Concours blanc (sujet difficile)

▸ Problème : critère de Sylvester pour les matrices symétriques définies positives.

Dans tout le problème, toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Alors $X^\top AX$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, qu'on identifiera dans toute la suite à un réel, de sorte qu'on pourra parler du signe de $X^\top AX$.

Une matrice **symétrique** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite définie positive si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{n,1}\},\ X^\top AX > 0.$$

1. Montrer que I_2 est une matrice symétrique définie positive, puis plus généralement que c'est le cas de I_n, pour tout $n \geqslant 1$.
2. Prouver que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive.
3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique définie positive, alors $\operatorname{Ker} A = \{0_{n,1}\}$. En déduire que $\det(A) \neq 0$.

Partie I. Déterminant des matrices symétriques définies positives.
Dans toute cette partie, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique définie positive, avec $n \in \mathbf{N}^*$.
On note alors $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \det(tI_n + (1-t)A) \end{array} \right.$.

4. Montrer que f est une fonction continue.
5. Justifier que pour tout $t \in [0,1]$, $tI_n + (1-t)A$ est symétrique définie positive.
6. En déduire que f ne s'annule pas sur $[0,1]$, puis que $\det(A) > 0$.

Partie II. Une caractérisation des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
On cherche dans cette partie à prouver qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est définie positive si et seulement si $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) > 0$.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive, et soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   En calculant $X^\top AX$ et $Y^\top AY$, prouver que $\operatorname{tr}(A) > 0$.
8. Inversement, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ symétrique, non scalaire, avec $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) > 0$.
   a. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $A - \lambda I_2$ est inversible si et seulement si λ n'est pas racine du polynôme $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$.
   b. Justifier que χ_A possède deux racines réelles distinctes, qu'on ne demande pas de calculer, puis, à l'aide des relations racines-coefficients, que ces deux racines sont strictement positives.
   Dans la suite de la question, on notera $\lambda_1 < \lambda_2$ les deux racines de χ_A.
   c. Justifier qu'il existe deux vecteurs $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, non nuls et tels que $AX_1 = \lambda_1 X_1$ et $AX_2 = \lambda_2 X_2$.
   Prouver alors que (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
   d. En calculant $X_1^\top AX_2$ de deux manières, montrer que $X_1^\top X_2 = 0$. En déduire que A est définie positive.

Partie III. Critère de Sylvester

Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique, et pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k} \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$, et $\det(A_k)$ est appelé le $k^{\text{ème}}$ mineur principal de A.

On notera qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possède n mineurs principaux.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ alors ses trois mineurs principaux sont les déterminants des matrices $A_1 = (1), A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_3 = A$.

Une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

Le but de cette partie est de prouver qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique, $k \in [\![1, n]\!]$ et $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$.
   Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $X^\top AX = X_k^\top A_k X_k$.
10. En déduire qu'une matrice symétrique définie positive vérifie le critère de Sylvester.
11. Le but de cette question est de prouver la réciproque, c'est-à-dire qu'une matrice symétrique réelle qui vérifie le critère de Sylvester est définie positive.
    On se propose de raisonner par récurrence sur la taille de la matrice.
    a. Soit $n \geqslant 2$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique avec $\det(A) > 0$.
       On note alors $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix}$ avec $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$, $U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{R})$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.
       On suppose que la matrice A_{n-1} est symétrique définie positive.
       Justifier qu'il existe un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{R})$ tel que $A_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$.
       En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $Q^\top AQ$ est de la forme $\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.
    b. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester est définie positive.

▸ Exercice 1 : marches aléatoires

Dans tout l'exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, et on considère un entier naturel non nul n.
Soient alors $X_1, \dots, X_{2n}$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi.
Pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, on note alors $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$.
Sauf dans la question 10, on n'utilisera que les n premières variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, et on ne se préoccupera pas des variables $X_{n+1}, \dots, X_{2n}$.

1. Montrer que si $\mathbf{P}(X_1 \leqslant 0) > 0$, alors $\mathbf{P}(S_n \leqslant 0) > 0$.

Partie I. Un cas particulier : la marche aléatoire symétrique

Dans cette partie, on suppose que X_1 suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

2. Déterminer la loi de $\frac{X_1+1}{2}$.
3. En déduire que $\frac{S_n+n}{2}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
4. En déduire que $\mathbf{P}(S_n = 0) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}\binom{n}{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, et déterminer sa limite lorsque $n \to +\infty$.
5. Montrer que $\mathbf{P}(S_n > 0) = \mathbf{P}(S_n < 0)$, et en déduire la limite de $\mathbf{P}(S_n < 0)$ lorsque $n \to +\infty$.

Partie II. Fonction génératrice des moments

Si Y est une variable aléatoire réelle, on note Φ_Y la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \Phi_Y(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tY}\right).$$

6. Montrer Φ_Y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
7. Déterminer $\Phi_Y(0)$ et $\Phi_Y'(0)$.
8. Montrer que si Y_1, Y_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\Phi_{Y_1+Y_2} = \Phi_{Y_1}\Phi_{Y_2}$.

Partie III. Marche aléatoire à dérive positive

Dans cette partie, on suppose que $\mathbf{E}(X_1) > 0$.

