Concours blanc

▸ Problème : critère de Sylvester pour les matrices symétriques définies positives.

Dans tout le problème, toutes les matrices considérées sont à coefficients réels.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, et soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$. Alors $X^\top AX$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, qu'on identifiera dans toute la suite à un réel, de sorte qu'on pourra parler du signe de $X^\top AX$.

Une matrice **symétrique** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite définie positive si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{n,1}\},\ X^\top AX > 0.$$

1. Montrer que I_2 est une matrice symétrique définie positive, puis plus généralement que c'est le cas de I_n, pour tout $n \geqslant 1$.
2. Prouver que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique définie positive.
3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est symétrique définie positive, alors $\operatorname{Ker} A = \{0_{n,1}\}$. En déduire que $\det(A) \neq 0$.

Partie I. Déterminant des matrices symétriques définies positives.
Dans toute cette partie, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique définie positive, avec $n \in \mathbf{N}^*$.
On note alors $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \det(tI_n + (1-t)A) \end{array} \right.$.

4. Montrer que f est une fonction continue.
5. Justifier que pour tout $t \in [0,1]$, $tI_n + (1-t)A$ est symétrique définie positive.
6. En déduire que f ne s'annule pas sur $[0,1]$, puis que $\det(A) > 0$.

Partie II. Une caractérisation des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.
On cherche dans cette partie à prouver qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est définie positive si et seulement si $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) > 0$.

7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive et soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
   En calculant $X^\top AX$ et $Y^\top AY$, prouver que $\operatorname{tr}(A) > 0$.
8. Inversement, soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ symétrique, non scalaire, avec $\det(A) > 0$ et $\operatorname{tr}(A) > 0$.
   a. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que $A - \lambda I_2$ est inversible si et seulement si λ n'est pas racine du polynôme $\chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)X + \det(A)$.
   b. Justifier que χ_A possède deux racines réelles distinctes, qu'on ne demande pas de calculer, puis, à l'aide des relations racines-coefficients, que ces deux racines réelles sont strictement positives.
      Dans la suite de la question, on notera $\lambda_1 < \lambda_2$ les deux racines de χ_A.
   c. Justifier qu'il existe deux vecteurs $X_1, X_2 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, non nuls et tels que $AX_1 = \lambda_1 X_1$ et $AX_2 = \lambda_2 X_2$.
      Prouver alors que (X_1, X_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
   d. En calculant $X_1^\top AX_2$ de deux manières, montrer que $X_1^\top X_2 = 0$. En déduire que A est définie positive.

Partie III. Critère de Sylvester

Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique, et pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k la matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant k} \in \mathcal{M}_k(\mathbf{R})$, et $\det(A_k)$ est appelé le $k^{\text{ème}}$ mineur principal de A.
On notera qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ possède n mineurs principaux.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ alors ses trois mineurs principaux sont les déterminants des matrices $A_1 = (1), A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_3 = A$.

Une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifie le critère de Sylvester si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.
Le but de cette partie est de prouver qu'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est définie positive si et seulement si elle vérifie le critère de Sylvester.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique, $k \in [\![1, n]\!]$ et $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$.
   Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ tel que $X^\top AX = X_k^\top A_k X_k$.
10. En déduire qu'une matrice symétrique définie positive vérifie le critère de Sylvester.
11. Le but de cette question est de prouver la la réciproque, c'est-à-dire qu'une matrice symétrique réelle qui vérifie le critère de Sylvester est définie positive.
    On se propose de raisonner par récurrence sur la taille de la matrice.

    a. Soit $n \geqslant 2$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique avec $\det(A) > 0$. On note alors $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix}$ avec $A_{n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{R})$, $U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{R})$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.
    On suppose que la matrice A_{n-1} est symétrique définie positive.
    Justifier qu'il existe un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{R})$ tel que $A_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$.
    En notant $Q = \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix}$, montrer que $Q^\top AQ$ est de la forme $\begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$ avec $\beta > 0$.

    b. Prouver par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester est définie positive.

Partie IV. Deux applications

12. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbf{R}$ la matrice $C(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?
13. Pour $n \geqslant 2$, on note $A_n = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

    a. Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation liant $\det(A_{n+2})$, $\det(A_{n+1})$ et $\det(A_n)$.

    b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles A_n est définie positive.

▸ Exercice 1 : urnes de Polya

Soient $n, a, b \in \mathbf{N}^*$ et $c \in \mathbf{N}$.
On considère une urne qui contient initialement a boules blanches et b boules rouges.
On tire une boule dans l'urne, et on la remet dans l'urne, accompagnée de c autres boules de la même couleur (c'est-à-dire de la couleur tirée). On répète n fois cette expérience, qu'on suppose modélisée par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$ qu'on ne cherchera pas à déterminer, et sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable indicatrice de l'événement «la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge».

