Devoir surveillé 7

► Exercice 1 : inégalités de convexité

1. Pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, on note $h_\alpha : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ t & \longmapsto & t^\alpha \end{array} \right.$.
   a. Justifier que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, h_α est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+^*$, et qu'elle se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$.
   b. Pour quelles valeurs de α, le prolongement par continuité de h_α à $\mathbf{R}_+$ est-il de classe $\mathscr{C}^2$?
   c. Suivant la valeur de $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, déterminer si h_α est convexe, concave ou ni l'une ni l'autre.
2. Montrer que la somme de deux fonctions concaves sur un même intervalle I est concave sur I.
3. Soit $\varphi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ concave. On note $f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}_+^*)^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right) \end{array} \right.$.
   a. Prouver que pour tous $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2) \leqslant f(x_1+x_2, y_1+y_2)$
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n,\ \forall (y_1,\dots,y_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n,\ \sum_{k=1}^n f(x_k,y_k) \leqslant f\left(\sum_{k=1}^n x_k, \sum_{k=1}^n y_k\right).$$
4. En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$, prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tous $(a_1,\dots,a_n), (b_1,\dots,b_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$,
$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$
5. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $\varphi_p : t \mapsto \left(t^{\frac{1}{p}} + 1\right)^p$.
   a. En utilisant la formule du binôme, montrer que φ_p est concave sur $\mathbf{R}_+^*$.
   b. Que donne l'inégalité de la question 3 appliquée à φ_p ? En déduire l'inégalité de Minkowski : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tous $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in \mathbf{R}_+^*$,
$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{1/p}.$$

► Exercice 2 : polynômes de Hermite

Dans tout le problème, on considère $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'' - 2XP' \end{array} \right.$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par f.
   On note alors $f_n : \mathbf{R}_n[X] \to \mathbf{R}_n[X]$ la restriction de f à $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer la matrice A_n de f_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$. *Vous réfléchirez bien à la taille de cette matrice !*
3. En utilisant la matrice A_3, déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{R}_3[X]$ tels que $f(P) = -4P$.
4. Soit $n \in \mathbf{N}$.
   a. Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, déterminer la matrice de $f_n - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$. En déduire les valeurs de λ pour lesquelles $f_n - \lambda \mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}$ n'est pas injective.

b. Justifier que l'équation différentielle $y''-2xy'+2ny=0$ possède des solutions polynomiales non nulles.

c. Prouver qu'un polynôme non nul, vérifiant $P''-2XP'+2nP=0$ est nécessairement de degré n, puis qu'il existe un unique polynôme P_n, unitaire et de degré n tel que

$$\{P\in\mathbf{R}[X]\mid P''-2XP'+2nP=0\}=\mathrm{Vect}(P_n).$$

d. Prouver que $(P_0,P_1,\dots,P_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

e. Montrer que A_n est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(0,-2,-4,\dots,-2n)$.

Dans la suite, on note $g:\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}\\ x & \longmapsto & e^{-x^2}\end{array}\right.$, qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$, puisque composée de fonctions qui le sont.

5. Prouver que pour tout $n\in\mathbf{N}$, il existe un polynôme $H_n\in\mathbf{R}_n[X]$ tel que pour tout $x\in\mathbf{R}$, $g^{(n)}(x)=(-1)^nH_n(x)e^{-x^2}$. Exprimer H_{n+1} en fonction de H_n et H_n', et en déduire le degré et le coefficient dominant de H_n.
6. Soit $n\in\mathbf{N}^*$. En notant que $g^{(n+1)}=(g')^{(n)}$, prouver que $H_{n+1}=2XH_n-2nH_{n-1}$. En déduire que $H_n'=2nH_{n-1}$.
7. Prouver alors que pour tout $n\in\mathbf{N}$, H_n est solution de l'équation différentielle $y''(x)-2xy'(x)+2ny(x)=0$. En déduire alors une relation entre H_n et le polynôme P_n de la question 4.c.
8. Dans cette question, on souhaite prouver par récurrence que pour $n\geqslant 1$, H_n est scindé à racines simples.
   a. Initialiser la récurrence.
   b. Soit $n\in\mathbf{N}^*$. On suppose que H_n est scindé à racines simples, et on note α la plus petite racine de H_n. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}H_n(x)e^{-x^2}$. Justifier alors soigneusement que H_{n+1} possède une racine dans l'intervalle $]-\infty,\alpha[$.
   c. En déduire alors que H_{n+1} est scindé à racines simples.