9. a. Justifier que pour tout $\ell \in \mathbf{R}$ et tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{P}(S_n \leqslant \ell) = \mathbf{P}\left(e^{-tS_n} \geqslant e^{-t\ell}\right)$.
   b. En déduire que pour $\ell \in \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{P}(S_n \leqslant \ell) \leqslant e^{t\ell}\Phi_{X_1}(t)^n$.
   c. Justifier alors que pour tout $\ell \in \mathbf{R}$, $\mathbf{P}(S_n \leqslant \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
10. On note à présent $A_n = \bigcap_{k=1}^{n} [S_k > 0]$ et

$$\forall p \in [\![1, n]\!],\ B_{n,p} = [S_1 \leqslant 0] \cap [S_2 \leqslant 0] \cap \cdots \cap [S_p \leqslant 0] \cap [S_{p+1} > 0] \cap \cdots \cap [S_{2n} > 0].$$

   a. Prouver que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $B_{n,p} \subset [S_p \leqslant 0] \cap \bigcap_{k=1}^{n} [X_{p+1} + X_{p+2} + \cdots + X_{p+k} > 0]$.
   b. Justifier que $(X_{p+1}, X_{p+1} + X_{p+2}, \dots, X_{p+1} + \cdots + X_{p+n})$ a même loi que $(S_1, S_2, \dots, S_n)$.
   En déduire que pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(B_{n,p}) \leqslant \mathbf{P}(S_p \leqslant 0)\mathbf{P}(A_n)$.
   c. Prouver alors que $1 \leqslant \mathbf{P}(A_n)\left(1 + \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}(S_p \leqslant 0)\right)$.
   On pourra noter que A_n et les $B_{n,p}$ sont deux à deux disjoints.
   d. En déduire que la suite $(\mathbf{P}(A_n))_{n\geqslant 1}$ est minorée par un réel strictement positif. Interpréter le résultat.

▸ Exercice 2 : séries

Partie I. Théorème de Pringsheim

1. Déterminer un équivalent de $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, puis un équivalent de $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Soit (u_n) une suite décroissante telle que $\sum u_n$ converge.

   Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note alors $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série, et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   - a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$.
   - b. Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $S_n - S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \geqslant \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) u_n$.
   - c. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Partie II. Une application

Dans cette partie, on considère une suite (u_n) à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, telle que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ converge.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $A_n = \{k \in \mathbf{N},\ u_k \in [\![1, n]\!]\}$ et $a_n = \mathrm{Card}(A_n)$.

3. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, A_n est fini (et donc a_n est bien défini).
4. On suppose dans cette question que la suite (u_n) est croissante.
   - a. Justifier, à l'aide de la question 2, que
   $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ n < \varepsilon u_n.$$
   - b. Soit $\varepsilon > 0$, et soit n_0 comme ci-dessus. Prouver que pour $n \geqslant \frac{n_0}{\varepsilon}$, $A_n \subset [0, n\varepsilon]$.
   - c. En déduire que $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.
5. Dans cette question, on ne suppose plus rien au sujet de la monotonie de la suite (u_n).
   Prouver qu'on a toujours $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.
   On admettra le résultat suivant, qui sera bientôt prouvé : si une série $\sum v_n$ à termes positifs converge, alors pour toute bijection $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $\sum v_{\varphi(n)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

CORRECTION DU CONCOURS BLANC

▸ Problème : critère de Sylvester pour les matrices symétriques définies positives (d'après CCINP MP 2024)

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ non nul. Alors

$$X^\top I_2 X = X^\top X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2.$$

Or une somme de carrés est positive, et elle est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ce qui n'est pas le cas ici[1].
Donc $X^\top I_2 X > 0$.

Sur le même principe, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul,

$$X^\top I_n X = X^\top X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

qui n'est pas nul puisque les x_i ne sont pas tous nuls.
Puisque de plus I_n est symétrique, elle est $\boxed{\text{symétrique définie positive.}}$

[1] Car $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ non nul.
Alors $X^\top A X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x+y)^2$.
Une fois encore, c'est un nombre positif, nul si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

ce qui n'est pas le cas ici. Donc $X^\top A X > 0$.
Puisque A est symétrique, elle est $\boxed{\text{symétrique définie positive.}}$

3. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Alors $AX = 0_{n,1}$, et donc $X^\top A X = 0$, ce qui n'est possible que pour $X = 0_{n,1}$. Donc $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$, et donc A est inversible, si bien que $\boxed{\det(A) \neq 0.}$

Partie I. Déterminant des matrices symétriques définies positives.

4. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t) = \det(tI_n + (1-t)A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [tI_n + (1-t)A]_{\sigma(i),i}.$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixé et $i \in [\![1, n]\!]$, $t \mapsto t[I_n]_{\sigma(i),i} + (1-t)[A]_{\sigma(i),i}$ est une fonction affine[2].
Et alors $t \mapsto \prod_{i=1}^{n} [tI_n + (1-t)A]_{\sigma(i),i}$ est une fonction polynomiale de degré au plus n.
Si bien que f est somme ·de $n!$ fonctions polynomiales de degré au plus n est également polynomiale de degré au plus n. Et en particulier $\boxed{f \text{ est continue.}}$

[2] Donc polynomiale de degré **au plus** un.

5. Soit $t \in [0,1]$. Alors $(tI_n + (1-t)A)^\top = tI_n^\top + (1-t)A^\top = tI_n + (1-t)A$, donc $tI_n + (1-t)A$ est symétrique.
De plus, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul,

$$X^\top (tI_n + (1-t)A)X = tX^\top X + (1-t)X^\top AX.$$

► Si $t \neq 0$, $tX^\top X > 0$, $X^\top AX > 0$ et $(1-t) \geqslant 0$, donc $X^\top(tI_n + (1-t)A)X > 0$.
► Si $t = 0$, alors $X^\top AX > 0$ car A symétrique définie positive.
Donc dans tous les cas, $X^\top(tI_n + (1-t)A)X > 0$.
Et donc $\boxed{tI_n + (1-t)A \text{ est symétrique définie positive.}}$

6. Par la question 3, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \det(tI_n + (1-t)A) \neq 0$.
Et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe constant sur $[0,1]$.
Puisque $f(1) = \det(I_n) = 1 > 0$, on en déduit que $\det(A) = f(0) > 0$.