Enfin, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$.

1. a. Que représente la variable S_n ? Déterminer $S_n(\Omega)$.
   b. Dans le cas particulier $c = 0$, donner la loi, l'espérance et la variance de S_n.
2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   a. Montrer que $\mathbf{P}(X_{k+1} = 1) = \dfrac{b + c\mathbf{E}(S_k)}{a + b + kc}$.
   b. En déduire que $\mathbf{P}(X_{k+1} = 1) = \mathbf{P}(X_k = 1)$.
   c. Déterminer alors la loi de X_n ainsi que son espérance et sa variance.
3. Déterminer l'espérance de S_n.
4. Pour $i, j \in \mathbf{N}$, on pose
   $$\pi(i, j) = \prod_{k=0}^{j-1} (i + kc) = i(i + c) \cdots (i + (j-1)c).$$
   a. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. À l'aide des $\pi(i, j)$ définis ci-dessus, déterminer la probabilité d'obtenir d'abord k rouges, puis $n - k$ boules blanches au cours des n tirages.
   b. Montrer que la probabilité calculée à la question précédente est aussi celle d'avoir d'abord $k - 1$ boules rouges, puis une blanche, puis une rouge, puis $n - k - 1$ blanches.
   c. En déduire que $\mathbf{P}(S_n = k) = \dbinom{n}{k} \dfrac{\pi(b, k)\pi(a, n-k)}{\pi(a + b, n)}$.
   d. Quelle est la loi de S_n dans le cas particulier $a = b = c = 1$?
   e. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi(b, k)\pi(a, n-k) = \pi(a + b, n)$.
5. Soit $n \geqslant 2$.
   a. Montrer que $\forall i, j \in \mathbf{N}$, $\pi(i, j + 2) = i(i + c)\pi(i + 2c, j)$.
   b. Prouver que $\mathbf{E}\left(S_n^2 - S_n\right) = \dfrac{n(n-1)b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)}$.
   c. En déduire la variance de S_n.

▸ Exercice 2 : calcul de la somme d'une série

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+5}u_n$.

1. a. Montrer que la suite (u_n) converge. On note alors ℓ sa limite.
   b. Justifier que la série de terme général $(\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ est divergente.
   c. En déduire que $\ell = 0$.
2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $v_n = \dfrac{(n+1)^\alpha u_{n+1}}{n^\alpha u_n}$.
   a. Déterminer un développement asymptotique de $\ln(v_n)$ à la précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   b. En déduire qu'il existe un unique $\alpha \in]1, +\infty[$, que l'on notera α_0, tel que la série de terme général $\ln(v_n)$ converge.

   Dans la suite, on note $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(v_k)$ la somme de la série ainsi obtenue lorsque $\alpha = \alpha_0$.
3. a. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^S u_1}{n^{\alpha_0}}$.
   b. En déduire que la série de terme général u_n converge.
   c. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$2\sum_{k=1}^{n+1} ku_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} ku_k + 2\sum_{k=0}^{n} u_k.$$
   d. Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Correction du Concours blanc

▸ Problème : critère de Sylvester pour les matrices symétriques définies positives (d'après CCINP MP 2024)

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ non nul. Alors

$$X^\top I_2 X = X^\top X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2.$$

Or une somme de carrés est positive, et elle est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ce qui n'est pas le cas ici[1].
Donc $X^\top I_2 X > 0$.

[1] Car $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Sur le même principe, pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul,

$$X^\top I_n X = X^\top X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

qui n'est pas nul puisque les x_i ne sont pas tous nuls.
Puisque de plus I_n est symétrique, elle est $\boxed{\text{symétrique définie positive.}}$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ non nul.
Alors $X^\top A X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x+y)^2$.
Une fois encore, c'est un nombre positif, nul si et seulement si

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

ce qui n'est pas le cas ici. Donc $X^\top A X > 0$.
Puisque A est symétrique, elle est $\boxed{\text{symétrique définie positive.}}$

3. Soit $X \in \operatorname{Ker}(A)$. Alors $AX = 0_{n,1}$, et donc $X^\top A X = 0$, ce qui n'est possible que pour $X = 0_{n,1}$. Donc $\operatorname{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$, et donc A est inversible, si bien que $\boxed{\det(A) \neq 0.}$

Partie I. Déterminant des matrices symétriques définies positives.

4. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f(t) = \det(tI_n + (1-t)A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} [tI_n + (1-t)A]_{\sigma(i),i}.$$

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ fixé et $i \in [\![1,n]\!]$, $t \mapsto t[I_n]_{\sigma(i),i} + (1-t)[A]_{\sigma(i),i}$ est une fonction affine[2].
Et alors $t \mapsto \prod_{i=1}^{n} [tI_n + (1-t)A]_{\sigma(i),i}$ est une fonction polynomiale de degré au plus n.
Si bien que f est somme ·de $n!$ fonctions polynomiales de degré au plus n est également polynomiale de degré au plus n. Et en particulier $\boxed{f \text{ est continue.}}$

[2] Donc polynomiale de degré **au plus** un.

