Devoir surveillé 6

▸ Exercice 1 : équation fonctionnelle de Cauchy

On dit qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifie la propriété $(\star)$ si :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. Montrer que toute fonction affine satisfait $(\star)$.
2. Justifier qu'une fonction polynomiale satisfait $(\star)$ si et seulement si elle est affine.

Dans toute la suite, on note $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction qui satisfait $(\star)$, et on note $h : x \mapsto f(x) - f(0)$.

3. a. Justifier que h vérifie encore $(\star)$.
   b. Montrer que $h(0) = 0$, et en déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(2x) = 2h(x)$.
   c. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, $h(x+y) = h(x) + h(y)$.
   d. Montrer que h est impaire.
4. Dans cette question, on suppose de plus que f est continue en 0, et on note $g : x \mapsto h(x) - h(1)x$.
   a. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x - x_0) = h(x) - h(x_0)$, puis en déduire que h est continue en x_0.
   b. Justifier que g est 1-périodique.
   c. Justifier rigoureusement que g possède un maximum et un minimum sur $\mathbf{R}$.
   d. Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ un réel en lequel g atteint son maximum. En considérant $g(x + x_0)$, montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) \leqslant 0$.
   e. Montrer que g est nulle, puis que f est affine.
5. Dans cette question, on suppose que f est une solution de $(\star)$ qui est croissante sur $\mathbf{R}$ (et on ne suppose plus rien au sujet de sa continuité).
   a. Prouver que $h(1) \geqslant 0$.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $h\left(\frac{1}{2^n}\right) = \dfrac{h(1)}{2^n}$.
   c. En déduire que h est continue en 0, puis que f est affine.

▸ Exercice 2 : développement asymptotique d'une suite implicite

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit une fonction f_n sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f_n : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \ln x \end{array} \right.$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution $x_n \in \mathbf{R}_+^*$.
   On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n > 1$.
3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer $f_{n+1}(x_n)$ en fonction de x_n, et en déduire que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.
4. Prouver que $(x_n)_n$ converge vers une limite $\ell \geqslant 1$.
5. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.
6. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ln(v_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   a. Montrer que pour tout $x > 1$, $x \ln x < x^2$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
   b. Prouver que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

c. En déduire enfin que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{\ln u_n}$.

7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $n \ln x_n + \ln(\ln x_n) = 0$, et en déduire que $n = \dfrac{1}{\ln x_n} \ln\left(\dfrac{1}{\ln x_n}\right)$.

8. À l'aide des questions 6 et 7, prouver que $\dfrac{1}{\ln x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{\ln n}$.

9. En déduire enfin que $x_n \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

▸ Exercice 3 : une équation polynomiale

On cherche dans cet exercice à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1) \quad (\star)$.

1. Déterminer les polynômes constants satisfaisant $(\star)$.

2. Factoriser $X^4 + X^2 + 1$ en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$.

3. En déduire que $X^2 + X + 1$ vérifie $(\star)$.

Dans toute la suite, P est un polynôme non constant qui satisfait $(\star)$.

4. Montrer que pour $\alpha \in \mathbf{C}$ racine de P, alors α^2 et $(\alpha+1)^2$ sont aussi de racines de P.

5. On suppose que 0 est une racine de P, et on définit alors une suite en posant $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$.

- **a.** Montrer que (u_n) est strictement croissante.
- **b.** Étudier la limite de $(u_n)_n$.
- **c.** Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(u_n) = 0$.
- **d.** En déduire que 0 n'est pas racine de P.

6. Soit $\alpha \in \mathbf{C}^*$ une racine de P.

- **a.** Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $P\left(\alpha^{2^n}\right) = 0$.
- **b.** En déduire qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\alpha^k = 1$.
- **c.** Prouver alors que $|\alpha| = |\alpha + 1| = 1$.
- **d.** En déduire alors toutes les racines de P.

7. Déterminer l'ensemble des polynômes non nuls qui satisfont $(\star)$.

Correction du Devoir surveillé 6

► Exercice 1 : équation fonctionnelle de Cauchy

1. Soient $a, b \in \mathbf{R}$, et soit $f : x \mapsto ax + b$. Alors pour tous $x, y \in \mathbf{R}$, on a

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = a\frac{x+y}{2} + b = \frac{ax+b}{2} + \frac{ay+b}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Donc toute fonction affine satisfait $(\star)$.