Partie II. Une caractérisation des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

7. On a $X^\top AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+b \\ b+c \end{pmatrix} = a + 2b + c$.

De même, $Y^\top AY = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b \\ b-c \end{pmatrix} = a + c - 2b$.

Puisque X, Y sont non nuls, on a donc[3] $a + c - 2b > 0$ et $a + c + 2b > 0$, si bien que par somme $2(a+c) > 0$, et donc $\boxed{\operatorname{tr}(A) = a + c > 0.}$

[3] Par définition d'une matrice symétrique définie positive.

8.a. La matrice $A - \lambda I_2$ est inversible si et seulement si

$$\det(A - \lambda I_2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \underbrace{(a+c)}_{=\operatorname{tr}(A)}\lambda + \underbrace{ac - b^2}_{=\det(A)} \neq 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) \neq 0.$$

8.b. Le discriminant de χ_A est

$$\Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0.$$

De plus, on a $\Delta = 0$ si et seulement si[4] $b = 0$ et $a = c$, soit si et seulement si $A = aI_2$. Ce n'est pas le cas ici puisqu'on a supposé que A n'est pas scalaire.
Donc $\Delta > 0$, si bien que $\boxed{\chi_A \text{ possède deux racines distinctes.}}$
De plus, par les relations racines coefficients, $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ et $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.
Puisque $\det(A) > 0$, λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe. Et alors leur signe commun est celui de $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A)$, qu'on a supposé positifs.
$\boxed{\text{Donc } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont strictement positifs.}}$

[4] C'est toujours le même argument : une somme de carrés est nulle si et seulement si tous ces carrés sont nuls.

8.c. Puisque $\chi_A(\lambda_1) = 0$, $A - \lambda_1 I_2$ n'est pas inversible, et donc $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_2) \neq \{0_{2,1}\}$.
Donc il existe $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ non nul tel que $(A - \lambda_1)X_1 = 0_{2,1}$, soit encore $AX_1 = \lambda_1 X_1$.
Et sur le même principe, il existe X_2 non nul tel que $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

Prouvons alors que (X_1, X_2) est libre.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 = 0_{2,1} \quad (\star_1)$.
Alors en multipliant par A, $\alpha AX_1 + \beta AX_2 = A0_{2,1} = 0_{2,1}$, soit encore

$$\alpha\lambda_1 X_1 + \beta\lambda_2 X_2 = 0_{2,1} \quad (\star_2).$$

Si on soustrait $\lambda_1(\star_1)$ à $(\star_2)$, il vient $\beta(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 = 0_{2,1}$.
Mais $\lambda_2 \neq \lambda_1$ et $X_2 \neq 0_{2,1}$ si bien que $\beta = 0$. Et donc $\alpha X_1 = 0_{2,1}$, donc $\alpha = 0$.

Ainsi (X_1, X_2) est libre, et étant de cardinal $2 = \dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}).}$

8.d. On a $X_1^\top AX_2 = X_1^\top \lambda_2 X_2 = \lambda_2 X_1^\top X_2$.
Et par ailleurs, $X_1^\top AX_2 = X_1^\top A^\top X_2 = (AX_1)^\top X_2 = (\lambda_1 X_1)^\top X_2 = \lambda_1 X_1^\top X_2$.
Ainsi, $(\lambda_1 - \lambda_2)X_1^\top X_2 = 0$. Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\boxed{X_1^\top X_2 = 0.}$

Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ non nul, et soient $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $X = \alpha X_1 + \beta X_2$. Alors

$$\begin{aligned} X^\top AX &= \left(\alpha X_1^\top + \beta X_2^\top\right) A(\alpha X_1 + \beta X_2) \\ &= \alpha^2 X_1^\top AX_1 + \alpha\beta(X_1^\top AX_2 + X_2^\top AX_1) + \beta^2 X_2^\top AX_2 \\ &= \alpha^2 X_1^\top AX_1 + \beta^2 X_2^\top AX_2 + \alpha\beta\left(\lambda_2 X_1^\top X_2 + \lambda_1 X_2^\top X_1\right) \\ &= \alpha^2 \underbrace{X_1^\top AX_1}_{>0} + \beta^2 \underbrace{X_2^\top AX_2}_{>0} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Et puisque de plus $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, on a donc $X^\top AX > 0$.
Ainsi, $\boxed{A \text{ est symétrique définie positive.}}$

Partie III. Critère de Sylvester

9. Notons $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ et soit $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Notons également la matrice A par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$ avec $B_k \in \mathscr{M}_{k,n-k}(\mathbf{R})$, $C_k \in \mathscr{M}_{n-k,k}(\mathbf{R})$ et $D_k \in \mathscr{M}_{n-k}(\mathbf{R})$. Alors

$$X^\top AX = \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k X_k & C_k X_k \end{pmatrix} = X_k^\top A_k X_k.$$

10. Supposons A symétrique définie positive. On sait déjà que $\det(A_n) = \det(A) > 0$ par la partie I.
De plus, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la matrice A_k est symétrique puisque A l'est.
Mais pour $X_k \in \mathscr{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ non nul, en notant comme ci-dessus $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, il vient $X_k^\top A_k X_k = X^\top AX > 0$ puisque A est symétrique définie positive.
Donc A_k est bien symétrique définie positive, si bien que par la partie I, $\det(A_k) > 0$.
Et donc $\boxed{A \text{ vérifie le critère de Sylvester.}}$

11.a. Puisque A_{n-1} est symétrique définie positive, $\det(A_{n-1}) \neq 0$, et donc A_{n-1} est inversible.
Par conséquent, si on pose $V = -A_{n-1}^{-1} U$, alors on a bien $A_{n-1}V = -U$ et donc $A_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$.