5. Soit $t \in [0,1]$. Alors $(tI_n + (1-t)A)^\top = tI_n^\top + (1-t)A^\top = tI_n + (1-t)A$, donc $tI_n + (1-t)A$ est symétrique.
De plus, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ non nul,

$$X^\top (tI_n + (1-t)A) X = tX^\top X + (1-t)X^\top A X.$$

▶ Si $t \neq 0$, $tX^\top X > 0$, $X^\top AX > 0$ et $(1-t) \geqslant 0$, donc $X^\top(tI_n + (1-t)A)X > 0$.
▶ Si $t = 0$, alors $X^\top AX > 0$ car A symétrique définie positive.
Donc dans tous les cas, $X^\top(tI_n + (1-t)A)X > 0$.
Et donc $\boxed{tI_n + (1-t)A \text{ est symétrique définie positive.}}$

6. Par la question 3, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) = \det(tI_n + (1-t)A) \neq 0$.
Et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, f est de signe constant sur $[0,1]$.
Puisque $f(1) = \det(I_n) = 1 > 0$, on en déduit que $\det(A) = f(0) > 0$.

Partie II. Une caractérisation des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

7. On a $X^\top AX = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a+b\\ b+c\end{pmatrix} = a + 2b + c$.

De même, $Y^\top AY = \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-b\\ b-c\end{pmatrix} = a + c - 2b$.

Puisque X, Y sont non nuls, on a donc[3] $a + c - 2b > 0$ et $a + c + 2b > 0$, si bien que par somme $2(a+c) > 0$, et donc $\boxed{\operatorname{tr}(A) = a + c > 0.}$

[3] Par définition d'une matrice symétrique définie positive.

8.a. La matrice $A - \lambda I_2$ est inversible si et seulement si

$$\det(A - \lambda I_2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-\lambda & b\\ b & c-\lambda\end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \underbrace{(a+c)}_{=\operatorname{tr}(A)}\lambda + \underbrace{ac - b^2}_{=\det(A)} \neq 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) \neq 0.$$

8.b. Le discriminant de χ_A est

$$\Delta = \operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A) = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geqslant 0.$$

De plus, on a $\Delta = 0$ si et seulement si[4] $b = 0$ et $a = c$, soit si et seulement si $A = aI_2$. Ce n'est pas le cas ici puisqu'on a supposé que A n'est pas scalaire.
Donc $\Delta > 0$, si bien que $\boxed{\chi_A \text{ possède deux racines distinctes.}}$
De plus, par les relations racines coefficients, $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ et $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.
Puisque $\det(A) > 0$, λ_1 et λ_2 sont non nulles et de même signe. Et alors leur signe commun est celui de $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr}(A)$, qu'on a supposé positifs.
$\boxed{\text{Donc } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont strictement positifs.}}$

[4] C'est toujours le même argument : une somme de carrés est nulle si et seulement si tous ces carrés sont nuls.

8.c. Puisque $\chi_A(\lambda_1) = 0$, $A - \lambda_1 I_2$ n'est pas inversible, et donc $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_2) \neq \{0_{2,1}\}$.
Donc il existe $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ non nul tel que $(A - \lambda_1)X_1 = 0_{2,1}$, soit encore $AX_1 = \lambda_1 X_1$.
Et sur le même principe, il existe X_2 non nul tel que $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

Prouvons alors que (X_1, X_2) est libre.
Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha X_1 + \beta X_2 = 0_{2,1} \quad (\star_1)$.
Alors en multipliant par A, $\alpha AX_1 + \beta AX_2 = A0_{2,1} = 0_{2,1}$, soit encore

$$\alpha\lambda_1 X_1 + \beta\lambda_2 X_2 = 0_{2,1} \quad (\star_2).$$

Si on soustrait $\lambda_1(\star_1)$ à $(\star_2)$, il vient $\beta(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 = 0_{2,1}$.
Mais $\lambda_2 \neq \lambda_1$ et $X_2 \neq 0_{2,1}$ si bien que $\beta = 0$. Et donc $\alpha X_1 = 0_{2,1}$, donc $\alpha = 0$.