▸ Exercice 3 : projecteurs spectraux

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel, et soit $f\in\mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $(a,b)\in\mathbf{C}^2$ **distincts** et $(p,q)\in\mathscr{L}(E)^2$, non nuls, satisfaisant les trois conditions suivantes à la fois :

i) $\mathrm{id}_E=p+q$ ii) $f=ap+bq$ iii) $f^2=a^2p+b^2q$

1. Calculer $(f-a\mathrm{id}_E)\circ(f-b\mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que $p\circ q=q\circ p=0_{\mathscr{L}(E)}$.
3. Exprimer $(f-a\mathrm{id}_E)^2$ en fonction de q et en déduire que q est un projecteur, puis que p est un projecteur.
4. On suppose que $ab\neq 0$. Montrer que f est un isomorphisme et que $\forall n\in\mathbf{Z}$, $f^n=a^np+b^nq$.
5. Prouver que p est la projection sur $\mathrm{Ker}(f-a\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-b\mathrm{id}_E)$, et que q est la projection sur $\mathrm{Ker}(f-b\mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f-a\mathrm{id}_E)$.
6. On pose $F=\{\lambda p+\mu q,\ (\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2\}$.
   a. Montrer que F est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. En donner une base.
   b. Déterminer les projecteurs et les symétries qui sont dans F.
   c. Un endomorphisme $g\in\mathscr{L}(E)$ est appelé racine carrée de f si $g^2=f$. Justifier que f possède des racines carrées, et déterminer combien d'entre elles sont dans F.
7. Dans cette question, on note $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
   a. Calculer J^2, puis J^n, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$. En déduire une expression simple de A^n en fonction de I_3 et J.
   b. Déterminer un réel $\lambda\in\mathbf{R}$ tel que $(\lambda J)^2=\lambda J$.
   c. Justifier qu'il existe deux matrices B et C dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$, que l'on précisera, et deux complexes b et c tels que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $A^n=b^nB+c^nC$.
   d. Déterminer au moins quatre matrices $M\in\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ telles que $M^2=A$.

Correction du Devoir surveillé 7

▸ Exercice 1 : inégalités de convexité

1.a. Rappelons que pour $t \in \mathbf{R}_+^*$, $h_\alpha(t) = e^{\alpha \ln t}$, et donc h_α est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car les fonctions ln et exp le sont.
On a alors $\lim\limits_{t\to 0} h_\alpha(t) = \lim\limits_{t\to 0} e^{\alpha \ln t} = 0$. Donc h_α se prolonge en une fonction $\widetilde{h_\alpha}$ continue sur $\mathbf{R}_+$ en posant $h_\alpha(0) = 0$.

1.b. On a pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $h'_\alpha(t) = \dfrac{\alpha}{t} e^{\alpha \ln t} = \alpha t^{\alpha-1}$.
Et donc en particulier, h_α possède une limite finie en 0 si et seulement si $\alpha - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha \geqslant 1$.
De même, pour $t > 0$, $h''_\alpha(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$, qui possède une limite finie en 0 si et seulement si $\alpha - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \alpha \geqslant 2$, ou si $\alpha = 1$.

Donc si $\alpha \geqslant 2$ ou $\alpha = 1$, puisque h_α, h'_α et h''_α ont des limites finies en 0, alors par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^2$, h_α se prolonge par continuité en une fonction $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+$.
Et inversement, si le prolongement par continuité $\widetilde{h_\alpha}$ de h_α à $\mathbf{R}_+$ est $\mathscr{C}^2$, alors en particulier sa dérivée seconde est continue en 0.
Mais sa dérivée sur $\mathbf{R}_+^*$ coïncide avec celle de h_α, et donc $\lim\limits_{t\to 0} h''_\alpha(t)$ existe et vaut $h''_\alpha(0)$.
Et donc par ce qui a été dit précédemment, $\alpha \geqslant 2$ ou $\alpha = 1$.
Donc $\boxed{\widetilde{h_\alpha} \text{ est } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbf{R}_+ \text{ si et seulement si } \alpha \in \{1\} \cup [2, +\infty[.}$

1.c. On a donc, pour $t \in \mathbf{R}_+^*$, $h''_\alpha(t) = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}$, qui est positive du signe de $\alpha(\alpha - 1)$.
Donc $\boxed{h_\alpha \text{ est convexe si } \alpha \geqslant 1 \text{ et concave sur } \alpha \leqslant 1.}$

> $\alpha = 1$
> Notons que si $\alpha = 1$, h_α est à la fois convexe et concave... sans surprise puisqu'elle est affine.