Et donc avec les notations de l'énoncé,

$$\begin{aligned} Q^\top AQ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1}V + U \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top A_{n-1} + U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Détails
Le coefficient en haut à droite est nul puisque

$$A_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}.$$

Mais en transposant la relation $A_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$, il vient $V^\top \underbrace{A_{n-1}^\top}_{=A_{n-1}} + U^\top = 0_{1,n-1}$, et donc

$$Q^\top AQ = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}.$$

C'est bien de la forme annoncée si on arrive à prouver que $\beta = U^\top V + \alpha > 0$.

Remarque
Notons que $U^\top V$ est bien une matrice 1×1, donc un réel.

Mais puisque $\det(Q) = 1$, alors

$$\det(A) = \det(Q)\det(A)\det(Q^\top) = \det(Q^\top AQ) = \det \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} = \det(A_{n-1}) \times \beta.$$

Détails
La dernière égalité est un déterminant diagonal par blocs.

Puisque $\det(A) > 0$ (par hypothèse) et que $\det(A_{n-1}) > 0$ (car A_{n-1} définie positive), alors $\beta > 0$.

11.b. Procédons par récurrence simple sur $n \in \mathbf{N}^*$.
Une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbf{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester est une matrice de la forme $A = (a)$, avec $a = \det(A) > 0$, donc pour tout $x \in \mathbf{R}^*$

$$(x)^\top A\,(x) = ax^2 > 0.$$

Donc la récurrence est initialisée.
Supposons donc que toute matrice de taille $n-1$, symétrique et qui vérifie le critère de

Sylvester soit définie positive.
Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique vérifiant le critère de Sylvester.
Alors en particulier $\det(A) > 0$, et donc comme dans la question précédente, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inversible, telle que $Q^\top AQ = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$, avec $\beta > 0$.
Soit alors $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non nul, et soit $X' = Q^{-1}X$, de sorte que

$$X^\top AX = (QX')^\top A(QX) = X'^\top (Q^\top AQ)X'.$$

Puisque X est non nul, alors X' est non nul, notons $X' = \begin{pmatrix} X'_{n-1} \\ y \end{pmatrix}$ avec $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{R})$ et $y \in \mathbf{R}$.
Donc $X^\top AX = \begin{pmatrix} X'^\top_{n-1} & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_{n-1} \\ y \end{pmatrix} = X'^\top_{n-1} A_{n-1} X'_{n-1} + \beta y^2$.
Notons que par hypothèse de récurrence, A_{n-1}, qui vérifie le critère de Sylvester[5] est définie positive.
▸ Si $X'_{n-1} \neq 0_{n-1,1}$, alors $X'^\top_{n-1} A_{n-1} X'_{n-1} > 0$, et donc $X^\top AX > 0$.
▸ Si $X'_{n-1} = 0_{n-1,1}$, alors puisque $X \neq 0_{n-1}$, alors $y \neq 0$, si bien que $X^\top AX = \beta y^2 > 0$.

Nous venons donc de prouver que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, et donc A est symétrique définie positive.
Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester est définie positive.

Remarque
A_{n-1} est toujours la matrice extraite de A obtenue par suppression de la dernière ligne et dernière colonne.

[5] Car A le vérifie.

Partie IV. Deux applications

12. Soit $x \in \mathbf{R}$. Avec les notations précédentes, $C(x)_1 = (2)$ et $C(x)_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ont toujours un déterminant strictement positif.
Donc $C(x)$ vérifie le critère de Sylvester si et seulement si son déterminant est strictement positif. Or un développement par rapport à la dernière ligne prouve que

$$\det(C(x)) = -x \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2$$

qui est strictement positif si et seulement si $x \notin \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Signe
On a utilisé des résultats bien connus sur le signe d'un polynôme de degré 2.

13.a. Développons $\det(A_{n+2})$ par rapport à sa première colonne :

$$\det(A_{n+2}) = \sqrt{3} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}_{[n+1]} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

$$= \sqrt{3}\det(A_{n+1}) - \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\boxed{= \sqrt{3}\det(A_{n+1}) - \det(A_n).}$$

Détails
On redéveloppe le second déterminant par rapport à sa première ligne.

13.b. Ainsi la suite $(\det(A_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 vérifiant la relation $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$.
Son polynôme caractéristique est égal à $X^2 - \sqrt{3}X + 1$, de racines $\dfrac{\sqrt{3} \pm i}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$.
Donc il existe deux réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\det(A_n) = \alpha\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \beta\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).$$

Rappel
Lorsque les racines du polynôme caractéristiques sont deux racines complexes conjuguées qui s'écrivent sous forme exponentielle $\rho e^{\pm i\theta}$, alors les suites cherchées sont de la forme

$$\rho^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)).$$

Puisque $\det(A_1) = \sqrt{3}$ et $\det(A_2) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 2$, si bien que

$$\begin{cases} \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} + \beta\frac{1}{2} = \sqrt{3} \\ \alpha\frac{1}{2} + \beta\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\sqrt{3} + \beta = 2\sqrt{3} \\ \alpha + \beta\sqrt{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \sqrt{3} \end{cases}$$

Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\cos\left((n-2)\frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

En particulier, on a $\det(A_1), \det(A_2), \det(A_3)$ et $\det(A_4)$ qui sont strictement positifs. En revanche, $\det(A_5) = 0$. Et donc A_5 n'est pas définie positive.
Et pour $n \geqslant 5$, le 5ème mineur principal de A_n est $\det(A_5)$, si bien que A_n ne vérifie pas le critère de Sylvester, et donc n'est pas définie positive.
En revanche, pour $n \in [\![1, 4]\!]$, tous les mineurs principaux de A_n, qui sont les $\det(A_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont strictement positifs, donc A_n vérifie le critère de Sylvester, et donc est définie positive.
Ainsi, $\boxed{A_n \text{ est symétrique définie positive si et seulement si } n \in [\![1, 4]\!].}$