2. Soit f une fonction polynomiale, et soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{R}[X]$, avec $n \geqslant \deg P$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = P(x)$.
Supposons que f satisfasse $(\star)$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P\left(\frac{x}{2}\right) = P\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{P(x)+P(0)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \frac{a_0}{2}$.
Autrement dit, les polynômes $P\left(\frac{X}{2}\right)$ et $\frac{P(X)+P(0)}{2}$ sont égaux puisqu'ils coïncident en tous les réels.
Or, $P\left(\frac{X}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{X}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k} X^k$.
Donc par identification des coefficients, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{a_k}{2} = \frac{a_k}{2^k}$.
Donc en particulier, pour $k \geqslant 2$, $a_k = 0$. Et donc $P = a_0 + a_1 X$ est de degré au plus 1, si bien que f est affine.
Puisque la question précédente prouve que toute fonction affine satisfait $(\star)$, on a bien prouvé qu'une fonction polynomiale satisfait $(\star)$ si et seulement si elle est affine.

> **Coeff. constant**
> Nous n'avons pas écrit l'égalité des coefficients constants, puisqu'elle n'apporte aucune information.

3.a. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Alors

$$h\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0) = \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{f(0)+f(0)}{2} = \frac{h(x)+h(y)}{2}.$$

Donc h satisfait encore $(\star)$.

3.b. Il est évident que $h(0) = f(0) - f(0) = 0$, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$h(x) = h\left(\frac{2x+0}{2}\right) = \frac{h(2x)+h(0)}{2} = \frac{h(2x)}{2}$$

si bien que $\boxed{h(2x) = 2h(x).}$

3.c. Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Alors

$$h(x+y) = h\left(\frac{2x+2y}{2}\right) = \frac{h(2x)+h(2y)}{2} = \frac{2h(x)+2h(y)}{2} = \boxed{h(x)+h(y).}$$

3.d. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $0 = h(0) = h(x + (-x)) = h(x) + h(-x)$ et donc $h(-x) = -h(x)$.
Ainsi, $\boxed{h \text{ est bien une fonction impaire.}}$

4.a. Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $h(x - x_0) = h(x + (-x_0)) = h(x) + h(-x_0) = h(x) - h(x_0)$.
Et puisque h est continue[1] en 0, $\lim_{x \to x_0} h(x - x_0) = h(0) = 0$, si bien que $\lim_{x \to x_0} h(x) - h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} h(x) = h(x_0)$. Donc h est continue en x_0.

[1] Car f l'est.

4.b. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$g(x+1) = h(x+1) - h(1)(x+1) = h(x) + h(1) - h(1)x - h(1) = h(x) - h(1)x = g(x).$$

Et donc $\boxed{g \text{ est bien 1-périodique.}}$

4.c. Puisque g est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y possède un maximum et un minimum.
Notons $a \in [0, 1]$ et $b \in [0, 1]$ deux points tels que $g(a) = \min_{t \in [0,1]} g(t)$ et $g(b) = \max_{t \in [0,1]} g(t)$.

Soit alors $x \in \mathbf{R}$. On a $x - \lfloor x \rfloor \in [0,1]$, et donc $g(x) = g\left(x - \underbrace{\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbf{Z}}\right)$, si bien que $g(a) \leqslant g(x) \leqslant g(b)$.
Et donc g admet bien un minimum[2] en a et un maximum en b.

[2] Nous n'avons pas seulement prouvé qu'il s'agit d'un minorant de g, mais bien qu'il s'agit d'une valeur atteinte par g, donc c'est bien un minimum.

4.d. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $g(x+x_0) = g(x) + g(x_0)$. Mais $g(x+x_0) \leqslant g(x_0)$, et donc $g(x) \leqslant 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) \leqslant 0$.