Ainsi (X_1, X_2) est libre, et étant de cardinal $2 = \dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$, $\boxed{\text{c'est une base de } \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R}).}$

8.d. On a $X_1^\top AX_2 = X_1^\top \lambda_2 X_2 = \lambda_2 X_1^\top X_2$.
Et par ailleurs, $X_1^\top AX_2 = X_1^\top A^\top X_2 = (AX_1)^\top X_2 = (\lambda_1 X_1)^\top X_2 = \lambda_1 X_1^\top X_2$.
Ainsi, $(\lambda_1 - \lambda_2)X_1^\top X_2 = 0$. Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\boxed{X_1^\top X_2 = 0.}$

Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ non nul, et soient $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $X = \alpha X_1 + \beta X_2$. Alors

$$\begin{aligned} X^\top AX &= \left(\alpha X_1^\top + \beta X_2^\top\right) A(\alpha X_1 + \beta X_2)\\ &= \alpha^2 X_1^\top AX_1 + \alpha\beta(X_1^\top AX_2 + X_2^\top AX_1) + \beta^2 X_2^\top AX_2\\ &= \alpha^2 X_1^\top AX_1 + \beta^2 X_2^\top AX_2 + \alpha\beta\left(\lambda_2 X_1^\top X_2 + \lambda_1 X_2^\top X_1\right)\\ &= \alpha^2 \underbrace{X_1^\top AX_1}_{>0} + \beta^2 \underbrace{X_2^\top AX_2}_{>0} \geqslant 0. \end{aligned}$$

Et puisque de plus $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, on a donc $X^\top AX > 0$.
Ainsi, $\boxed{A \text{ est symétrique définie positive.}}$

Partie III. Critère de Sylvester

9. Notons $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ et soit $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Notons également la matrice A par blocs : $A = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$ avec $B_k \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbf{R})$, $C_k \in \mathcal{M}_{n-k,k}(\mathbf{R})$ et $D_k \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbf{R})$. Alors

$$X^\top AX = \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_k^\top & 0_{1,n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_kX_k & C_kX_k \end{pmatrix} = X_k^\top A_k X_k.$$

10. Supposons A symétrique définie positive. On sait déjà que $\det(A_n) = \det(A) > 0$ par la partie I.
De plus, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, la matrice A_k est symétrique puisque A l'est.
Mais pour $X_k \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbf{R})$ non nul, en notant comme ci-dessus $X = \begin{pmatrix} X_k \\ 0_{n-k,1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, il vient $X_k^\top A_k X_k = X^\top AX > 0$ puisque A est symétrique définie positive.
Donc A_k est bien symétrique définie positive, si bien que par la partie I, $\det(A_k) > 0$.
Et donc $\boxed{A \text{ vérifie le critère de Sylvester.}}$

11.a. Puisque A_{n-1} est symétrique définie positive, $\det(A_{n-1}) \neq 0$, et donc A_{n-1} est inversible.
Par conséquent, si on pose $V = -A_{n-1}^{-1}U$, alors on a bien $A_{n-1}V = -U$ et donc $A_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$.

Et donc avec les notations de l'énoncé,

$$\begin{aligned} Q^\top AQ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & U \\ U^\top & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n-1} & V \\ 0_{1,n-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1}V + U \\ U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ V^\top A_{n-1} + U^\top & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Détails
Le coefficient en haut à droite est nul puisque

$$A_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}.$$

Mais en transposant la relation $A_{n-1}V + U = 0_{n-1,1}$, il vient $V^\top \underbrace{A_{n-1}^\top}_{=A_{n-1}} + U^\top = 0_{1,n-1}$, et donc

$$Q^\top AQ = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & U^\top V + \alpha \end{pmatrix}.$$

C'est bien de la forme annoncée si on arrive à prouver que $\beta = U^\top V + \alpha > 0$.

Remarque
Notons que $U^\top V$ est bien une matrice 1×1, donc un réel.

Mais puisque $\det(Q) = 1$, alors

$$\det(A) = \det(Q)\det(A)\det(Q^\top) = \det(Q^\top AQ) = \det \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} = \det(A_{n-1}) \times \beta.$$

Détails
La dernière égalité est un déterminant diagonal par blocs.

Puisque $\det(A) > 0$ (par hypothèse) et que $\det(A_{n-1}) > 0$ (car A_{n-1} définie positive), alors $\beta > 0$.