2. Soient f, g deux fonctions concaves sur I. Soient $a, b \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$. Alors

$$\begin{aligned}(f+g)((1-\lambda)a+\lambda b) &= f((1-\lambda)a+\lambda b) + g((1-\lambda)a+\lambda b)\\ &\geqslant (1-\lambda)f(a)+\lambda f(b)+(1-\lambda)g(a)+\lambda g(b) \geqslant (1-\lambda)(f+g)(a)+\lambda(f+g)(b).\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f + g \text{ est encore concave sur } I.}$

3.a. Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbf{R}_+^*$. Alors

$$f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = y_1\varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + y_2\varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Et par ailleurs, $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)$.
Posons $\lambda = \dfrac{y_2}{y_1 + y_2} \in [0, 1]$, de sorte que $1 - \lambda = \dfrac{y_1}{y_1 + y_2}$.
Alors $\varphi\left((1-\lambda)\dfrac{x_1}{y_1} + \lambda\dfrac{x_2}{y_2}\right) = \varphi\left(\dfrac{x_1}{y_1+y_2} + \dfrac{x_2}{y_1+y_2}\right) = \dfrac{1}{y_1+y_2} f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
Par concavité de φ, on a donc

$$\varphi\left(\frac{x_1}{y_1+y_2} + \frac{x_2}{y_1+y_2}\right) \geqslant \frac{y_1}{y_1+y_2}\varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + \frac{y_2}{y_1+y_2}\varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right).$$

Et donc après multiplication par $y_1 + y_2$, $f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \geqslant y_1\varphi\left(\frac{x_1}{y_1}\right) + y_2\varphi\left(\frac{x_2}{y_2}\right)$, soit encore

$$\boxed{f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \geqslant f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2).}$$

3.b. C'est une simple récurrence.

4. La fonction $t \mapsto \sqrt{t} = h_{1/2}(t)$ est concave d'après la question 1.c.
Donc par ce qui précède, pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbf{R}_+^*$, il vient

$$\sum_{k=1}^n y_k\sqrt{\frac{x_k}{y_k}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n y_k\right)\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n y_k}} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \sqrt{x_k y_k} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k}\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k}.$$

En particulier, si $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ sont des réels strictement positifs, alors en posant $x_k = a_k^2$ et $y_k = b_k^2$, il vient

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.}$$

5.a. On a, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $\varphi_p(t) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} t^{\frac{k}{p}} = 1 + \sum_{k=1}^{p} h_{\frac{k}{p}}(t)$.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, $h_{\frac{k}{p}}$ est concave sur $\mathbf{R}_+^*$ puisque $\frac{k}{p} \leqslant 1$.
Et donc il en est de même[1] de $\binom{p}{k} h_{\frac{k}{p}}$. Par ailleurs, la fonction constante égale à 1 est concave.
Et alors par la question 2, $\boxed{\varphi_p \text{ est encore concave.}}$

[1] Multiplier une fonction par un réel positif ne change pas sa convexité.

5.b. L'inégalité de la question 3 nous donne alors pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \left(\left(\frac{x_k}{y^k} \right)^{1/p} + 1 \right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{\sum_{k=1}^n y_k} \right)^{1/p} + 1 \right)^p.$$

Soit encore[2]

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k^{1/p} + y_k^{1/p} \right)^p \leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k \right)^{1/p} \right)^p.$$

[2] $y_k = (y_k^{1/p})^p$.

Pour $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{R}_+^*$, appliquons cette inégalité à $x_k = a_k^p$ et $y_k = b_k^p$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \leqslant \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p} \right)^p.$$

Reste à prendre la racine[3] $p^{\text{ème}}$ des deux membres pour obtenir l'inégalité annoncée :

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p \right)^{1/p}.}$$

[3] Notons que $x \mapsto x^{1/p}$ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

▸ Exercice 2 : polynômes de Hermite

1. Soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$. Alors $\deg P \leqslant n$, si bien que $\deg P'' \leqslant n-2$ et $\deg P' \leqslant n-1$, donc $\deg XP' \leqslant n$.
Et donc $\deg f(P) \leqslant n$, si bien que $f(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.
Donc $\boxed{\mathbf{R}_n[X] \text{ est stable par } f.}$

2. On a $f(1) = 0$, $f(X) = -2X$, et pour $k \geqslant 2$, $f(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2kX^k$.
Donc la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ est

$$A_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f_n) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} f_n(1) & f_n(X) & f_n(X^2) & \dots & f_n(X^{n-2}) & f_n(X^{n-1}) & f_n(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & & & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & 0 & -4 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & n(n-1) \\ \vdots & & & & \ddots & -2(n-1) & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -2n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-2} \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}$$

3. Il s'agit donc de trouver tous les $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbf{R}_3[X]$ tels que $f_3(P) = 0_{\mathbf{R}[X]}$.

Soit encore tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(f_3(P)) = -4\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(P) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$.