4.e. Sur le même principe, si x_1 est un point en lequel g atteint son maximum, alors pour tout $g \in \mathbf{R}$, $g(x+x_1) = g(x) + g(x_1)$ avec $g(x+x_1) \geqslant g(x_1)$. Et donc $g(x) \geqslant 0$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = 0$.
Par conséquent, $h(x) = h(1)x$, et donc $f(x) = h(x) + f(0) = h(1)x + f(0)$.
Et donc $\boxed{f \text{ est bien une fonction affine.}}$

5.a. Puisque $h(0) = 0$ et que $1 \geqslant 0$, par croissance de h, $h(1) \geqslant h(0) \geqslant 0$.

Détails
f est croissante, donc h, qui ne diffère de f que par une constante, l'est aussi.

5.b. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $h\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{h(1)}{2^n}$.
Pour $n = 0$ c'est évident.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $h\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{h(1)}{2^n}$. Alors par la question 3.b,

$$\frac{h(1)}{2^n} = h\left(\frac{1}{2^n}\right) = h\left(2\frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2h\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

et donc $h\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = \frac{h(1)}{2^{n+1}}$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ h\left(\frac{1}{2^n}\right) = \frac{h(1)}{2^n}.}$

Détails
Rappelons que la continuité est une notion locale, et que donc si la restriction de f à un voisinage de a est continue (ce qui est le cas ici puisque la restriction de h à $]-1,1[$ est continue car constante), alors f est continue en a.

5.c. ► Si $h(1) = 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$, $0 = h(0) \leqslant h(x) \leqslant h(1) = 0$, si bien que $h(x) = 0$.
Puisque h est impaire, pour tout $x \in [-1,1]$, $h(x) = 0$. Et donc nécessairement, h est continue en 0.

► Si $h(1) > 0$, soit $\varepsilon > 0$, et soit $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n_0}} < \dfrac{\varepsilon}{h(1)}$.
Alors $0 \leqslant h\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) = \frac{h(1)}{2^{n_0}} < \varepsilon$.
Par croissance de h, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2^{n_0}}\right]$, $0 \leqslant h(x) \leqslant h\left(\frac{1}{2^{n_0}}\right) < \varepsilon$.
Et donc par imparité de h, pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2^{n_0}}, \frac{1}{2^{n_0}}\right[$, $|h(x)| < \varepsilon$.
Autrement dit, en posant $\eta = \frac{1}{2^{n_0}} > 0$, on a bien prouvé qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]-\eta,\eta[$, $|h(x) - h(0)| < \varepsilon$.
Nous reconnaissons là la définition de la continuité de h en 0.

Rappel
L'existence d'un tel n_0 découle du fait que $\frac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc h est continue en 0, et par conséquent, f l'est également. On en déduit donc que le résultat de la question précédente s'applique, si bien que $\boxed{f \text{ est affine.}}$

► Exercice 2 : développement asymptotique d'une suite implicite

1. S'il est possible de dresser un tableau de variations de f_n, c'est inutile ici : sur $]0,1]$, on a $f_n(x) \leqslant 0$, donc l'équation $f_n(x) = 1$ ne possède pas de solution dans $]0,1]$.
Et sur $]1,+\infty[$, f_n est strictement croissante car produit de fonctions positives strictement croissantes.
Puisqu'elle est continue, que $f_n(1) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, alors par le théorème de la bijection, il existe un unique $x \in]1,+\infty[$ tel que $f_n(x) = 1$.
Donc en résumé, $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 1 \text{ possède bien une unique solution dans }]0,+\infty[.}$

⚠ Attention !
La positivité n'est pas facultative ici ! Par exemple, sur $]0,1]$, f_n est aussi le produit des deux fonctions strictement croissantes $x \mapsto x^n$ et ln, mais elle n'est pas strictement croissante.

2. La justification a en fait déjà été donnée précédemment : $f_n(1) = 0 < f_n(x_n)$ et donc par stricte croissance de f_n sur $]1,+\infty[$, $\boxed{1 < x_n.}$

3. On a par définition $f_n(x_n) = 1 \Leftrightarrow x_n^n \ln(x_n) = 1$.
Et donc $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1}\ln(x_n) = x_n f_n(x_n) = x_n > 1$.

On en déduit que $f_{n+1}(x_n) > \underbrace{f_{n+1}(x_{n+1})}_{=1}$ et donc que[3] $x_n > x_{n+1}$.

