Devoir surveillé 4

▸ Exercice 1 : distance d'un point à une partie de R

Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$. Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $d(x, A) = \inf\{|x-a|,\ a \in A\}$.

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $d(x, A)$ est bien défini.
2. Prouver que pour tout $x \in A$, $d(x, A) = 0$.
3. Déterminer une expression simple de la fonction $x \mapsto d(x, \mathbf{R}_-^*)$, et tracer son graphe.
4. Est-ce que pour tout $x \in \mathbf{R}$ il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = |x-a|$? Justifier votre réponse.
5. Soient $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
   a. Montrer que pour tout $a \in A$, $d(x, A) - |x-y| \leqslant |y-a|$.
   b. En déduire que $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x-y|$, puis que $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur $\mathbf{R}$.
6. Prouver que A est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R},\ d(x, A) = 0$.
7. Dans cette question on prend $A = \mathbf{Z}$, et on note $f : x \mapsto d(x, \mathbf{Z})$.
   a. Justifier que f est 1-périodique.
   b. Prouver soigneusement que pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = \min(x, 1-x)$.
   c. Tracer le graphe de f sur $[-2, 2]$.

▸ Exercice 2 : parties saturées pour une relation d'équivalence

Soit E un ensemble, et soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.
Pour $x \in A$, on note $\mathrm{cl}(x)$ la classe d'équivalence de x pour la relation $\sim$.
Si A est une partie de E, on note $s(A) = \bigcup_{t \in A} \mathrm{cl}(t)$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A \subset s(A)$.
2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ et $x \in E$. Montrer que $x \in s(A) \Leftrightarrow \mathrm{cl}(x) \cap A \neq \emptyset$.
3. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $s(s(A)) = s(A)$.
4. Une partie A de E est dite saturée si $A = s(A)$.
   Montrer qu'une partie A de E est saturée si et seulement si $\forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow \mathrm{cl}(x) \subset A$.
5. Soit F un second ensemble et soit $f : E \to F$ une application de E dans F.
   On définit une relation binaire $\sim_f$ sur E en posant $\forall x, x' \in E,\ x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$.
   a. Montrer que $\sim_f$ est une relation d'équivalence sur E.
      Dans la suite de cette question, on notera $\sim$ plutôt que $\sim_f$, et on reprend les notations précédentes.
   b. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur f pour que toutes les classes d'équivalence de $\sim$ soient des singletons.
   c. Montrer que pour $x \in E$, $\mathrm{cl}(x) = f^{-1}(f(\{x\}))$.
   d. Prouver qu'une partie A de E est saturée si et seulement si $A = f^{-1}(f(A))$.

▸ Exercice 3 : étude d'une suite.

Dans tout l'exercice on considère une suite complexe (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{2^n}$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $m_n = \max(|u_n|, |u_{n+1}|)$.

1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leqslant e^2$.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $m_{n+1} \leqslant \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right) m_n$.
3. Prouver alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $m_n \leqslant e^2 m_0$. En déduire que (u_n) est bornée.
4. Soit $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|u_{\varphi(n)} - u_n| \leqslant \dfrac{e^2 m_0}{2^{n-2}}$.
5. En déduire que la suite (u_n) converge.

▸ Exercice 4 : une équation fonctionnelle

On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continues, et telles que

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ un élément de $\mathscr{E}$.
   a. Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
   b. Montrer que f est impaire.
2. Soit $f \in \mathscr{E}$, que l'on suppose de plus dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
   a. Montrer qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbf{R}$, que l'on précisera telle que f soit solution sur $\mathbf{R}_+^*$ de l'équation différentielle $(E_\lambda)\quad xy' - y = \lambda x$.
   b. Résoudre (E_λ).
   c. En déduire, en fonction de λ, l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.
3. On considère désormais $f \in \mathscr{E}$, que l'on suppose seulement continue sur $\mathbf{R}$. On note alors F la primitive de f qui s'annule en 0.
   a. Justifier que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $F(xy) = x^2F(y) + \dfrac{xy^2}{2}f(x)$.
   b. En déduire alors que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
4. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$.