Or, $A\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}4a + 2c = 0\\ 2b + 6d = 0\\ -2d = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c = -2a\\ b = 0\\ d = 0\end{cases}$ Donc $f(P) = -4P \Leftrightarrow P = a(1-2X^2) \Leftrightarrow \boxed{P \in \mathrm{Vect}(1-2X^2).}$

4.a. La matrice de $\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}$ dans la base canonique est I_{n+1}, et donc la matrice de $f_n - \lambda\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}$ dans la base canonique est

$$A_n - \lambda I_{n+1} = \begin{pmatrix}
-\lambda & 0 & 2 & & & & 0\\
0 & -2-\lambda & 0 & \ddots & & & \vdots\\
\vdots & 0 & -4-\lambda & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & n(n-1)\\
\vdots & & & & \ddots & -2(n-1)-\lambda & 0\\
0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & -2n-\lambda
\end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, on a $f_n - \lambda\mathrm{id}$ qui n'est pas injective si et seulement si elle n'est pas bijective, donc si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base n'est pas inversible.
Or, dans la base canonique, cette matrice est triangulaire supérieure, donc elle n'est pas inversible si et seulement si elle possède un[4] coefficient diagonal nul.
Donc ici si et seulement si il existe $k \in [\![0,n]\!]$ tel que $-2k - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2k$.

[4] Ou plusieurs.

4.b. Puisque $f_n+2n\mathrm{id}$ n'est pas injective (d'après la question précédente), $\mathrm{Ker}(f+2n\mathrm{id}) \neq \{0_{\mathbf{R}_n[X]}\}$.
Or ce noyau est par définition $\{P \in \mathbf{R}_n[X] \mid P'' - 2XP' + 2nP = 0\}$.
Donc non seulement nous pouvons affirmer qu'il existe des polynômes non nuls solutions de $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, mais en plus nous avons la certitude qu'il en existe de degré au plus n.

> **Remarque**
> En adaptant la méthode de la question 3, nous serions même en mesure de trouver les solutions polynomiales de degré au plus n à cette équation à l'aide de la matrice A_n.

4.c. Si P est un polynôme non nul solution de $P'' - 2XP' + 2nP = 0$, notons d son degré.
On a alors $P'' - 2XP' = -2nP$.Si on note a_d le coefficient dominant de P, alors le coefficient dominant de $P'' - 2XP'$ est $-2da_d$, alors que celui de $-2nP$ est $-2na_d$.
Donc par égalité de ces coefficients dominants, $d = n$.

Ainsi, toute solution polynomiale de l'équation différentielle est dans $\mathbf{R}_n[X]$, et donc sont dans $\mathrm{Ker}(f_n + 2n\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]})$.
Autrement dit, $\{P \in \mathbf{R}[X] \mid P'' - 2XP' + 2nP = 0\} = \mathrm{Ker}(f_n + 2n\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]})$.
Par ailleurs, $A_n + 2nI_{n+1}$ est échelonnée, avec n pivots , son rang est n, et donc $\mathrm{rg}(f + 2n\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}) = n$.
Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f_n + 2n\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}) = 1$.
Donc si P est un polynôme non nul[5] de $\mathrm{Ker}(f+2n\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]})$, alors $\mathrm{Ker}(f_n + 2n\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}(P)$.
En particulier, cette droite vectorielle contient un unique polynôme unitaire, qui est égal à P divisé par son coefficient dominant. Si on le note P_n, on a toujours $P_n \neq 0$, et donc

$$\mathrm{Ker}(f_n + 2n\mathrm{id}_{\mathbf{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}(P_n).$$

> **Attention**
> N'oublions pas qu'il s'agit d'une matrice de taille $n+1$.

[5] Et nous venons de justifier qu'il en existe.

> **Astuce**
> Plus généralement, toute droite vectorielle de $\mathbf{R}[X]$ contient toujours un et un seul polynôme unitaire.

Remarque *: vous prouverez l'an prochain que l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est en fait un espace vectoriel de dimension 2 (comme c'est le cas pour toute équation différentielle linéaire d'ordre 2, y compris si ses coefficients sont non constants). Puisque nous n'avons qu'une droite de solutions polynomiales, ceci signifie donc qu'elle possède aussi des solutions non polynomiales.*

4.d. Puisque pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$, la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts. Elle est de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$, donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathbf{R}_n[X].}$

4.e. Puisque pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f_n(P_k) = -2kP_k$, la matrice de f_n dans la base $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ est donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f_n) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(P_0) & f(P_1) & \dots & f(P_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -2n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_n \end{array} \end{array} = \mathrm{Diag}(0, -2, -4, \dots, -2n).$$

Donc A_n et $\mathrm{Diag}(0, -2, \dots, -2n)$ représentent le même endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ dans deux bases différentes : $\boxed{\text{elles sont semblables.}}$

5. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
On a évidemment pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g^{(0)}(x) = g(x) = (-1)^0 1 e^{-x^2}$, donc le polynôme constant $H_0 = 1$ convient.
Soit $n \in \mathbf{N}$, et supposons qu'il existe $H_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g^{(n+1)}(x) = (-1)^n H_n'(x) e^{-x^2} + (-1)^{n+1} 2x H_n(x) e^{-x^2} = (-1)^{n+1} \left(2xH_n(x) - H_n'(x)\right) e^{-x^2}.$$

Donc si on pose $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$, qui est encore un polynôme, on a bien pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x) e^{-x^2}$.
Et donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un[6] polynôme $H_n \in \mathbf{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) e^{-x^2}$.