Donc $\boxed{(x_n)_n \text{ est strictement décroissante.}}$

[3] Une application strictement croissante, et c'est le cas de f_{n+1} ici, conserve l'ordre.

4. Puisque $(x_n)_n$ est décroissante et minorée par 1, par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ.
Et puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n > 1$, par passage à la limite, $\ell \geqslant 1$.

5. Supposons par l'absurde que $\ell > 1$. Alors pour tout $n \geqslant 1$, $x_n \geqslant \ell$, de sorte que $x_n^n \geqslant \ell^n$, et donc $x_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
De plus, $\ln(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell) \neq 0$, et donc $x_n^n \ln(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui contredit le fait que $x_n^n \ln(x_n) = 1$.
On en déduit donc que $\boxed{\ell = 1.}$

6.a. Il s'agit donc de prouver que pour tout $x > 1$, $\ln x < x$.
Mais il est classique que pour tout $x > 1$, $\ln(x) \leqslant x - 1 < x$ et donc $\boxed{x\ln(x) < x^2.}$
Puisque $v_n \ln v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, pour n suffisamment grand, $v_n \geqslant 1$ et donc

$$v_n^2 \geqslant v_n \ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Et par conséquent, $\boxed{v_n = \sqrt{v_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$

Rappel
Si $u_n \sim v_n \to \ell$, avec $\ell \neq 1$ ou $\ell = +\infty$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

6.b. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n \ln v_n) = \ln(v_n) + \ln(\ln v_n)$.
Mais puisque $\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et que $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$, on a donc $\ln(\ln v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln v_n)$.
Et donc $\ln(v_n) + \ln(\ln v_n) \underset{n\to+\infty}{=} \ln(v_n) + o(\ln v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
Et donc $\boxed{\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n).}$

6.c. On a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{\ln v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{\ln u_n}$.

7. Puisque $x_n^n \ln(x_n) = 1$, en passant au logarithme, $n\ln(x_n) + \ln(\ln x_n) = 0$.
Et donc $\boxed{n = -\dfrac{\ln(\ln x_n)}{\ln x_n} = \dfrac{1}{\ln x_n} \ln\left(\dfrac{1}{\ln x_n}\right).}$

8. Appliquons la question 6 avec $u_n = n$ et $v_n = \dfrac{1}{\ln x_n}$.
Alors $v_n = \dfrac{1}{\ln(x_n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{\ln u_n} = \dfrac{n}{\ln n}$.

9. On a donc $\ln x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Puisque par ailleurs, nous connaissons le développement limité d'ordre 1 de e^x en 0 (c'est $e^u \underset{u\to0}{=} 1 + u + o(u)$), alors

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} e^{\ln x_n} = 1 + \ln(x_n) + o(\ln x_n) \boxed{\underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).}$$

▸ Exercice 3 : une équation polynomiale

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme constant. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $P = \lambda$.
On a alors $P(X^2) = \lambda$ et $P(X)P(X-1) = \lambda^2$, donc P satisfait $(\star)$ si et seulement si $\lambda^2 = \lambda$, soit si et seulement si $\lambda \in \{0, 1\}$.
Donc $P = 0_{\mathbf{C}[X]}$ et $P = 1$ sont les seuls polynômes de $\mathbf{C}_0[X]$ satisfaisant $(\star)$.

2. Cherchons les racines complexes de $X^4 + X^2 + 1$, c'est-à-dire les solutions $z \in \mathbf{C}$ de $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
Un changement de variable $Z = z^2$ nous donne alors $Z^2 + Z + 1 = 0$, qui possède pour solutions $Z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ et $Z_2 = \overline{Z_1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{j}$.

Or les racines carrées de Z_1 sont $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = -\overline{j}$ et $z_1' = -e^{i\frac{\pi}{3}} = \overline{j}$ et celles de Z_2 sont $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = -j$ et $z_2' = -e^{-i\frac{\pi}{3}} = j$.
Donc la décomposition de $X^4 + X^2 + 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ est

$$\boxed{X^4 + X^2 + 1 = \left(X + \overline{j}\right)\left(X - \overline{j}\right)(X + j)(X - j)\,.}$$

Puisque $(X - j)\left(X - \overline{j}\right) = X^2 - 2\operatorname{Re}(j)X + |j|^2 = X^2 + X + 1$ et $(X + j)\left(X + \overline{j}\right) = X^2 - X + 1$ sont deux polynômes irréductibles[4] de $\mathbf{R}[X]$, la décomposition de $X^4 + X^2 + 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ est $\boxed{X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1).}$

[4] Ils sont de discriminant négatif strictement.