▸ Hors-barême : une autre preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Je ne corrigerai cet exercice que si vous avez ***très bien*** *réussi le reste.*

Soit (u_n) une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $v_n = \sup\{u_k,\ k \geqslant n\}$.

1. Montrer que (v_n) est bien définie et qu'elle converge vers un réel que l'on notera ℓ.
2.
3. Montrer que si $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une extractrice telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} \leqslant \ell$.
4. Prouver qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui tend vers ℓ.

Autrement dit, on a montré que ℓ est le plus grand élément de l'ensemble des limites des suites extraites convergentes de (u_n).

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 4

► Exercice 1 : distance d'un réel à une partie

Dans la suite, pour alléger les notations, si $x \in \mathbf{R}$, on note $D_x = \{|a-x|,\ a \in A\}$, de sorte que $d(x, A)$ est défini[1] par $d(x, A) = \inf D_x$.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Puisque A est non vide, il existe $a_0 \in A$. Et donc $|x - a_0| \in D_x$, si bien que D_x est une partie non vide de $\mathbf{R}$.
D'autre part, étant formée de réels positifs, elle est minorée par 0.
Et alors comme toute partie non vide et minorée de $\mathbf{R}$, D_x admet une borne inférieure.
Donc $\boxed{d(x, A) \text{ est bien défini.}}$

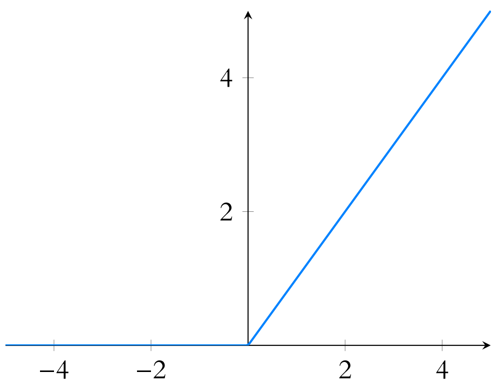
2. Si $x \in A$, alors $0 = |x - x| \in D_x$.
Puisque par ailleurs $D_x \subset \mathbf{R}_+$, 0 est un minorant de D_x. Et donc un minorant de D_x qui appartient à D_x est nécessairement le plus petit élément de D_x, et donc la borne inférieure de D_x. Donc $\boxed{d(x, A) = 0.}$

Attention ! La borne inférieure d'une partie B n'est pas toujours le plus petit élément de B, mais lorsqu'un tel plus petit élément existe, alors nécessairement c'est la borne inférieure de B.

3. Soit $x \in \mathbf{R}$. D'après la question précédente, si $x \in \mathbf{R}_-^*$, alors $d(x, \mathbf{R}_-^*) = 0$.
Soit à présent $x \in \mathbf{R}_+$. Alors

$$d(x, \mathbf{R}_-^*) = \inf\{|x-t|,\ t \in \mathbf{R}_-^*\} = \inf\{x-t,\ t \in \mathbf{R}_-^*\} = \inf\{x+u,\ u \in \mathbf{R}_+^*\} = \inf]x, +\infty[= x.$$

Le graphe de la fonction $x \mapsto d(x, \mathbf{R}_-^*)$ est donc le suivant :



4. Nous venons de prouver que $d(0, \mathbf{R}_-^*) = 0$. Pourtant, pour tout $a \in \mathbf{R}_-^*$, $|0 - a| = |a| > 0$, et donc il n'existe pas de $a \in \mathbf{R}_-^*$ tel que $d(0, \mathbf{R}_-^*) = |0 - a|$.