► Exercice 1 : marches aléatoires

Le cadre des espaces probabilisés finis rend toujours un peu délicat le fait de parler de limites de probabilités, puisque à n fixé on se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ sur lequel sont définies $X_1, \ldots, X_{2n}$.
Si on change n, on change d'espace probabilisé, et donc de probabilité, si bien qu'il faudrait plutôt noter $(\Omega_n, \mathbf{P}_n)$ l'espace probabilisé considéré et regarder les $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}_n(\star)$ plutôt que de $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(\star)$.
Nous passerons cette subtilité sous silence, mais tout ceci sera sans doute bien plus facile avec les espaces probabilisés infinis étudiés en seconde année, sur lesquels nous pourrons directement définir une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi.
Un bon moyen de se représenter la situation est d'imaginer un mobile qui réalise n déplacements aléatoires sur l'axe des abscisses, en partant de l'origine, chacun des déplacements étant tiré aléatoirement suivant une variable uniforme de même loi que X_1, les déplacements successifs étant indépendants.
Ainsi X_k représente la valeur du $k^{\text{ème}}$ déplacement[6], et S_k est la position du mobile après k déplacements.

[6] Positive si on se déplace vers la gauche, négative si on se déplace vers la droite.

1. On a $[X_1 \leqslant 0] \cap [X_2 \leqslant 0] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant 0] \subset [S_n \leqslant 0]$, si bien que par indépendance des X_i,

$$\mathbf{P}(S_n \leqslant 0) \geqslant \mathbf{P}([X_1 \leqslant 0] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant 0]) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant 0)\cdots\mathbf{P}(X_n \leqslant 0) = \mathbf{P}(X_1 \leqslant 0)^n \boxed{> 0.}$$

Partie I. Un cas particulier : la marche aléatoire symétrique

2. La variable aléatoire X_1 ne prenant que les valeurs -1 et 1, $\frac{X_1+1}{2}$ ne prend que les valeurs 0 et 1, donc suit une loi de Bernoulli.
Et on a $\mathbf{P}\left(\frac{X_1+1}{2} = 1\right) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$.
Donc $\frac{X+1}{2} \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Par la question précédente, les $\frac{X_i+1}{2}$ suivent toutes la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et sont mutuellement indépendantes car les X_i le sont, et donc par stabilité des lois binomiales,

$$\frac{S_n + n}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2} \sim \boxed{\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).}$$

4. On a $\mathbf{P}(S_n = 0) = \mathbf{P}(S_n + n = n) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n+n}{2} = \frac{n}{2}\right)$.
Si n est impair, $\frac{n}{2} \notin \mathbf{N}$, et donc $\mathbf{P}(S_n = 0) = 0$.
Et si n est pair, alors $\mathbf{P}(S_n = 0) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n+n}{2} = \frac{n}{2}\right) = \binom{n}{n/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{n}{2}} = \binom{n}{n/2}\frac{1}{2^n}$.
On a donc $\mathbf{P}(S_{2p} = 0) = \binom{2p}{p}\frac{1}{2^{2p}} = \frac{(2p)!}{(p!)^2}\frac{1}{4^p}$.
On pourrait prouver à l'aide la formule de Stirling que sa limite est nulle.
Mais on peut également noter que si on note $u_p = \dfrac{(2p)!}{(p!)^2}\frac{1}{4^p}$, alors

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{(2p+2)!}{(p+1)!}\frac{(p!)^2}{(2p)!}\frac{1}{16} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(p+1)^2}\frac{1}{16} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1.$$

Donc par le critère de d'Alembert, $\sum u_p$ converge, si bien que $u_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, les deux suites extraites $(\mathbf{P}(S_{2n+1} = 0))_n$ et $(\mathbf{P}(S_{2n} = 0))_n$ convergent vers 0, si bien que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) = 0.}$

Détails
Avec Stirling, on obtient même l'équivalent
$$\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

5. Un moyen simple est de noter que X_1 et $-X_1$ suivent la même loi, si bien que $(X_1, \dots, X_n)$ et $(-X_1, \dots, -X_n)$ ont même loi.
Et donc $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $-S_n = -X_1 + \cdots + (-X_n)$ ont même loi.
Et donc $\mathbf{P}(S_n > 0) = \mathbf{P}(-S_n > 0) = \mathbf{P}(S_n < 0)$.
Puisque par ailleurs, $1 = \mathbf{P}(S_n < 0) + \mathbf{P}(S_n = 0) + \mathbf{P}(S_n > 0)$, il vient

$$\mathbf{P}(S_n < 0) = \frac{1 - \mathbf{P}(S_n = 0)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{1}{2}.}$$

Détails
L'indépendance des X_i est ici fondamentale, puisque c'est grâce à elle que la loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est uniquement déterminée par les lois des X_i.