11.b. Procédons par récurrence simple sur $n \in \mathbf{N}^*$.
Une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester est une matrice de la forme $A = (a)$, avec $a = \det(A) > 0$, donc pour tout $x \in \mathbf{R}^*$

$$(x)^\top A\,(x) = ax^2 > 0.$$

Donc la récurrence est initialisée.
Supposons donc que toute matrice de taille $n-1$, symétrique et qui vérifie le critère de

Sylvester soit définie positive.
Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique vérifiant le critère de Sylvester.
Alors en particulier $\det(A) > 0$, et donc comme dans la question précédente, il existe $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ inversible, telle que $Q^\top AQ = \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix}$, avec $\beta > 0$.
Soit alors $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ non nul, et soit $X' = Q^{-1}X$, de sorte que

$$X^\top AX = (QX')^\top A(QX) = X'^\top (Q^\top AQ)X'.$$

Puisque X est non nul, alors X' est non nul, notons $X' = \begin{pmatrix} X'_{n-1} \\ y \end{pmatrix}$ avec $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{R})$ et $y \in \mathbf{R}$.
Donc $X^\top AX = \begin{pmatrix} X'^\top_{n-1} & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'_{n-1} \\ y \end{pmatrix} = X'^\top_{n-1} A_{n-1} X'_{n-1} + \beta y^2$.
Notons que par hypothèse de récurrence, A_{n-1}, qui vérifie le critère de Sylvester[5] est définie positive.

- Si $X'_{n-1} \neq 0_{n-1,1}$, alors $X'^\top_{n-1} A_{n-1} X'_{n-1} > 0$, et donc $X^\top AX > 0$.
- Si $X'_{n-1} = 0_{n-1,1}$, alors puisque $X \neq 0_{n-1}$, alors $y \neq 0$, si bien que $X^\top AX = \beta y^2 > 0$.

Nous venons donc de prouver que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \setminus \{0_{n,1}\}$, et donc A est symétrique définie positive.
Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui vérifie le critère de Sylvester est définie positive.

Remarque
A_{n-1} est toujours la matrice extraite de A obtenue par suppression de la dernière ligne et dernière colonne.

[5] Car A le vérifie.

Partie IV. Deux applications

12. Soit $x \in \mathbf{R}$. Avec les notations précédentes, $C(x)_1 = (2)$ et $C(x)_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ont toujours un déterminant strictement positif.
Donc $C(x)$ vérifie le critère de Sylvester si et seulement si son déterminant est strictement positif. Or un développement par rapport à la dernière ligne prouve que

$$\det(C(x)) = -x \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2x^2$$

qui est strictement positif si et seulement si $x \notin \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Signe
On a utilisé des résultats bien connus sur le signe d'un polynôme de degré 2.

13.a. Développons $\det(A_{n+2})$ par rapport à sa première colonne :

$$\det(A_{n+2}) = \sqrt{3} \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}_{[n+1]} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

$$= \sqrt{3}\det(A_{n+1}) - \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix}_{[n]}$$

$$\boxed{= \sqrt{3}\det(A_{n+1}) - \det(A_n).}$$

Détails
On redéveloppe le second déterminant par rapport à sa première ligne.

13.b. Ainsi la suite $(\det(A_n))_{n\geqslant 1}$ est une suite linéaire récurrente d'ordre 2 vérifiant la relation $u_{n+2} = \sqrt{3}u_{n+1} - u_n$.
Son polynôme caractéristique est égal à $X^2 - \sqrt{3}X + 1$, de racines $\dfrac{\sqrt{3} \pm i}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{6}}$.
Donc il existe deux réels α et β tels que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\det(A_n) = \alpha\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \beta\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).$$

Rappel
Lorsque les racines du polynôme caractéristiques sont deux racines complexes conjuguées qui s'écrivent sous forme exponentielle $\rho e^{\pm i\theta}$, alors les suites cherchées sont de la forme

$$\rho^n\left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right).$$

Puisque $\det(A_1) = \sqrt{3}$ et $\det(A_2) = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 2$, si bien que

$$\begin{cases} \alpha\frac{\sqrt{3}}{2} + \beta\frac{1}{2} = \sqrt{3} \\ \alpha\frac{1}{2} + \beta\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\sqrt{3} + \beta = 2\sqrt{3} \\ \alpha + \beta\sqrt{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \sqrt{3} \end{cases}$$

Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} \det(A_n) &= \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 2\cos\left((n-2)\frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

En particulier, on a $\det(A_1), \det(A_2), \det(A_3)$ et $\det(A_4)$ qui sont strictement positifs. En revanche, $\det(A_5) = 0$. Et donc A_5 n'est pas définie positive.
Et pour $n \geqslant 5$, le 5ème mineur principal de A_n est $\det(A_5)$, si bien que A_n ne vérifie pas le critère de Sylvester, et donc n'est pas définie positive.
En revanche, pour $n \in [\![1,4]\!]$, tous les mineurs principaux de A_n, qui sont les $\det(A_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont strictement positifs, donc A_n vérifie le critère de Sylvester, et donc est définie positive.
Ainsi, $\boxed{A_n \text{ est symétrique définie positive si et seulement si } n \in [\![1,4]\!]}$.

▸ Exercice 1 : urnes de Polya

1.a. La variable S_n représente donc[6] le nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages.
On a alors évidemment $S_n(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$.
Et en fait il s'agit même d'une égalité puisque pour $k \in [\![0,n]\!]$, on peut tout à fait avoir k boules rouges lors des k premiers tirages, puis uniquement des boules blanches.