5.a. Soit $a \in A$. Alors par l'inégalité triangulaire,

$$|x - a| = |(x - y) + (y - a)| \leqslant |x - y| + |y - a|.$$

Mais puisque $|x-a| \in D_x$, alors par définition d'une borne inférieure[2], on a $d(x, A) \leqslant |x-a|$.
Et donc $d(x, A) \leqslant |x - y| + |y - a| \Leftrightarrow \boxed{d(x, A) - |x - y| \leqslant |y - a|.}$

5.b. Nous venons donc de prouver que $d(x, A) - |x - y|$ est un minorant[3] de l'ensemble D_y.
Mais $d(y, A)$ est le plus grand des tels minorants, donc $d(x, A) - |x - y| \leqslant d(y, A)$.
Et donc $d(x, A) - d(y, A) \leqslant |x - y|$. Le même raisonnement en échangeant les rôles de x et y donnerait $d(y, A) - d(x, A) \leqslant |x - y|$, et donc il vient bien[4]

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant |x - y|.$$

6. Supposons donc que A est dense dans $\mathbf{R}$, et soit $x \in \mathbf{R}$. Alors[5] il existe une suite $(a_n) \in A^{\mathbf{N}}$ telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.
Et donc $|x - a_n| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |x - x| = 0$.
Ainsi, il existe une suite[6] d'éléments de D_x qui tend vers 0. Puisque par ailleurs 0, est un minorant de D_x, par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, $0 = \inf D_x = d(x, A)$.

[1] Sous réserve d'existence, ce qui sera prouvé à la question 1.

[2] C'est en particulier un minorant de D_x.

[3] Notons bien qu'il ne dépend pas du choix d'un $a \in A$.

[4] Rappelons que pour $u \in \mathbf{R}$ et $a \geqslant 0$,
$$|u| \leqslant a \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant a \\ -u \leqslant a \end{cases}$$

[5] C'est la caractérisation séquentielle de la densité.

[6] La suite $(|x - a_n|)_n$.

Inversement, supposons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $d(x, A) = 0$, et prouvons que A est dense dans $\mathbf{R}$.
Soient donc $x < y$ deux réels distincts, et prouvons qu'il existe $t \in A \cap]x, y[$.
Notons $t = \dfrac{x+y}{2}$ le milieu de $[x, y]$, et soit $\varepsilon = y - t = \dfrac{y-x}{2}$.
Puisque $d(t, A) = 0$, par la caractérisation epsilonesque de la borne inférieure, il existe $u \in D_t$ tel que $0 \leqslant u < \varepsilon$.
Et par conséquent il existe $a \in A$ tel que $|t - a| < \varepsilon$.
Et donc $t - \varepsilon < a < t + \varepsilon$, soit encore $x < a < y$.
Nous venons donc de prouver qu'entre deux réels distincts se trouve toujours un élément de A, si bien que $\boxed{A \text{ est dense dans } \mathbf{R}.}$

Remarque
Il serait tout à fait possible d'utiliser des caractérisation séquentielles comme dans l'implication précédente, mais varions un peu les plaisirs.

7.a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$D_{x+1} = \{|x + 1 - n|,\ n \in \mathbf{Z}\} = \{|x - (n-1)|,\ n \in \mathbf{Z}\} = \{|x - n'|,\ n' \in \mathbf{Z}\} = D_x.$$

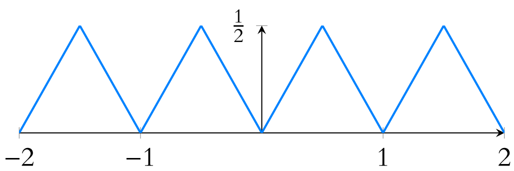
Et donc ces deux ensembles étant égaux, ils ont nécessairement la même borne inférieure : $d(x, \mathbf{Z}) = d(x+1, \mathbf{Z})$.
Donc $\boxed{\text{la fonction } x \mapsto d(x, \mathbf{Z}) \text{ est 1-périodique.}}$

Remarque
La fonction $n \mapsto n - 1$ réalise une bijection de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}$, donc

$$\{n-1,\ n \in \mathbf{Z}\} = \{n', n' \in \mathbf{Z}\}.$$

7.b. Soit $x \in [0, 1]$, et soit $n \in \mathbf{Z}$.
Si $n \geqslant 1$, alors $|x - n| = n - x \geqslant 1 - x \geqslant \min(x, 1-x)$.
Et si $n \leqslant 0$, alors $|x - n| = x - n \geqslant x \geqslant \min(x, 1-x)$.
Donc $\min(x, 1-x)$ est un minorant de D_x. Par ailleurs, $\min(x, 1-x)$ est bien un élément de D_x, puisqu'il est égal soit $x = |x - 0|$, soit à $1 - x = |x - 1|$. C'est donc la borne inférieure de D_x : $d(x, \mathbf{Z}) = \min(x, 1-x)$.