[6] Unique, même si ce n'était pas demandé.

On en déduit notamment que $\deg H_{n+1} = \deg H_n + 1$, et que le coefficient dominant de H_{n+1} est deux fois celui de H_n.
Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{\deg H_n = n}$ et le coefficient dominant de H_n est $\boxed{2^n.}$

6. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = -2xe^{-x^2}$.
Et donc en appliquant la formule de Leibniz aux fonctions[7] $f : x \mapsto x$ et g,

[7] De classe $\mathscr{C}^\infty$.

$$g^{(n+1)} = (fg)^{(n)} = -2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = -2fg^{(n)} - 2nf'g^{(n-1)}$$

Remarque
f est affine, donc pour tout $k \geqslant 1$, $f^{(k)} = 0$.

si bien que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g^{(n+1)}(x) = -2x(-1)^n H_n(x) e^{-x^2} - 2n(-1)^{n-1} H_{n-1}(x) e^{-x^2} = (-1)^{n-1} \left(2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\right) e^{-x^2}.$$

Puisque par ailleurs $g^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} H_{n+1}(x) e^{-x^2}$, on en déduit que

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbf{R}$, $H_{n+1} = 2XH_n - 2nH_{n-1}$.

Rappel
Si deux fonctions polynomiales coïncident en une infinité de points, c'est qu'elles sont associées aux même polynômes.

Puisque par ailleurs, $H_{n+1} = 2XH_n - H_n'$, on en déduit que $\boxed{H_n' = 2nH_{n-1}.}$

7. Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$, $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$. En dérivant cette relation, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} H_{n+1}'(x) = 2H_n(x) + 2xH_n'(x) - H_n''(x) &\Leftrightarrow 2(n+1)H_n(x) = 2H_n(x) + 2xH_n'(x) - H_n''(x) \\ &\Leftrightarrow H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Question précédente appliquée pour H_{n+1}'.

Donc $\boxed{H_n \text{ est bien solution de } y'' - 2xy' + 2ny = 0.}$
Donc par la question 4.c, H_n est dans $\mathrm{Vect}(P_n)$, si bien qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $H_n = \lambda P_n$.
Et H_n est de coefficient dominant 2^n et P_n est unitaire, si bien que $\lambda = 2^n$ et donc $H_n = 2^n P_n$.

8.a. Le polynôme $H_1 = 2X$ est évidemment scindé à racine(s) simple(s).

8.b. Pour tout $\alpha > 0$, on a $t^\alpha \underset{t\to+\infty}{=} o\left(e^t\right)$.
Et donc par le changement de variable $t = x^2$ (qui nous donne, pour $x < 0$, $t - \sqrt{x}$) $x \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|x^k| = t^{k/2} \underset{t\to-\infty}{=} o\left(e^t\right)$, si bien que $x^k \underset{x\to-\infty}{=} o\left(e^{x^2}\right)$.
Et donc par somme[8], $H_n(x) \underset{x\to-\infty}{=} o\left(e^{x^2}\right)$, et donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty} H_n(x)e^{-x^2} = 0.}$

[8] Notons qu'on ne somme qu'un nombre fini et fixé de o.

Il s'agit alors d'utiliser une forme généralisé de Rolle pour justifier l'existence d'une racine de H_{n+1} dans $]-\infty, \alpha[$.
Si H_{n+1} ne s'annulait pas sur $]-\infty, \alpha[$, par continuité, elle serait de signe constant et non nulle sur cet intervalle, de même que $g^{(n+1)} : x \mapsto (-1)^{n+1}H_{n+1}(x)e^{-x^2}$.
Et donc $g^{(n)}$ serait strictement monotone sur $]-\infty, \alpha]$. Supposons par exemple qu'elle soit strictement croissante. Alors pour tout $x < \alpha - 1$, $g^{(n)}(x) < g^{(n)}(\alpha - 1)$.
Et donc par passage à la limite,

$$\lim_{x\to-\infty} g^{(n)}(x) \leqslant g^{(n)}(\alpha-1) < g^{(n)}(\alpha) = (-1)^n H_n(\alpha)e^{-\alpha^2} = 0.$$

C'est absurde car nous venons de prouver que $\lim_{x\to-\infty} g^{(n)}(x) = 0$.
Le raisonnement est le même si $g^{(n)}$ est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha[$.
Et donc il existe bien une racine de H_{n+1} dans l'intervalle $]-\infty, \alpha[$.