[6] C'est une somme de variables aléatoires valant soit 0 soit 1, sa valeur est donc le nombre de 1 dans la somme)

1.b. Si $c = 0$, alors le contenu de l'urne ne change pas au cours des tirages : il y a toujours a boules blanches et b boules rouges, si bien qu'à chaque tirage la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{b}{a+b}$.
Et par indépendance des tirages[7], $S_n \sim \mathscr{B}\left(n, \frac{b}{b+a}\right)$.

[7] Qui n'est vraie que parce que $c = 0$: le résultat d'un tirage n'influe pas sur la composition de l'urne pour les tirages suivants.

2.a. Utilisons le système complet d'événements $\{[S_k = i], 0 \leqslant i \leqslant k\}$. Alors

$$\mathbf{P}(X_{k+1} = 1) = \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(S_k = i)\mathbf{P}_{[S_k=i]}(X_{k+1} = 1).$$

Mais sachant $[S_k = i]$ réalisé, au moment du $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage, l'urne contient $a + b + kc$ boules, dont $b + ic$ sont rouges.
Et donc la probabilité d'obtenir une boule rouge est $\frac{b+ic}{a+b+kc}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{k+1} = 1) &= \sum_{i=0}^{k} \mathbf{P}(S_k = i)\frac{b+ic}{a+b+kc} \\ &= \frac{1}{a+b+c}\left(b\sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}(S_k = i) + c\sum_{i=0}^{k} i\mathbf{P}(S_k = i)\right) \\ &= \frac{1}{a+b+kc}\left(b + c\mathbf{E}(S_k)\right) = \frac{b + c\mathbf{E}(S_k)}{a+b+kc}. \end{aligned}$$

2.b. On a, en notant éventuellement $S_0 = 0$ (dans le cas où $k = 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_{k+1} = 1) &= \frac{b + c\mathbf{E}(S_k)}{a+b+kc} = \frac{b + c\mathbf{E}(S_{k-1} + X_k)}{a+b+kc} \\ &= \frac{b + c\mathbf{E}(S_{k-1})}{a+b+kc} + \frac{c\mathbf{E}(X_k)}{a+b+kc} \\ &= \frac{a+b+(k-1)c}{a+b+kc}\mathbf{P}(X_k = 1) + \frac{c\mathbf{P}(X_k = 1)}{a+b+kc} \\ &= \frac{a+b+kc}{a+b+kc}\mathbf{P}(X_k = 1) = \boxed{\mathbf{P}(X_k = 1).} \end{aligned}$$

Linéarité de l'espérance.

X_k suit une loi de Bernoulli, donc $\mathbf{E}(X_k) = \mathbf{P}(X_k = 1)$.

2.c. Puisque les X_k sont des indicatrices, elles ne prennent que les valeurs 0 et 1, et donc suivent des lois de Bernoulli.
Et la question précédente prouve donc qu'elles suivent toutes la même loi de Bernoulli.
On a en particulier $\mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{b}{a+b}$, et donc X_n suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{b}{a+b}\right)$.
On en déduit notamment que $\boxed{\mathbf{E}(X_n) = \dfrac{b}{a+b}}$ et $\mathbf{V}(X_n) = \frac{b}{a+b}\left(1 - \frac{b}{a+b}\right) = \boxed{\dfrac{ab}{(a+b)^2}}$.

3. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}(X_k) = n\mathbf{E}(X_1) = \boxed{\frac{nb}{a+b}}.$$

4.a. L'événement «obtenir k rouges puis $n-k$ blanches» est l'événement $A = \bigcap_{i=1}^{k}[X_i = 1] \cap \bigcap_{i=k+1}^{n}[X_i = 0]$.
Par la formule des probabilités composées, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A) &= \mathbf{P}(X_1 = 1)\mathbf{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 1)\cdots\mathbf{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{k-1}=1]}(X_k = 1)\mathbf{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_k=1]}(X_{k+1} = 0)\cdots\mathbf{P}_{[X_1=1]\cap\cdots\cap[X_{n-1}=0]}(X_n = 0)\\ &= \frac{b}{a+b}\frac{b+c}{a+b+c}\frac{b+2c}{a+b+c}\cdots\frac{b+(k-1)c}{a+b+(k-1)c}\frac{a}{a+b+kc}\frac{a+c}{a+b+(k+1)c}\cdots\frac{a+(n-k-1)c}{a+b+(n-1)c}\\ &= \frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)}.\end{aligned}$$

4.b. Si on raisonne comme à la question précédente, les seuls termes qui vont changer vont être le $k^{\text{ème}}$ et le $(k+1)^{\text{ème}}$, qui vont être remplacés respectivement par

$$\frac{a}{a+b+(k-1)c} \text{ et } \frac{b+(k-1)c}{a+b+kc}.$$

Ceci ne change pas le produit, et donc la probabilité d'obtenir d'abord $k-1$ rouges puis une blanche, puis une rouge, puis des blanches est la même que celle calculée à la question précédente.