7.c. En particulier, pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $x \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1 - x$, donc $d(x, \mathbf{Z}) = x$.
Et au contraire, pour $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $1 - x \leqslant \frac{1}{2} \leqslant x$, si bien que $d(x, \mathbf{Z}) = 1 - x$.
Ceci permet d'obtenir le graphe de $x \mapsto d(x, \mathbf{Z})$ sur $[0, 1]$. Par 1-périodicité, des translations de vecteurs $k\vec{\imath}$ permettent d'obtenir le reste.



▸ Exercice : parties saturées pour une relation d'équivalence

1. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, et soit $x \in A$. Alors $x \in \mathrm{cl}(x)$, si bien que $x \in s(A)$. Et donc $A \subset s(A)$.
2. Procédons par double implication.
Si $x \in s(A)$, alors il existe $t \in A$ tel que $x \in \mathrm{cl}(t)$.
Mais alors $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(t)$ si bien que $t \in \mathrm{cl}(x) \cap A$, qui se trouve donc être non vide.

Détails
Rappelons que deux classes d'équivalence sont soit disjointes, soit égales. Donc si x_1, x_2 sont deux éléments qui appartiennent à une même classe d'équivalence $\mathrm{cl}(t)$, alors $t \in \mathrm{cl}(x_1) \cap \mathrm{cl}(x_2)$, si bien que $\mathrm{cl}(x_1) = \mathrm{cl}(x_2)$.

Inversement, supposons que $\mathrm{cl}(x) \cap A \neq \emptyset$, et soit donc $t \in \mathrm{cl}(x) \cap A$.
Alors $t \sim x$, et donc $x \in \mathrm{cl}(t)$, où t est un élément de A.
Donc $x \in \displaystyle\bigcup_{y \in A} \mathrm{cl}(y) = s(A)$.
Par double implication, on a donc bien prouvé que $x \in s(A) \Leftrightarrow \mathrm{cl}(x) \cap A \neq \emptyset$.
3. Par la question précédente, on a déjà $s(A) \subset s(s(A))$, et il s'agit donc de prouver l'inclusion réciproque.

Soit donc $x \in s(s(A))$. Par la question précédente, $\mathrm{cl}(x) \cap s(A) \neq \emptyset$.
Donc il existe $t \in \mathrm{cl}(x)$ tel que $t \in s(A)$.
Et alors, toujours par la question précédente, $\mathrm{cl}(t) \cap A \neq \emptyset$.
Mais puisque $t \in \mathrm{cl}(x)$, $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(t)$, et donc $\mathrm{cl}(x) \cap A \neq \emptyset$.
On en déduit[7] que $x \in s(A)$.
Nous avons donc bien prouvé que $s(s(A)) \subset s(A)$, et donc par double inclusion, $s(s(A)) = A$.

[7] Une fois de plus, grâce à la question précédente.

4. Soit A une partie de E.
Supposons que A soit saturée, soit $x \in A$, et soit $t \in \mathrm{cl}(x)$. Alors[8], $t \in s(A) = A$. Et donc ceci prouve bien que $\mathrm{cl}(x) \subset A$.

[8] Par définition de $s(A)$.

Inversement, supposons que pour tout $x \in A$, $\mathrm{cl}(x) \subset A$.
Soit alors $x \in s(A)$. Il existe donc $t \in A$ tel que $x \in \mathrm{cl}(t)$.
Mais $\mathrm{cl}(t) \subset A$, si bien que $x \in A$, et donc $s(A) \subset A$. L'inclusion réciproque ayant déjà été vérifiée à la question 1, $s(A) = A$, et donc A est saturée.