Partie II. Fonction génératrice des moments

6. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, d'après la formule de transfert,

$$\Phi_Y(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tY}\right) = \sum_{x\in Y(\Omega)} e^{-tx}\mathbf{P}(Y = x)$$

qui est une somme **finie** de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ (les $t \mapsto e^{-tx}$), et donc $\boxed{\Phi_Y \text{ est } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.}$

7. On a $\Phi_Y(0) = \mathbf{E}\left(e^0\right) = \mathbf{E}(1) = \boxed{1.}$
Et pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\Phi_Y'(t) = \sum_{x\in Y(\Omega)} -xe^{-tx}\mathbf{P}(Y = x)$$

si bien que $\Phi_Y'(0) = -\sum_{x\in X(\Omega)} -x\mathbf{P}(Y = x) = \boxed{-\mathbf{E}(Y).}$

8. Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors $e^{-t(Y_1+Y_2)} = e^{-tY_1}e^{-tY_2}$.
Or Y_1 et Y_2 étant indépendantes, e^{-tY_1} et e^{-tY_2} le sont, si bien que

$$\Phi_{Y_1+Y_2}(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tY_1}e^{-tY_2}\right) = \mathbf{E}\left(e^{-tY_1}\right)\mathbf{E}\left(e^{-tY_2}\right) = \boxed{\Phi_{Y_1}(t)\Phi_{Y_2}(t).}$$

Partie III. Marche aléatoire à dérive positive

9.a. On a tout simplement l'égalité entre les événements $[S_n \leqslant \ell] = [tS_n \leqslant t\ell] = [e^{-tS_n} \geqslant e^{-t\ell}]$.

Remarque
Notons que la positivité de t nous garantit que le sens de l'inégalité est préservé.

9.b. La clé réside ici dans le fait que S_n n'est pas forcément à valeurs positives, et donc on ne peut pas lui appliquer l'inégalité de Markov. En revanche, e^{-tS_n} est à valeurs positives, et donc Markov s'applique :

$$\mathbf{P}\left(e^{-tS_n} \geqslant e^{-t\ell}\right) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(e^{-tS_n}\right)}{e^{-t\ell}} = e^{t\ell}\Phi_{S_n}(t).$$

Mais les X_i étant mutuellement indépendantes, par la question 8,

$$\Phi_{S_n}(t) = \Phi_{X_1}(t)\Phi_{X_2}(t)\cdots\Phi_{X_n}(t).$$

Et puisque les X_i suivent la même loi que X, les e^{-tX_i} suivent la même loi que e^{-tX81}, et donc $\Phi_{X_i}(t) = \mathbf{E}\left(e^{-tX_i}\right) = \mathbf{E}\left(e^{-tX_1}\right) = \Phi_{X_1}(t)$. Ainsi, $\mathbf{P}(S_n \leqslant \ell) \leqslant \boxed{e^{t\ell}\Phi_{X_1}(t)^n.}$

Détails
Le raisonnement de la question 8 se généralise bien à la somme de n variables indépendantes.

9.c. Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On a déjà dit à la question 7 que $\Phi_{X_1}(0) = 1$ et $\Phi'_{X_1}(0) = -\mathbf{E}(X_1) < 0$.
Puisque Φ_{X_1} est de classe $\mathscr{C}^1$, Φ'_{X_1} est continue et donc il existe $a > 0$ tel que pour tout $t \in [0, a]$, $\Phi'_{X_1}(t) < 0$.
Par conséquent, Φ_{X_1} est strictement décroissante sur $[0, a]$, et donc $\Phi_{X_1}(a) < \Phi_{X_1}(0) = 1$.
Considérons un tel a. On a alors

$$\mathbf{P}(S_n \leqslant \ell) \leqslant e^{a\ell}\left(\Phi_{X_1}(a)\right)^n$$

et puisque $0 \leqslant \Phi_{X_1}(a) < 1$, $\Phi_{X_1}(a)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes[7],

$$\boxed{\mathbf{P}(S_n \leqslant \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

.

Commentaire : si on se figure toujours S_n comme étant l'abscisse de notre mobile au bout de n étapes, alors nous venons de prouver que lorsque $\mathbf{E}(X_1) > 0$, alors la probabilité que le mobile ne dépasse jamais le point d'abscisse ℓ tend vers 0.

[7] Une probabilité est toujours minorée par 0.

10.a. Il est évident par définition que $B_{n,p} \subset [S_p \leqslant 0]$.
Et de plus, si $\omega \in B_{n,p}$, alors $S_p(\omega) \leqslant 0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $S_{p+k}(\omega) > 0$.
Donc $X_{p+1}(\omega) + \cdots + X_{p+k}(\omega) = S_{p+k}(\omega) - S_p(\omega) > 0$.
Donc $B_{n,p} \subset [X_{p+1} + \cdots + X_{p+k} > 0]$.
Et donc au final,

$$B_{n,p} \subset [S_p \leqslant 0] \cap \bigcap_{k=1}^{n} [X_{p+1} + X_{p+2} + \cdots + X_{p+k} > 0].$$

Remarque

Encore une fois, ce serait faux sans l'indépendance, qui nous garantit que la loi conjointe est entièrement déterminée par la connaissance des lois marginales.

10.b. Les X_i étant indépendantes et de même loi, $(X_1, \dots, X_n)$ et $(X_{p+1}, \dots, X_{p+n})$ ont même loi.
Et alors si on note $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + \cdots + x_n) \end{array}\right.$, alors

$f(X_1, \dots, X_n) = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ et $f(X_{p+1}, X_{p+2}, \dots, X_{p+n}) = (X_{p+1}, X_{p+1}+X_{p+2}, \dots, X_{p+1}+\cdots+X_{p+n})$

ont la même loi.