3. Notons $P(X) = X^2 + X + 1$. Alors $P(X^2) = X^4 + X^2 + 1$.
Et $P(X - 1) = (X - 1)^2 + (X - 1) + 1 = X^2 - X + 1$, de sorte que

$$P(X)P(X - 1) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) = X^4 + X^2 + 1 = P\left(X^2\right).$$

Donc $\boxed{X^2 + X + 1 \text{ satisfait bien } (\star).}$

4. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de P.
Alors $P(\alpha)^2 = P(\alpha)P(\alpha - 1) = 0 \times P(\alpha - 1)$, donc déjà $\boxed{\alpha^2 \text{ est une racine de } P.}$
De plus, on a également[5] $P\left((\alpha + 1)^2\right) = P(\alpha + 1)P(\alpha)$, et donc $P\left((\alpha + 1)^2\right) = 0$, de sorte que $\boxed{(\alpha + 1)^2 \text{ est aussi racine de } P.}$

[5] En évaluant $(\star)$ en $\alpha + 1$.

5.a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)^2 = u_n^2 + u_n + 1$.
Mais le polynôme X^2+X+1 ne possède pas de racine réelle, et donc la fonction $x \mapsto x^2+x+1$, qui est continue, est de signe constant sur $\mathbf{R}$. Puisqu'elle vaut 1 en 0, elle est strictement positive : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.
Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante.}}$

5.b. Puisque (u_n) est croissante, par le théorème de la limite monotone, elle possède une limite soit finie, soit égale à $+\infty$.
Supposons par l'absurde qu'elle possède une limite finie ℓ.
Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + 1)^2 = (\ell + 1)^2$.
Par ailleurs, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et donc par unicité de la limite, $(\ell + 1)^2 = \ell$.
Soit encore $\ell^2 + \ell + 1 = 0$, ce qui est absurde puisque nous avons déjà signalé que cette équation ne possède pas de racine réelle.
On en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

5.c. D'après la question 4, si u_n est racine de P, alors u_{n+1} est également racine de P.
Donc une récurrence rapide, initialisée par le fait que $u_0 = 0$ est racine de P prouve que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ P(u_n) = 0.}$

5.d. Puisque (u_n) est strictement croissante, pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, $p \neq q \Rightarrow u_p \neq u_q$.
Et donc P possède une infinité de racines, ce qui est absurde puisque P n'est pas constant, et donc en particulier n'est pas le polynôme nul.
On en déduit donc que $\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } P.}$

Rappel
Le seul polynôme qui possède une infinité de racines est le polynôme nul.

6.a. Par la question 4, si α est racine de P, alors α^2 est racine de P.
Donc $(\alpha^2)^2$ est également racine de P. Donc $(\alpha^4)^2 = \alpha^8$ est racine de P. Etc.
Une récurrence rapide prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\boxed{\alpha^{2^n} \text{ est racine de } P.}$

6.b. Puisque P est non nul, il possède un nombre fini de racines complexes.
Et donc en particulier, les α^{2^n} ne peuvent être tous distincts : il existe $k < \ell$ deux entiers distincts tels que $\alpha^{2^k} = \alpha^{2^\ell}$, et donc $\alpha^{2^\ell - 2^k} = 1$.
Il existe donc bien une puissance strictement positive de α qui est nulle.

6.c. On en déduit donc que α est une racine de l'unité, et en particulier $\boxed{\text{est de module 1.}}$
Puisque $(\alpha + 1)^2$ est aussi racine de P, nécessairement non nulle par la question 5, le même raisonnement montre que $|(\alpha + 1)^2| = 1$, et donc $|\alpha + 1| = 1$.
Donc on a bien $\boxed{|\alpha| = |\alpha + 1| = 1.}$

6.d. Cherchons les complexes $\alpha = a + ib$ vérifiant $|\alpha| = 1$ et $|\alpha + 1| = 1$.