5.a. Soit $x \in E$. Alors $f(x) = f(x)$, si bien que $x \sim_f x$, donc $\sim_f$ est réflexive.
Soient $x, x' \in E$ tels que $x \sim_f x'$. Alors $f(x) = f(x')$, si bien que $f(x') = f(x)$, et donc $x' \sim_f x$. Donc $\sim_f$ est symétrique.
Enfin, soient x, x', x'' tels que $x \sim_f x'$ et $x' \sim_f x''$. Alors $f(x) = f(x')$ et $f(x') = f(x'')$, si bien que $f(x) = f(x'')$ et donc $x \sim_f x''$. Donc $\sim_f$ est transitive.
Par conséquent, $\boxed{\sim_f \text{ est une relation d'équivalence sur } E.}$

5.b. Nous allons prouver que les classes d'équivalence de f sont toutes des singletons si et seulement si f est injective.
Supposons f injective, soit $x \in E$, et soit $x' \in \mathrm{cl}(x)$. Alors $x' \sim x$ si bien que $f(x) = f(x')$, et donc par injectivité de f, $x = x'$. Ainsi, $\mathrm{cl}(x) \subset \{x\}$, et l'inclusion réciproque étant évidente[9], on a bien $\mathrm{cl}(x) = \{x\}$. Donc toutes les classes d'équivalence de $\sim$ sont des singletons.

[9] Un élément appartient toujours à sa propre classe d'équivalence.

Inversement, supposons que toutes les classes d'équivalence soient des singletons, et soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $x \sim x'$, si bien que $x' \in \mathrm{cl}(x)$. Or par hypothèse, $\mathrm{cl}(x)$ est un singleton, et puisqu'elle contient x, nécessairement $\mathrm{cl}(x) = \{x\}$. Et donc $x' \in \{x\} \Leftrightarrow x' = x$. Et donc f est injective.

5.c. Soit $x \in E$. Alors pour tout $x' \in E$, on a

$$x' \in \mathrm{cl}(x) \Leftrightarrow f(x') = f(x) \Leftrightarrow x' \in f^{-1}(\{f(x)\}).$$

Et donc $\mathrm{cl}(x) = f^{-1}(\{f(x)\})$.
Puisque par ailleurs $\{f(x)\} = f(\{x\})$, on a donc bien $\boxed{\mathrm{cl}(x) = f^{-1}(f(\{x\})).}$

5.d. Soit A une partie de E.
Notons qu'on a toujours $A \subset f^{-1}(f(A))$ puisque pour tout $x \in A$, $f(x) \in f(A)$, si bien que $x \in f^{-1}(f(A))$.
Il s'agit donc ici de prouver que A est saturée si et seulement si $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Supposons dans un premier temps que A soit saturée, et soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Alors $f(x) \in f(A)$, si bien qu'il existe $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$.
Et donc $x \sim y$, si bien que $x \in \mathrm{cl}(y)$. Or d'après la question 4, si A est saturée et que $y \in A$, alors $\mathrm{cl}(y) \subset A$. On en déduit donc que $x \in A$, si bien que $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Inversement, supposons que $f^{-1}(f(A)) = A$, et prouvons que A est saturée. Soit alors $x \in A$. Alors $f(\{x\}) \subset f(A)$, et donc $f^{-1}(f(\{x\})) \subset f^{-1}(f(A))$.
Et ainsi, $\mathrm{cl}(x) \subset A$.
Donc pour tout $x \in A$, $\mathrm{cl}(x) \subset A$, si bien que par la question 4, A est une partie saturée de E.

Remarque
On a utilisé ici le fait que si $A \subset B$, alors $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$. Je vous laisse le soin de le vérifier si vous n'en êtes pas convaincu.

▸ Exercice 3 : étude d'une suite

1. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a donc $\ln(v_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.
Or il est bien connu que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $\ln(1+x) \leqslant x$, si bien que

$$\ln(v_n) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \leqslant 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leqslant 2.$$

Et donc par croissance de exp, $\boxed{v_n \leqslant e^2.}$

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$|u_{n+2}| \leqslant |u_{n+1}| + \left|\frac{u_n}{2^n}\right| \leqslant m_n + \frac{m_n}{2^n} \leqslant \left(1+\frac{1}{2^n}\right) m_n.$$

Puisque par ailleurs $|u_{n+1}| \leqslant m_n \leqslant \left(1+\frac{1}{2^n}\right) m_n$, on a bien $\boxed{m_{n+1} = \max(|u_{n+1}|, |u_{n+2}|) \leqslant \left(1+\frac{1}{2^n}\right) m_n.}$

3. Une récurrence facile utilisant la question précédente prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $m_n \leqslant \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) m_0$, et donc $m_n \leqslant v_n m_0$.