4.c. Plus généralement, le même raisonnement prouve que tout échange d'un tirage donnant une boule blanche avec un tirage donnant une boule rouge ne change pas la probabilité.
Et plus généralement, si $(i_1, \dots, i_n)$ est un n-uplet d'éléments de $\{0, 1\}$ comportant exactement k 1, alors

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{p=1}^{n}[X_p = i_p]\right) = \frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)}.$$

Mais si on note $E_k = \{(i_1, \dots, i_n) \in \{0,1\}^n \mid i_1 + \cdots + i_n = k\}$ l'ensemble des n-uplets comportant exactement k fois 1, alors

$$[S_n = k] = \bigcup_{(i_1,\dots,i_n)\in E_k}\left(\bigcap_{p=1}^{n}[X_p = i_p]\right)$$

l'union étant disjointe. Donc

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in E_k}\mathbf{P}\left(\bigcap_{p=1}^{n}[X_p = i_p]\right) = \operatorname{Card}(E_k)\frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)}.$$

Puisque choisir un élément de E_k revient à choisir la position des 1, on a donc $\operatorname{Card}(E_k) = \binom{n}{k}$ et donc

$$\boxed{\mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)}}.$$

4.d. Dans le cas très particulier où $a = b = c = 1$, on a $\pi(i,j) = i(i+1)\cdots(i+j-1)$, et donc

$$\frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)} = \frac{1(1+1)\cdots(1+k-1)1(1+1)\cdots(1+n-k-1)}{2\times 3\times(2+n-1)} = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

si bien que

$$\mathbf{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\frac{k!(n-k)!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}.$$

Et donc $\boxed{S_n \text{ suit la loi uniforme sur } [\![0,n]\!].}$

4.e. Le plus simple est de remarquer que puisque S_n est à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, alors $\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_n = k) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$. Soit encore

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\pi(b,k)\pi(a,n-k)}{\pi(a+b,n)} = 1 \text{ et donc } \boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\pi(b,k)\pi(a,n-k) = \pi(a+b,n).}$$

5.a. Il n'y a à peu près rien à dire, il suffit de sortir les deux premiers termes du produit.

5.b. Par la formule de transfert,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_n^2 - S_n) = \mathbf{E}(S_n(S_n-1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(S_n = k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbf{P}(S_n = k)\\ &= \frac{1}{\pi(a+b+n)}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}\pi(b,k)\pi(a,n-k).\end{aligned}$$

Les termes de la somme pour $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls.

Commençons par appliquer deux fois la formule dite «du capitaine» : pour $k \geqslant 2$,

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-2)\binom{n-2}{k-2}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(S_n^2 - S_n) &= \frac{n(n-1)}{\pi(a+b,n)}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\pi(b,k)\pi(a,n-k)\\ &= \frac{n(n-1)}{\pi(a+b,n)}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\pi(b,i+2)\pi(a,n-2-i)\\ &= \frac{n(n-1)}{\pi(a+b,n)}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}b(b+c)\pi(b+2c,i)\pi(a,n-2-i)\\ &= \frac{n(n-1)b(b+c)}{\pi(a+b,n)}\pi(a+b+2c,n-2)\\ &= \frac{n(n-1)b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)\pi(a+b+2c,n-2)}\pi(a+b+2c,n-2)\\ &\boxed{= \frac{n(n-1)b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)}.}\end{aligned}$$

Chgt d'indice
On a posé

$i = k-2 \Leftrightarrow k = i+2.$

C'est la formule de la question 4.e.

C'est la question précédente.

5.c. Par la formule de Huygens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(S_n) = \mathbf{E}(S_n^2) - \mathbf{E}(S_n)^2 &= \mathbf{E}\left(S_n^2 - S_n\right) + \mathbf{E}(S_n) - \mathbf{E}(S_n)^2\\ &= \frac{n(n-1)b(b+c)}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{nb}{a+b} - \frac{n^2b^2}{(a+b)^2}\\ &= \frac{nb}{(a+b)^2(a+b+c)}\left((n-1)(b+c)(a+b) + (a+b)(a+b+c) - nb(a+b+c)\right)\\ &= \frac{nb}{(a+b)^2(a+b+c)}\left(n(a+b)(b+c) + a(a+b) - nb(b+c) - nab\right)\\ &= \frac{nb}{(a+b)(a+b+c)}\left(na(b+c) + a(a+b) - nab\right) = \boxed{\frac{nab(a+b+nc)}{(a+b)^2(a+b+c)}}.\end{aligned}$$

Astuce
Un moyen de vérifier notre résultat : si $a = b = c = 1$, on doit retrouver la variance d'une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$ d'après 4.d. C'est bien le cas ici, ces deux variances étant égales à $\frac{n(n+2)}{12} = \frac{(n+1)^2-1}{12}$.