8.c. Le même type d'argument nous donnerait l'existence d'une racine de H_{n+1} dans l'intervalle $]\beta, +\infty[$, où β est la plus grande racine de H_n.
Et alors si on note $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les racines[9] de H_n, le théorème de Rolle appliqué à $g^{(n)}$ (qui est dérivable) nous dit que $g^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois dans chacun des intervalles $]a_i, a_{i+1}[$.
Et l'exponentielle ne s'annulant pas, ces points d'annulation de $g^{(n+1)}$ sont des racines de H_{n+1}.
Donc on a déjà $n-1$ racines deux à deux distinctes[10] de H_{n+1}.
Comme nous venons de dire que par ailleurs, il existe une racine de H_{n+1} dans $]-\infty, a_1[$ et une dans $]a_n, +\infty[$, on a donc $n+1$ racines distinctes de H_{n+1}, qui est de degré $n+1$. Elles sont donc nécessairement toutes simples, et donc H_{n+1} est scindé à racines simples.
Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ H_n \text{ est scindé à racines simples.}}$

[9] Deux à deux distinctes.

[10] Elles sont dans des intervalles deux à deux disjoints.

▶ Exercice 3 : projecteurs spectraux (extrait de CCP 1988)

1. On a

$$\begin{aligned}(f - a\mathrm{id}_E) \circ (f - b\mathrm{id}_E) &= f^2 - (a+b)f + ab\mathrm{id}_E = a^2p + b^2q - (a+b)(ap+bq) + ab(p+q)\\ &= a^2p + b^2q - a^2p - ab(p+q) - b^2q + ab(p+q) = \boxed{0_{\mathscr{L}(E)}.}\end{aligned}$$

Plus généralement
Un endomorphisme p commute avec tout polynôme en p, même si je ne tiens pas à donner la définition de ce qu'est «un polynôme en p», je vous laisse le soin de le deviner (c'est par exemple le cas de f^2 ou de $f^3 + 2f^2 + \mathrm{id}_E$).

2. Notons que $f - a\mathrm{id}_E = ap + bq - a(p+q) = (b-a)q$, et de même $f - b\mathrm{id}_E = (a-b)p$.
Et donc par la question précédente, $((b-a)q) \circ ((a-b)p) = -(a-b)^2 q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Puisque $a \neq b$, on a donc $\boxed{q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$
Par ailleurs, puisque $q = \mathrm{id}_E - p$, p et q commutent :

$$q \circ p = (\mathrm{id}_E - p) \circ p = p - p^2 = p \circ (\mathrm{id}_E - p) = p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

On a alors[11]

$$(f - a\mathrm{id}_E)^2 = f^2 - 2af + a^2\mathrm{id}_E = a^2p + b^2q - 2a^2p - 2abq + a^2p + a^2q = (b-a)^2q.$$

[11] C'est du binôme pour $n = 2$, en notant que f et id_E commutent.

Et par ailleurs $f - a\mathrm{id}_E = (b-a)q$, et donc $(f - a\mathrm{id}_E)^2 = (b-a)^2q^2$.
On en déduit donc, toujours car $(b-a)^2 \neq 0$ que $q^2 = q$, et donc $\boxed{q \text{ est un projecteur.}}$
Sur le même principe, on prouverait que $p^2 = p$ en développant $(f - b\mathrm{id}_E)^2$.
Mais plus simplement, nous avons déjà mentionné que si p est un projecteur, alors $\mathrm{id}_E - p$ l'est encore (c'est même la projection sur $\mathrm{Ker}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,p$.)

3. En utilisant la formule donnée pour $n=-1$, on peut trouver l'expression de f^{-1}, à savoir $f^{-1}=\dfrac{1}{a}p+\dfrac{1}{b}q$, et constater que cet endomorphisme est bien l'inverse de f.
Expliquons plutôt son origine : grâce à la première question, on a

$$f^2-(a+b)f=-ab\mathrm{id}_E \Leftrightarrow \mathrm{id}_E=-\frac{1}{ab}f^2+\frac{a+b}{ab}f=f\circ\left(-\frac{1}{ab}f+\frac{a+b}{ab}\mathrm{id}_E\right)$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{id}_E=f\circ\left(-\frac{1}{a}q-\frac{1}{b}p+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(p+q)\right)=f\circ\left(\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q\right).$$

Et de même[12], $\mathrm{id}_E=\left(\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q\right)\circ f$, de sorte que f est bijective, et que sa bijection réciproque est $\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q$.

> **Remarque**
> Si on choisit cette approche, en posant $g=\frac{1}{a}p+\frac{1}{b}q$, il faudra bien calculer à la fois $g\circ f$ et $f\circ g$, car nous n'avons faut aucune hypothèse de dimension finie, et donc inversible à gauche n'est pas nécessairement équivalent à inversible à droite.

[12] En factorisant à gauche par f, ce qui est bien possible.