Par croissance de la probabilité,

$$\mathbf{P}(B_{n,p}) \leqslant \mathbf{P}\left([S_p \leqslant 0] \cap \bigcap_{k=1}^{n} [X_{p+1} + \cdots + X_{p+k} > 0]\right).$$

Or par le lemme des coalitions, S_p et $(X_{p+1}, \dots, X_{p+n})$ sont indépendantes, si bien que

$$\mathbf{P}\left([S_p \leqslant 0] \cap \bigcap_{k=1}^{n} [X_{p+1} + \cdots + X_{p+k} > 0]\right) = \mathbf{P}(S_p \leqslant 0)\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_{p+1} + \cdots + X_{p+k} > 0]\right).$$

Et puisque $(S_1, \dots, S_p)$ et $(X_{p+1}, \dots, X_{p+1} + \cdots + X_{p+n})$ ont même loi,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_{p+1} + \cdots + X_{p+k} > 0]\right) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [S_k > 0]\right) = \mathbf{P}(A_n).$$

Au final il vient bien $\boxed{\mathbf{P}(B_{n,p}) \leqslant \mathbf{P}(S_p \leqslant 0)\mathbf{P}(A_n).}$

10.c. Puisque A_n et les $B_{n,p}$ sont deux à deux disjoints,

$$1 \leqslant \mathbf{P}(A_n) + \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}(B_{n,p}) \leqslant \mathbf{P}(A_n) + \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}(S_p \leqslant 0)\mathbf{P}(A_n) \leqslant \mathbf{P}(A_n)\left(1 + \sum_{p=1}^{n} \mathbf{P}(S_p \leqslant 0)\right).$$

10.d. Reprenons la majoration de $\mathbf{P}(S_p \leqslant 0)$ obtenue à la question 9 : pour un a bien choisi, on a donc

$$\mathbf{P}(S_p \leqslant 0) \leqslant e^{-0a}\Phi_{X_1}(a)^p \leqslant \Phi_{X_1}(a)^p$$

avec $0 \leqslant \Phi_{X_1}(a) < 1$.

Donc il vient

$$1 \leqslant \mathbf{P}(A_n)\left(\sum_{p=0}^{n} \Phi_{X_1}(a)^p\right) = \mathbf{P}(A_n)\frac{1-\Phi_{X_1}(a)^{n+1}}{1-\Phi_{X_1}(a)} \leqslant \mathbf{P}(A_n)\frac{1}{1-\Phi_{X_1}(a)}.$$

Et donc $\mathbf{P}(A_n) \geqslant 1 - \Phi_{X_1}(a) > 0$.

On a donc bien majoré $\mathbf{P}(A_n)$ par une constante strictement positive indépendante de n.
On pourrait même prouver[8] que $(\mathbf{P}(A_n))_n$ est décroissante, et donc qu'elle converge vers une limite strictement positive.
Autrement dit, la probabilité que notre mobile ne passe **jamais** à gauche de l'origine est strictement positive.

[8] Mais c'est plus facile à formuler avec des espaces probabilisés infinis sur lesquels on dispose d'une suite infinie de variables indépendantes.

▸ Exercice 2 : séries

1. Par définition de la partie entière, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n}{2}-1 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{2}$, et donc $\boxed{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$.

Et alors $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{=} n - \frac{n}{2} + o(n) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{n}{2} + o(n) \boxed{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$.

2.a. Puisque $\sum u_n$ converge, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et alors par décroissance de (u_n), nécessairement, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$.

2.b. Soit $n \geqslant 2$. Alors

$$S_n - S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} u_k = \sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1}^{n} u_k.$$

Mais par décroissance de (u_n), pour tout $k \leqslant n$, $u_k \geqslant u_n$, si bien que

$$S_n - S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \geqslant \sum_{k=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1}^{n} u_n \geqslant \boxed{\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) u_n}.$$

2.c. Puisque $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$.
Bien qu'intuitif, ce point nécessite tout de même quelques précisions, puisqu'il ne s'agit pas d'une suite extraite de (S_n), vu que $\varphi : n \mapsto \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ n'est pas strictement croissante[9].
Par définition de $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, nous savons que

[9] Elle prend deux fois chaque valeur.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, |S_n - S| < \varepsilon.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$, et soit n_0 comme ci-dessus. Alors pour $n \geqslant 2n_0$, on a[10] $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{2n_0}{2} \right\rfloor = n_0$, et donc $\left|S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} - S\right| < \varepsilon$, si bien que $S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$.

[10] Par croissance de la partie entière.

Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) u_n \leqslant S_n - S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$ et que $S_n - S_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$, par le théorème d'encadrement, $\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $nu_n = 2\frac{n}{2}u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)}$.

Partie II. Une application

3. Puisque $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (car la série converge), $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Et donc pour $n \in \mathbf{N}^*$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geqslant n_0$, $u_k > n$, si bien que $A_n \subset [\![0, n_0 - 1]\!]$ est fini.

4.a. Puisque (u_n) est croissante, $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ décroît, et donc le théorème prouvé à la partie I s'applique :
$\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$, si bien que $n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
Et alors par définition de négligeabilité,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geqslant n_0, n \leqslant \varepsilon u_n.$$

4.b. Soit donc $n \geqslant \frac{n_0}{\varepsilon}$, et soit k un entier tel que $k > n\varepsilon$. Alors $k \geqslant n_0$, si bien que $k \leqslant \varepsilon u_k$, et donc $u_k \geqslant \frac{k}{\varepsilon} > n$.
Par conséquent $k \notin A_n$.
Ce qui prouve bien que $\boxed{A_n \subset [0, \varepsilon n].}$

4.c. On en déduit que pour $n \geqslant \frac{n_0}{\varepsilon}$, $a_n \leqslant \mathrm{Card}(\mathbf{N} \cap [0, n\varepsilon]) \leqslant n\varepsilon + 1$, et donc $a_n - 1 \leqslant n\varepsilon$.
Par ailleurs, il est clair que pour n suffisamment grand, $a_n \geqslant 1$, et donc $a_n - 1 \geqslant 0$.

Nous venons donc de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $|a_n - 1| \leqslant \varepsilon n$.
Et donc $a_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$, si bien que $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n).}$

Détails
On a $n_1 = \frac{n_0}{\varepsilon}$.