En utilisant la question 1, il vient donc $\boxed{m_n \leqslant e^2 m_0.}$

En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n| \leqslant m_n \leqslant e^2 m_0$, si bien que $\boxed{(u_n) \text{ est bornée.}}$

4. Notons que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$|u_{k+1} - u_k| = \left|u_k + \frac{u_{k-1}}{2^{k-1}} - u_k\right| = \left|\frac{u_{k-1}}{2^{k-1}}\right| \leqslant \frac{m_k}{2^{k-1}}.$$

Soit alors φ une extractrice et $n \in \mathbf{N}^*$. Nous savons alors que $\varphi(n) \geqslant n$. Posons donc $p = \varphi(n) - n$, de sorte que

$$\begin{aligned}
|u_{\varphi(n)} - u_n| = |u_{n+p} - u_n| &= \left|\sum_{k=0}^{p-1}(u_{n+k+1} - u_{n+k})\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} |u_{n+k+1} - u_{n+k}| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \frac{m_{n+k}}{2^{n+k-1}} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \frac{e^2 m_0}{2^{n+k-1}} \\
&\leqslant e^2 m_0 \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+k-1}} \leqslant \frac{e^2 m_0}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} \\
&\leqslant e^2 m_0 \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} \\
&\leqslant e^2 m_0 \frac{1}{2^{n-1}} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^p\right) \leqslant \boxed{\frac{e^2 m_0}{2^{n-2}}.}
\end{aligned}$$

Somme télescopique.

Inégalité triangulaire.

Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

5. Puisque (u_n) est bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass[10], il existe une extractrice $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que $(u_{\varphi(n)})_n$ converge vers un complexe ℓ.

Et alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|u_{\varphi(n)} - u_n| \leqslant \frac{e^2 m_0}{2^{n-2}}$.

Par le théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} |u_{\varphi(n)} - u_n| = 0$.

Et donc en particulier, $u_{\varphi(n)} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit alors que $u_n = u_n - u_{\varphi(n)} + u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \ell = \ell$.

Et donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers le complexe } \ell.}$

[10] Version complexe.

Rappel
Une suite (u_n) tend vers 0 si et seulement si $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

► Exercice 4 : une équation fonctionnelle

1.a. En prenant $x = y = 0$ dans la relation vérifiée par f, il vient $\boxed{f(0) = 0.}$

De même, avec $x = y = 1$, $f(1) = f(1) + f(1)$, donc $\boxed{f(1) = 0.}$

Et enfin pour $x = y = -1$, $f(1) = -2f(-1)$, si bien que $\boxed{f(-1) = 0.}$

1.b. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $f(-x) = f((-1)\cdot x) = -f(x) + xf(-1) = -f(x)$.
Et donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

2.a. Fixons un réel $x \in \mathbf{R}_+^*$, de sorte que pour tout $y \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x,y) = xf(y) + yf(x)$.
Dérivons alors cette relation par rapport à y : il vient donc, pour tous $x, y \in \mathbf{R}_+^*$, $xf'(xy) = f(x) + xf'(y)$.
En particulier, pour $y = 1$, il vient, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $xf'(x) - f(x) = xf'(1)$.
Donc si on pose $\lambda = f'(1)$, qui est bien une constante, f est bien solution de l'équation différentielle (E_λ).

2.b. Notons que sur $\mathbf{R}_+^*$, la forme normalisée de (E_λ) est $y' - \dfrac{y}{x} = \lambda$.
L'équation homogène associée à (E_λ) est $y' - \dfrac{y}{x} = 0$, dont l'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \mu x,\ \mu \in \mathbf{R}\}$.