Ceci équivaut à $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a+1)^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, ce qui n'est possible que pour

$$a^2 = (a+1)^2 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Et alors si $a = -\frac{1}{2}$, $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que les deux valeurs possibles de α sont $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}$.
Et inversement, il est clair que pour $\alpha \in \{j, \overline{j}\}$, $|\alpha| = |\alpha + 1| = 1$.
Ainsi, les seules racines **possibles**[6] de P sont j et $\overline{j}$.

De plus, par d'Alembert-Gauss, P étant non constant, il possède au moins une racine complexe, qui est donc soit j soit $\overline{j}$.
Et alors son carré est encore racine de P, et $j^2 = \overline{j}$ et $\overline{j}^2 = j$.
Donc $\boxed{\text{les racines complexes de } P \text{ sont exactement } j \text{ et } \overline{j}.}$

[6] À ce stade, il se peut encore qu'aucun des deux complexes j et $\overline{j}$ ne soit racine, ou qu'un seul le soit.

7. La forme scindée d'un polynôme P non constant satisfaisant $(\star)$ est donc

$$P = \lambda(X - j)^k (X - \overline{j})^\ell$$

avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$ et $k, \ell \in \mathbf{N}^*$.
Mais alors le coefficient dominant de $P(X^2)$ est λ, celui de $P(X)P(X-1)$ est λ^2, donc $\lambda = \lambda^2$, ce qui pour $\lambda \neq 0$ implique $\lambda = 1$.
Par ailleurs,

$$P\left(X^2\right) = (X^2 - j)^k (X^2 - \overline{j})^\ell = \left(X - e^{i\pi/3}\right)^k \left(X + e^{i\pi/3}\right)^k \left(X - e^{-i\pi/3}\right)^\ell \left(X + e^{-i\pi/3}\right)^\ell.$$

Détails
Les racines de $X^2 - j$ sont les racines carrées de j, que nous connaissons parfaitement, il s'agit de $e^{i\pi/3}$ et son opposé. De même, les racines carrées de $\overline{j}$ sont $e^{-i\pi/3}$ et son opposé.

Mais comme mentionné précédemment, $e^{i\pi/3} = -\overline{j}$ et $e^{-i\pi/3} = -j$.
Donc $P\left(X^2\right) = \left(X + \overline{j}\right)^k \left(X - \overline{j}\right)^k (X + j)^\ell (X - j)^\ell$.
Par ailleurs,

$$P(X)P(X-1) = (X-j)^k (X-\overline{j})^\ell (X-1-j)^k (X-1-\overline{j})^\ell = (X-j)^k (X-\overline{j})^\ell (X-(j+1))^k (X-(\overline{j}+1))^\ell.$$

Or, $j + 1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3} = -\overline{j}$ et $\overline{j} + 1 = e^{-i\pi/3} = -j$.
Donc l'égalité $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$ s'écrit encore

$$\left(X + \overline{j}\right)^k \left(X - \overline{j}\right)^k (X + j)^\ell (X - j)^\ell = (X - j)^k \left(X - \overline{j}\right)^\ell \left(X + \overline{j}\right)^k (X + j)^\ell.$$

La multiplicité de j dans le membre de gauche est ℓ, dans le membre de droite c'est k, donc $k = \ell$.
Et donc $P = (X - j)^k \left(X - \overline{j}\right)^k = (X^2 + X + 1)^k$.

Inversement, nous savons déjà que $X^2 + X + 1$ satisfait $(\star)$ et donc pour $k \in \mathbf{N}$, en posant $Q = X^2 + X + 1$ et $P_k(X) = \left(X^2 + X + 1\right)^k = Q(X)^k$, il vient

$$P_k\left(X^2\right) = Q\left(X^2\right)^k = (Q(X)Q(X-1))^k = Q(X)^k Q(X-1)^k = P_k(X)P_k(X-1)$$

et donc P_k satisfait $(\star)$.
$\boxed{\text{Donc les polynômes satisfaisant } (\star) \text{ sont exactement les } (X^2 + X + 1)^k,\ k \in \mathbf{N}.}$