5. Si on arrive à prouver qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})$ soit croissante, alors dans ce cas on pourra appliquer le résultat admis pour dire que $\sum \frac{1}{u_{\varphi(n)}}$ converge encore, et donc par la question 4,

$$A'_n = \{k \in \mathbf{N},\ u_{\varphi(k)} \in [\![1, n]\!]\}$$

a un cardinal négligeable devant n.
Mais φ réalise une bijection de A_n sur A'_n, si bien que ces deux ensembles ont même cardinal, et donc $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

Remarque
J'écris les détails qui suivent afin que la preuve soit complète, mais je crois qu'ici j'attendais seulement qu'on me dise «on réordonne la suite par ordre croissant». Les détails sont effectivement très laborieux à écrire.

Prouvons donc l'existence d'une telle bijection.
Commençons par noter que puisque $\sum \frac{1}{u_n}$ converge, alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

On pourrait alors définir $\varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(0)} = \min\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$.
Seulement il se pourrait tout à fait qu'il existe plusieurs k tels que $u_k = \min\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$.
Qu'à cela ne tienne, prenons pour $\varphi(0)$ le plus petit tel entier.
Puis s'il existe d'autre k tels que $u_k = \min\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$, posons $\varphi(1)$ le plus petit des $k \neq \varphi(0)$ tel que $u_k = \min\{u_n, n \in \mathbf{N}\}$. Et s'il n'y en a pas d'autres, posons $\varphi(1)$ comme étant égal au plus petit $k \in \mathbf{N}$ tel que $u_k = \min\{u_n, n \neq \varphi(0)\}$.
De proche en proche, on arrive à définir une fonction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, injective, avec $(u_{\varphi(n)})_n$ croissante. En revanche il est un peu désagréable de prouver sa bijectivité.

Adoptons une autre stratégie et trichons un peu en considérant la suite $(v_n) = \left(u_n + \frac{1}{n+2}\right)_n$.
Puisque les u_n sont entiers, il est clair que les v_n sont deux à deux distincts car $v_n - \lfloor v_n \rfloor = \frac{1}{n+2}$, et donc si $v_n = v_p$, $\frac{1}{n+2} = u_n - \lfloor u_n \rfloor = u_p - \lfloor u_p \rfloor = \frac{1}{p+2}$, et donc $n = p$.
Alors $\{v_n, n \in \mathbf{N}\}$ possède un plus petit élément.
En effet, pour les mêmes raisons qu'à la question 4, $v_n \to +\infty$, donc il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n > v_0$.
Et donc $A = \{n \in \mathbf{N} \mid v_n \leqslant v_0\} \subset [\![0, n_0]\!]$ est fini et non vide[11], et donc possède un plus petit élément k.
Si $p \in \mathbf{N}$, alors il y a deux cas de figure : ▸ Soit $p \in A$, et alors $v_k \leqslant v_p$.
▸ Soit $p \notin A$, et alors $v_p > v_0 \geqslant v_k$. Ainsi, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $v_k = \min\{v_n, n \in \mathbf{N}\}$, et puisque la suite (v_n) est injective, un tel k est unique.
Définissons alors $\varphi(0)$ comme étant égal à l'unique entier k tel que $v_k = \min\{v_n, n \in \mathbf{N}\}$.

[11] Il contient 0.

Supposons $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(p)$ construits. Alors par le même argument que ci-dessus $A_p = \{v_k, k \notin \{\varphi(0), \ldots, \varphi(p)\}\}$ possède un minimum, notons alors $\varphi(p+1)$ comme étant égal à l'unique k tel que $v_k = \min A_p$.
On définit ainsi par récurrence une fonction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$.
Alors par construction, φ est injective, et puisque $v_{\varphi(p+1)} \in A_p$, $v_{\varphi(p+1)} > v_{\varphi(p)}$.

Et puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant u_n + 1$, alors $u_n = \lfloor v_n \rfloor$.
Si bien que pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{\varphi(p+1)} = \lfloor v_{\varphi(p+1)} \rfloor \geqslant \lfloor v_{\varphi(p)} \rfloor v_{\varphi(p)}$ par croissance de la partie entière.
Donc la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est croissante.

Reste donc à prouver la surjectivité de φ.
Supposons par l'absurde que $\operatorname{Im}\varphi \neq \mathbf{N}$, et soit $n_0 \notin \operatorname{Im}\varphi$.
Puisque $\varphi(0) \neq n_0$, $v_{n_0} \neq \min\{v_n, n \in \mathbf{N}\}$. Donc $v_{\varphi(0)} < v_{n_0}$.
Ensuite, $\varphi(1) \neq n_0$, donc $v_{n_0} \neq \min A_0$. Donc $v_{\varphi(1)} < v_{n_0}$.
De même, $\varphi(2) \neq n_0$, donc $v_{n_0} \neq \min A_1$. Donc $v_{\varphi(2)} < v_{n_0}$.
De proche en proche, on prouve ainsi que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_{\varphi(n)} < v_{n_0}$.
Mais comme mentionné à la question 3, puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, nécessairement il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de $k \in \mathbf{N}$ tels que $v_k < v_{n_0}$. D'où une contradiction.
Ouf, nous y sommes : on a donc une fonction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, bijective et telle que $(u_{\varphi(n)})$ soit croissante.
Comme expliqué au début de la question, on a donc $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$.

Remarque *: notons qu'il n'est pas vrai en toute généralité que pour toute suite (u_n) d'entiers il existe $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ bijective telle que $(u_{\varphi(n)})$ soit croissante*[12].

Par exemple si $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ *alors une telle bijection n'existe pas. De manière générale, toute suite qui prendrait une infinité de fois une valeur donnée ne pourrait être réordonnée par ordre croissant.*
Ici c'est bien le fait que $u_n \to +\infty$ qui empêche ce cas de figure de se produire.

[12] Autrement dit telle qu'on puisse réordonner les termes de la suite par ordre croissant.