Cherchons alors une solution particulière sous la formen $y : x \mapsto \mu(x)x$, avec $\mu : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ dérivable.
Alors y est solution de (E_λ) si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\mu'(x)x + \mu(x) - \mu(x) = \lambda \Leftrightarrow \mu'(x) = \frac{\lambda}{x}.$$

Donc $x \mapsto \lambda x \ln(x)$ est une solution particulière de (E_λ), si bien que l'ensemble des solutions de (E_λ) est $\left\{x \mapsto \mu x + \lambda x \ln(x),\ \mu \in \mathbf{R}\right\}$.

2.c. Notons que f n'est pas n'importe quelle solution de (E_λ) : elle vérifie la condition initiale $f(1) = 0$.
Donc cela suffit à déterminer entièrement f : il existe $\mu \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \mu x + \lambda x \ln(x)$.
Et puisque $f(1) = 0$, $\mu = 0$, de sorte que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \lambda x \ln(x)$.
Et alors pour $x < 0$, par imparité de f, $f(x) = -f(-x) = -\lambda(-x)\ln(-x) = \lambda x \ln|x|$.

On a donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.}$

3.a. Rappelons qu'on a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.
Puisque $f \in \mathscr{E}$, alors pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $f(xy) = xf(y) + yf(x)$.
En particulier, il vient, à l'aide du changement de variable $t = xu$, donc $dt = xdu$

$$\begin{aligned} F(xy) &= \int_0^{xy} f(t)\,dt = \int_0^y f(xu)\,xdu = x\int_0^y (xf(u) + uf(x))\,du \\ &= x\int_0^y xf(u)\,du + x\int_0^y uf(x)\,du = x^2F(y) + xf(x)\int_0^y u\,du \\ &= \boxed{x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x).} \end{aligned}$$

3.b. Donc pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, $F(x) = x^2F(1) + \dfrac{x}{2}f(x)$, si bien que

$$f(x) = \frac{2}{x}\left(F(x) - x^2F(1)\right).$$

La fonction F étant dérivable[11] sur $\mathbf{R}_+^*$, par somme et quotient de fonctions dérivables, on a donc f qui est également dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.

[11] C'est une primitive de f.

4. Par la question 3, toutes les fonctions de $\mathscr{E}$ sont dérivables sur $\mathbf{R}_+^*$, et donc de la forme obtenue à la question 2.
Autrement dit, si $f \in \mathscr{E}$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $f : x \mapsto \begin{cases} \lambda x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Inversement, soit $\lambda \in \mathbf{R}$, et soit $f_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \lambda x \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
Il est clair que f_λ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car produit de fonctions qui le sont. Donc f_λ est

continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Le même raisonnement vaut sur $\mathbf{R}_-^*$.
Par ailleurs, en procédant au changement de variable $X = \frac{1}{x}$, avec $X \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ on a

$$x\ln(x) = \frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{\ln(X)}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

si bien que $\lim\limits_{x\to 0^+} f_\lambda(x) = 0 = f_\lambda(0)$.
Et par imparité de f_λ, $\lim\limits_{x\to 0^-} f_\lambda(x) = 0 = f_\lambda(0)$.
Et donc $\lim\limits_{x\to 0} f_\lambda(x) = f_\lambda(0)$, donc f_λ est continue en 0 et donc sur $\mathbf{R}$.

Enfin, pour $x\in\mathbf{R}$ et $y = 0$, $f_\lambda(x\times 0) = 0 = 0f_\lambda(x) + xf_\lambda(0)$, et pour $x, y\in\mathbf{R}^*$,

$$f_\lambda(xy) = \lambda xy\ln(|xy|) = \lambda xy\left(\ln(|x|)+\ln(|y|)\right) = y(\lambda x\ln|x|)+x(\lambda y\ln|y|) = yf_\lambda(x)+xf_\lambda(y).$$

Et donc pour tout $x, y\in\mathbf{R}$, $f_\lambda(xy) = xf_\lambda(y) + yf_\lambda(x)$.
Ceci achève de prouver que $f_\lambda\in\mathscr{E}$.

