1}{n}.}$
Par ailleurs, si on reprend l'expression de F_n obtenue à la question 2, le coefficient de degré $n-1$ de F_n est $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1}\binom{2n-1}{k}(-1)^{k-n}$.
Ce qui par un changement d'indice $j = 2n-1-k$ est encore égal à

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{2n-1-j-n}\binom{2n-1}{(2n-1)-j} = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j}\binom{2n-1}{k}.$$

Détails C'est la somme des coefficients de plus haut degré (c'est-à-dire $n-1$) de chacun des polynômes composant la somme.-

Et puisque ce coefficient dominant est $a_{n-1} = \binom{2n-2}{n-1}$, on obtient bien l'égalité annoncée.

Partie III. Racines de F_n.

7. Puisque F_n est de degré $n-1$, $\deg A_n = \deg((1-X)^n) + \deg F_n = 2n-1$.
Son coefficient dominant est le produit des coefficients dominants de $(1-X)^n$ et de F_n, qui valent respectivement $(-1)^n$ et $\binom{2n-2}{n-1}$.

8. On a donc $\boxed{A_n' = n(1-X)^{n-1}F_n + (1-X)^nF_n'.}$
Puisque $F_n(1) \neq 0$, 1 n'est pas racine de F_n, et donc 1 est racine de multiplicité égale à n de A_n.
Et par conséquent est racine de A_n' de multiplicité $n-1$.

Par ailleurs, $A_n + X^nG_n = 1$, et donc $A_n' = -nX^{n-1}G_n - X^nG_n' = X^{n-1}\left(-nG_n - XG_n'\right)$ possède 0 comme racine de multiplicité au moins $n-1$.
Puisque $\deg A_n' = 2n-2$, le nombre de racines, comptées avec multiplicité, ne peut pas excéder $2n-2$.
Donc nous avons déjà toutes les racines, et la multiplicité de 0 est égale[12] à $n-1$.

[12] Et pas seulement supérieure ou égale.

9.a. Puisque $\deg A_n' = 2n-2$, qui est pair, et que son coefficient dominant est $(-1)^n(2n-1)\binom{2n-2}{n-1} > 0$,

$$A_n(x) \underset{x\to+\pm\infty}{\sim} (2n-1)\binom{2n-2}{n-1}x^{2n-2} \boxed{\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

9.b. Puisque $x \mapsto A_n'(x)$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous indique qu'elle est de signe constant sur tout intervalle où elle ne s'annule pas.
Donc en particulier, $\boxed{\text{elle est de signe constant sur }]-\infty,0[\text{, sur }]0,1[\text{ et sur }]1,+\infty[.}$

9.c. De plus, 1 est racine de A_n' de multiplicité $n-1$ qui est impair.
Soit alors $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $A_n' = (X-1)^{n-1}Q$. Nécessairement $Q(1) \neq 0$.
Alors au voisinage de 1, $A_n'(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^n Q(1)$, de sorte qu'il existe $\eta \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in]1-\eta, 1+\eta[$, $A_n'(x)$ est du signe de $(x-1)^n Q(1)$.

En particulier, pour $x \in]1, 1+\eta[$, $\underbrace{(x-1)^{n-1}}_{>0} Q(1) > 0$ car A_n' est positive[13] sur $]1,+\infty[$.

Et donc $Q(1) > 0$. Mais alors pour $x \in]1-\eta, 1[$, $\underbrace{(x-1)^{n-1}}_{<0} Q(1) < 0$ et donc $A_n'(x) < 0$.

Puisque A_n' est de signe constant sur $]0,1[$, $\boxed{\text{pour tout } x \in]0,1[,\ A_n'(x) < 0.}$

[13] Elle est de signe constant et tend vers $+\infty$.

9.d. Donc A_n est strictement croissante sur $-\infty, 0[$, strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
Par ailleurs, $A_n(1) = 0$, et donc par stricte décroissance sur $[0,1]$, $A_n(0) > A_n(1) = 0$.
Donc par le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in]-\infty, 0[$ tel que $A_n(\alpha) = 0$, et pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, $A_n(x) > 0$.
Puisque de plus $A_n(1) = 0$, α et 1 sont les seules racines de A_n.

Mais les racines de F_n sont des racines de A_n, et on sait déjà que $F_n(1) \neq 0$, donc α est la seule racine éventuelle de F_n.
Et puisque $0 = A_n(\alpha) = \underbrace{(1-\alpha)^n}_{\neq 0} F_n(\alpha)$, alors α est bien racine de F_n.

Si elle était de multiplicité supérieure ou égale à 2, elle serait également racine de A_n de multiplicité supérieure ou égale à 2, et donc on aurait $A_n'(\alpha) = 0$.
Mais A_n' est strictement positif sur $]-\infty, 0[$, si bien que $\boxed{\alpha \text{ est racine simple de } F_n.}$

Remarque
De toutes façons, F_n étant de degré impair, nous avons déjà expliqué que par le théorème des valeurs intermédiaires (ou en utilisant la décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbf{R}[X]$), il a nécessairement au moins une racine réelle.

10. Dans le cas où n est impair, A_n' est toujours de degré $2n-2$ qui est pair, mais son coefficient dominant, qui est toujours $(-1)^n(2n-1)\binom{2n-2}{n-1}$ est cette fois négatif, si bien que $\lim_{x\to\pm\infty} A_n'(x) = -\infty$.
Et donc par les mêmes arguments que précédemment, A_n' est négatif sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1,+\infty[$, et de signe constant sur $]0,1[$.
En revanche cette fois 1 est racine de multiplicité paire de A_n', et donc comme précédemment, si on note $Q \in \mathbf{R}[X]$, avec $Q(1) \neq 0$ tel que $A_n' = (X-1)^{n-1}Q_n$, alors au voisinage de 1, $A_n'(x) \underset{x\to 1}{\sim} (x-1)^{n-1}Q(1)$ et donc A_n' est de même signe que $(x-1)^{n-1}Q(1)$.
Puisque $(x-1)^{n-1}$ est strictement positif sur $\mathbf{R}\setminus\{1\}$, nécessairement A_n' est de même signe sur $]0,1[$ que sur $]1,+\infty[$, c'est-à-dire négatif.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $A_n'(x) \leqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x \in \{0,1\}$.

On en déduit que A_n est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ tout entier. Puisque par ailleurs $A_n(1) = 0$, on en déduit que pour tout $x \in]-\infty, 1[$, $A_n(x) > 0$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$, $A_n(x) < 0$.
Or pour $x \neq 1$, $F_n(x) = \dfrac{A_n(x)}{(1-x)^n}$, où $(1-x)^n$ est strictement positif si $x < 1$ et strictement négatif si $x > 1$. Autrement dit, $(1-x)^n$ et $A_n(x)$ sont de même signe, donc $F_n(x) > 0$.
Et nous savons déjà que $F_n(1) \neq 0$, si bien que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F_n(x) \neq 0$, donc
$\boxed{F_n \text{ ne possède pas de racines réelles.}}$

Détails
Le signe de $(x-1)^n$ est celui annoncé car n est impair.