► Exercice 2 : calcul de la somme d'une série.

1.a. Une récurrence simple facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \geqslant 0$, et on a évidemment, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+5} < 1$$

si bien que (u_n) est décroissante.
Étant décroissante et minorée, par le théorème de la limite monotone, elle converge.

1.b. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{2n+5}{2n+2}\right) = \ln\left(1 + \frac{3}{2n+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{3}{n}.$$

Puisque la série de terme général $\frac{3}{n}$ diverge, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum (\ln(u_n) - \ln(u_{n+1}))$ diverge.

1.c. La série de terme général $\ln(u_n) - \ln(u_{n+1})$ est à valeurs positives[8], donc nécessairement la suite de ses sommes partielles, qui est croissante, diverge vers $+\infty$.
Or pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_k) - \ln(u_{k+1})) = \ln(u_0) - \ln(u_n) = -\ln(u_n)$$

si bien que $-\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Et donc $u_n = e^{\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

[8] Par décroissance de (u_n).

2.a. On a

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) &= \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{2n+2}{2n+5}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{3}{2n+5}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\alpha}{n} - \frac{3}{2n+5} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(\alpha - \frac{3}{2+\frac{5}{n}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}\left(\alpha - \frac{3}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\boxed{\underset{n\to+\infty}{=} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).}
\end{aligned}$$

DL
$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + O(x^2)$.

2.b. Si $\alpha \neq \frac{3}{2}$, alors

$$\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\alpha - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{n}$$

si bien que par critère de comparaison pour les séries de signe constant, $\sum \ln(v_n)$ converge.

Mais si $\alpha = \frac{3}{2}$, alors $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, et donc la série de terme général $\ln(v_n)$ converge.

⚠ Attention !
Il est important de mettre à part le cas $\alpha = \frac{3}{2}$, qui ne nous fournit pas d'équivalent.

3.a. On a donc $\sum_{k=1}^{n} \ln(v_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$. Or

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln(v_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\ln\left((k+1)^{3/2} u_{k+1}\right) - \ln\left(k^{3/2} u_k\right)\right] = \ln\left(n^{3/2} u_n\right) - \ln(u_1)$$

si bien que $\ln\left(n^{3/2} u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S + \ln(u_1)$, et donc $n^{3/2} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_1 e^S$.

Puisque $u_1 e^S \neq 0$, on a donc $n^{3/2} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_1 e^S$, et donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^S u_1}{n^{3/2}}.}$

3.b. Par critère de comparaison[9] à une série de Riemann convergente, $\sum u_n$ converge.

[9] On a déjà dit que $u_n \geqslant 0$.

3.c. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$2\sum_{k=1}^{n+1} k u_k + 3\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 2\sum_{k=0}^{n} (k+1) u_{k+1} + 3\sum_{k=0}^{n} u_{k+1}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{n}(k+1)\frac{2k+2}{2k+5}u_k + 3\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+2}{2k+5}u_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(2k+2)u_k = \boxed{2\sum_{k=0}^{n}ku_k + 2\sum_{k=0}^{n}u_k.}$$

3.d. On en déduit donc que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$3\sum_{k=1}^{n+1}u_k - 2\sum_{k=0}^{n}u_k = 2\sum_{k=0}^{n}ku_k - 2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k.$$

Mais

$$3\sum_{k=1}^{n+1}u_k - 2\sum_{k=0}^{n}u_k = \sum_{k=1}^{n+1}u_k + 2u_{n+1} - 2u_0 = \sum_{k=1}^{n+1}u_k + 2u_{n+1} - 2.$$

Et de même,

$$2\sum_{k=0}^{n}ku_k - 2\sum_{k=1}^{n+1}ku_k = -2(n+1)u_{n+1}.$$

Ainsi, il vient

$$\sum_{k=1}^{n+1}u_k = 2 - 2u_{n+1} - 2(n+1)u_{n+1}.$$

Et grâce à l'équivalent de la question 3.a, on a à la fois $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $(n+1)u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si bien que

$$\sum_{k=1}^{+\infty}u_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n+1}u_k = 2.$$

Et donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}u_k = u_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}u_k = \boxed{3.}$$

⚠ Attention !

N'oublions pas de rajouter u_0 à la somme, si par indifférence des premiers termes, on peut l'oublier au moment d'étudier la nature de la série, sa valeur intervient dans le calcul de la somme. Si on change le premier terme, on change la somme !