Et donc $\boxed{\mathscr{E} = \left\{x\mapsto \begin{cases}\lambda x\ln|x| & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x = 0\end{cases},\ \lambda\in\mathbf{R}\right\}.}$.

► Hors barême

1. Soit $n\in\mathbf{N}$. Alors $\{u_k, k\geqslant n+1\}\subset\{u_k, k\geqslant n\}$.
Par ailleurs, si M est un majorant de (u_n), alors pour tout $k\geqslant n$, $u_k\leqslant M$, si bien que $\{u_k,\ k\geqslant n\}$ est majoré par M.
Donc il possède une borne supérieure, et donc $\boxed{v_n \text{ est bien défini.}}$
Et alors v_n est un majorant de $\{u_k,\ k\geqslant n+1\}$, et donc est supérieur ou égal[12] à $\sup\{u_k,\ k\geqslant n+1\} = v_{n+1}$.
Autrement dit, $v_{n+1}\leqslant v_n$, donc (v_n) est décroissante.

Enfin, si m est un minorant de (u_n), alors pour tout $n\in\mathbf{N}$ $m\leqslant u_n\leqslant v_n$, si bien que (v_n) est minorée par m.
Par le théorème de la limite monotone, (v_n) étant décroissante et minorée, $\boxed{\text{elle converge.}}$

2. Soit φ une extractrice telle que $(u_{\varphi(n)})$ converge. Alors pour tout $n\in\mathbf{N}$, $\varphi(n)\geqslant n$, si bien que $u_{\varphi(n)}\in\{u_k,\ k\geqslant n\}$, et donc $u_{\varphi(n)}\leqslant v_n$.
Donc par passage à la limite[13], on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}\leqslant \ell$.

3. Posons $\varphi(0) = 0$.
Puisque $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, il existe $n_0\in\mathbf{N}^*$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$, $\ell\leqslant v_n < \ell+1$.
Mais alors $v_{n_0}-1$ n'est pas un majorant[14] de $\{u_k,\ k\geqslant n_0\}$ donc il existe $n_1\geqslant n_0$ tel que $\ell - 1 <\leqslant v_{n_0} - 1 < u_{n_1} < v_n < \ell+1$.
Posons donc $\varphi(1) = n_1$, de sorte que $\ell-1\leqslant u_{\varphi(1)}\leqslant \ell+1$.
Supposons donc avoir construit $\varphi(0),\dots,\varphi(p)$.
Alors il existe $n_0\in\mathbf{N}^*$ tel que pour $n\geqslant n_0$, $\ell\leqslant v_n < \ell+\frac{1}{p+1}$.
Quitte à remplacer n_0 par $\max(n_0, \varphi(p)+1)$, on peut supposer $n_0 > \varphi(p)$.
Alors $v_{n_0} - \frac{1}{p+1}$ n'est pas un majorant de $\{u_k,\ k\geqslant n_0\}$, donc il existe $n_1\geqslant n_0$ tel que $v_{n_0} - \frac{1}{p+1} < u_{n_1}\leqslant v_{n_0}$.
Et donc en particulier, $\ell - \dfrac{1}{p+1}\leqslant u_{n_1}\leqslant \ell+\dfrac{1}{p+1}$. Posons alors $\varphi(p+1) = n_1$, qui, par construction, est supérieur strict à $\varphi(p)$.
Par récurrence, on construit donc une suite $(\varphi(p))_{p\in\mathbf{N}}$, strictement croissante, telle que pour tout $p\in\mathbf{N}$, $\ell - \dfrac{1}{p+1}\leqslant u_{\varphi(p)}\leqslant \ell+\dfrac{1}{p+1}$.
Par le théorème des gendarmes, on a donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.}$

[12] Rappelons que la borne sup est le plus petit des majorants.

[13] Ce qui est justifié puisque $(u_{\varphi(n)})$ converge, de même que (v_n).

[14] La borne sup est le plus petit des majorants.

Remarque

On a donc donné une autre preuve de Bolzano-Weierstrass puisqu'on a construit une suite extraite de (u_n) qui converge.