Prouvons par récurrence sur $n\in\mathbf{N}$ que pour tout $n\in\mathbf{N}$, $f^n=a^np+b^nq$.
Pour $n\in\{0,1,2\}$, ce sont les hypothèses de l'énoncé, dont la récurrence est largement initialisée.
Soit $n\in\mathbf{N}$ tel que $f^n=a^np+b^nq$. Alors

$$f^{n+1}=f^n\circ f=(a^np+b^nq)\circ(ap+bq)=a^{n+1}\underbrace{p^2}_{=p}+a^nb\underbrace{p\circ q}_{=0}+ab^n\underbrace{q\circ p}_{=0}+b^{n+1}\underbrace{q^2}_{=q}=a^{n+1}p+b^{n+1}q.$$

Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbf{N},\ f^n=a^np+b^nq.}$
Et alors, nous savons que pour $n\in\mathbf{N}$, f^n est bijective car composée de fonctions bijectives, et on a

$$f^n\circ(a^{-n}p+b^{-n}q)=(a^np+b^nq)\circ(a^{-n}p+b^{-n}q)=p+\underbrace{a^nb^{-n}p\circ q+a^{-n}b^nq\circ p}_{=0}+q=p+q=\mathrm{id}_E.$$

Et donc $f^{-n}=(f^n)^{-1}=a^{-n}p+b^{-n}q$.

> **Remarque**
> Une fois qu'on sait qu'une application f est bijective, si on trouve g tel que $f\circ g=\mathrm{id}$, pas besoin de vérifier que $g\circ f=\mathrm{id}$: en composant à gauche par f^{-1} (dont l'existence est assurée), on obtient directement $g=f^{-1}$.

Alternative : plus simplement, puisque p et q commutent[13],

$$f^n=(ap+bq)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ap)^k\circ(bq)^{n-k}=a^np^n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}p^k\circ q^{n-k}+b^nq^n.$$

[13] Hypothèse indispensable pour appliquer le binôme.

Or pour $n\geqslant 1$, $p^n=p$ et $q^n=q$.
Et pour $1\leqslant k\leqslant n-1$, $p^k\circ q^{n-k}=p^{k-1}\circ\underbrace{p\circ q}_{=0}\circ q^{n-k-1}=0$.
Et donc $f^n=a^np+b^nq$.
Et le même raisonnement vaut pour $f^{-n}=(f^{-1})^n=\left(a^{-1}p+b^{-1}q\right)^n$.

4. Rappelons qu'un projecteur p est toujours la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.
Nous avons déjà dit que p est colinéaire[14] à $f-b\mathrm{id}_E$.
Et donc $\mathrm{Ker}(f-b\mathrm{id}_E)=\mathrm{Ker}(p)$.
Il s'agit donc de prouver que $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(f-a\mathrm{id}_E)$.
Or nous savons[15] que $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{id}_E)$ est l'ensemble des points fixes de p.
Mais $p-\mathrm{id}_E=-q$, et donc $\mathrm{Im}(p)=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{id}_E)=\mathrm{Ker}(-q)=\mathrm{Ker}\,q$.
Et comme $q=\dfrac{1}{b-a}(f-a\mathrm{id}_E)$, on a donc $\mathrm{Ker}\,q=\mathrm{Ker}(f-a\mathrm{id}_E)$. Et donc on a bien $\mathrm{Im}\,p=\mathrm{Ker}(f-a\mathrm{id}_E)$.
On en déduit que $\boxed{p \text{ est la projection sur } \mathrm{Ker}(f-a\mathrm{id}_E) \text{ parallèlement à } \mathrm{Ker}(f-b\mathrm{id}_E).}$
On raisonne exactement de la même manière pour q.

[14] Dans l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E)$.

[15] C'est vrai pour tout projecteur.

5.a. Puisque $F=\mathrm{Vect}(p,q)$ c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Et en particulier, c'en est un sous-groupe.
De plus, on $g\circ f=(\lambda_1p+\mu_1q)\circ(\lambda_2p+\mu_2q)=\lambda_1\lambda_2p+\mu_1\mu_2q\in F$, donc F est stable par produit.
Puisque $\mathrm{id}_E=p+q\in F$, $\mathscr{L}(E)$ est donc un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$.

> **Rappel**
> L'identité est l'élément neutre de $\mathscr{L}(E)$ pour la seconde loi. Il est donc indispensable de vérifier son appartenance à F pour parler de sous-anneau.

Il est clair que, par définition, (p, q) est génératrice de F.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ tels que $\lambda p + \mu q = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
Alors en composant à gauche par p, il vient $\lambda p^2 + \mu p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)} \Leftrightarrow \lambda p = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et p étant non nul[16], $\lambda = 0$.
Et alors $\mu q = 0_{\mathscr{L}(E)}$, et donc $\mu = 0$.
Ainsi, $\boxed{(p, q) \text{ est libre et forme donc une base de } F.}$

[16] C'est l'une des hypothèses de l'énoncé.

5.b. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$. Alors $\lambda p + \mu q$ est un projecteur de E si et seulement si

$$(\lambda p + \mu q)^2 = \lambda p + \mu q \Leftrightarrow \lambda^2 p + \mu^2 q = \lambda p + \mu q.$$

Puisque (p, q) est libre, l'identification est possible, et donc

$$\lambda^2 p + \mu^2 q = \lambda p + \mu q \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = \lambda \\ \mu^2 = \mu \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in \{0, 1\}^2.$$

Donc F contient exactement quatre projecteurs, qui sont $\boxed{p + q = \mathrm{id}_E,\ 1p + 0q = p,\ 1q + 0p = q \text{ et } 0_{\mathscr{L}(E)}.}$

De même, $\lambda p + \mu q$ est une symétrie de E si et seulement si

$$(\lambda p + \mu q)^2 = \mathrm{id}_E \Leftrightarrow \lambda^2 p + \mu^2 q = p + q \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 1 \\ \mu^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (\lambda, \mu) \in \{-1, 1\}^2.$$

Donc $\boxed{F \text{ contient quatre symétries, qui sont } p + q = \mathrm{id}_E,\ -p - q = -\mathrm{id}_E,\ p - q \text{ et } q - p.}$

5.c. Prouvons directement que f possède des racines carrées dans F, ce qui prouvera qu'il en possède dans $\mathscr{L}(E)$.
Soit donc $u = \lambda p + \mu q \in F$. Alors

$$u^2 = f \Leftrightarrow \lambda^2 p + \mu^2 q = ap + bq \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = a \\ \mu^2 = b \end{cases}$$

Or, il existe des racines carrées de a et b dans $\mathbf{C}$, donc il existe (λ, μ) vérifiant les conditions requises, et donc il existe au moins une racine carrée de f dans F.
Plus précisément, si a et b sont tous deux non nuls, alors il existe 2 racines carrées de a et deux racines carrées de b, donc exactement 4 racines carrées de f dans F.
Et si $a = 0$ ou $b = 0$ (notons qu'on ne peut pas avoir les deux à la fois car $a \neq b$), alors il n'y a qu'une seule racine carrée de 0, et donc deux éléments de F qui sont des racines carrées de f.

6.a. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$.
Puis $J^3 = J^2 J = 3J^2 = 9J$, et une récurrence triviale prouve que pour tout $k \geqslant 2$, $J^k = 3^{k-1} J$.

Puisque $A = I_3 + J$, et que I_3 et J commutent, par la formule du binôme de Newton matriciel, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n = (I_3 + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k &= I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} J = I_3 + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} - \frac{1}{3} \right) J \\ &= I_3 + \frac{1}{3} \left((3+1)^n - 1 \right) J = I_3 + \frac{4^n - 1}{3} J = \boxed{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

6.b. On a $\left(\frac{1}{3} J\right)^2 = \frac{1}{9} 3J = \frac{1}{3} J$.

6.c. Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^3)$ l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ canoniquement associé à A.
Notons également $p \in \mathscr{L}(\mathbf{C}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à $\frac{1}{3} J$, qui est alors un projecteur par la question précédente, et soit $q = \mathrm{id} - p$.
Alors q est encore un projecteur puisque $q^2 = (\mathrm{id} - p)^2 = \mathrm{id}^2 - 2p + p^2 = \mathrm{id} - p$.

Détails
Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $\mathrm{id} - p$, est la projection sur G parallèlement à F.

On a donc $\mathrm{id} = p + q$ et puisque $A = J + I_3 = 4\frac{1}{3}J + \left(I_3 - \frac{1}{3}J\right)$, alors $f = 4p + q$.

Enfin, on a $A^2 = (I_3 + J)^2 = I_3 + 2J + J^2 = I_3 + 5J = 16\frac{1}{3}J + \left(I_3 - \frac{1}{3}J\right)$, et donc $f^2 = 4^2 + q$.

Donc nous sommes bien dans le contexte des questions précédentes : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n = 4^n p + 1^n q = 4^n p + q$.

En prenant les matrices de ces endomorphismes dans la base canonique de $\mathbf{C}^3$, il vient donc $A^n = 4^n \frac{1}{3}J + \left(I_3 - \frac{1}{3}J\right)$.

6.d. Nous avons expliqué à la question 5.c que si $g = \pm\sqrt{4}p \pm \sqrt{1}q$, alors $g^2 = f$.
Donc en particulier ici, les quatre matrices

$$\frac{2}{3}J + \left(I_3 - \frac{1}{3}J\right), \frac{2}{3}J - \left(I_3 - \frac{1}{3}J\right), -\frac{2}{3}J + \left(I_3 - \frac{1}{3}J\right), -\frac{2}{3}J - \left(I_3 - \frac{1}{3}J\right)$$

sont toutes des matrices dont le carré vaut A.
Ces matrices sont

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$