Devoir surveillé 2

▸ Exercice 1 : fonctions usuelles — 1h

Les questions 1 et 2 sont indépendantes

1. **a.** Prouver que la fonction th réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
Dans la suite, on note Argth *la bijection réciproque de* th.

b. Justifier que Argth est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.

c. À l'aide de la question précédente, prouver que pour tout $x \in I$, $\operatorname{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

2. **a.** Prouver que $\dfrac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{2} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{7}$ $(\star)$.

b. Soient p, q, r trois réels positifs vérifiant $p \neq 0$ et $1 + p^2 = qr$.

i. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{p+r} \neq \dfrac{\pi}{2}$.

ii. Calculer alors $\tan\left(\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{p+r}\right)$.

iii. En déduire que $\operatorname{Arctan}\dfrac{1}{p} = \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{p+r}$.
Cette formule est connue sous le nom de formule de Dodgson, mais aussi sous le nom de formule de Lewis Caroll, le révérend Dodgson (1831–1898) étant davantage passé à la postérité sous le pseudonyme qu'il a utilisé pour écrire Alice au pays des merveilles.

c. En partant de la formule $(\star)$ et en utilisant la formule de Dodgson, prouver les deux formules suivantes :

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7} + 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{8}.$$

▸ Problème 1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Hardy — 1h30

Partie I. Inégalité de Cauchy-Schwarz

1. Dans cette question, on considère $n \in \mathbf{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des réels.

a. Prouver que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = 2\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2$.

b. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.$$

Partie II. Inégalité de Hardy

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $S_k = a_1 + \cdots + a_k = \displaystyle\sum_{p=1}^k a_p$.

Le but de cette partie est de prouver l'inégalité de Hardy : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} \leqslant 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$, soit encore que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}.$$

2. Dans cette question, et **dans cette question seulement**, on suppose que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_k = k(k+1)$.
   a. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, calculer S_k.
   b. En notant que pour $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.
   c. Prouver alors que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.
3. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,
$$\left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right)\left(\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right) \geqslant \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$
4. En déduire que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{k}{S_k} \leqslant \dfrac{4}{k(k+1)^2} \displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}$.
5. Prouver alors que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4 \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{a_p} \left(\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}\right)$.
6. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\dfrac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$.
7. En déduire l'inégalité de Hardy. Dans quel cas est-ce une égalité ?

▸ Problème 2 : Inégalité de Fejér-Jackson — *1h30*

Le but de ce problème est de prouver l'inégalité de Fejér-Jackson, qui affirme que :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in]0,\pi[,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} > 0.$$

Dans tout le problème, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $f_n : \left|\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \end{array}\right.$, et on note (FJ_n) la proposition :
«$\forall x \in]0,\pi[,\ f_n(x) > 0$.»

Partie I. Préliminaires trigonométriques

1. a. Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $\sin(2x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
   b. En déduire que les assertions (FJ_1), (FJ_2) et (FJ_3) sont vraies.
2. Soit $x \in]0,\pi[$.
   a. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

Partie II. Préliminaires analytiques

3. Dans cette question, on considère deux réels $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $[a,b]$. On suppose de plus que f' est continue sur $[a,b]$, et que f' s'annule en exactement (c'est-à-dire ni plus ni moins) r points de $[a,b]$, avec $r \in \mathbf{N}$.
   On note $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$ ces points où f' s'annule, et on note $x_0 = a$ et $x_{r+1} = b$. On notera qu'on peut éventuellement avoir $x_0 = x_1$ ou $x_r = x_{r+1}$ dans le cas où f' s'annule en a ou en b.
   a. Justifier que pour tout $i \in [\![0,r]\!]$, f est strictement monotone sur $[x_i, x_{i+1}]$.
   b. En déduire que f possède un minimum m sur $[a,b]$, atteint en l'un des x_i, $0 \leqslant i \leqslant r+1$, et que pour $x \in [a,b]$, $x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_{r+1}\} \Rightarrow f(x) > m$.

Partie III. Preuve de l'inégalité de Fejér-Jackson

Dans toute la suite, on cherche à prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, (FJ_n) est vraie.
Nous avons (largement) initialisé notre récurrence à la question 1.b, et il s'agit donc de prouver l'hérédité.
Dans toute cette partie, n est un entier fixé, supérieur ou égal à 2, pour lequel on suppose que (FJ_{n-1}) est vraie, et on cherche alors à prouver que (FJ_n) est vraie.

4. Justifier que f_n est dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'une somme.

5. Soit $\theta \in]0, \pi[$ tel que $f_n'(\theta) = 0$.

- **a.** Montrer, à l'aide de la question 2 que $\sin\left(n\theta + \dfrac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
- **b.** En déduire que $\sin(n\theta) = 0$ **ou** $\sin(n\theta) = \sin(\theta)$.
- **c.** Prouver alors que $f_n(\theta) \geqslant f_{n-1}(\theta)$.

6. Montrer que f_n' s'annule un nombre fini de fois sur $[0, \pi]$.

7. À l'aide de la partie II, terminer la preuve de (FJ_n).

▸ Hors barème : optimalité asymptotique de la constante dans l'inégalité de Hardy

Cette partie, hors barème, n'est à aborder que si vous avez très bien réussi tout le reste.
On reprend le contexte de la partie II du problème 1, et on souhaite prouver que la constante 2 du membre de droite de l'inégalité de Hardy est optimale.
Dans la suite, on considère $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et tous réels strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + a_2 + \cdots + a_k} \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- **a.** Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $e^{H_n} \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
- **b.** En déduire que $H_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. En utilisant la suite $(a_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ définie par : $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $a_k = k$, prouver que $\lambda \geqslant 2$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 2

▸ Exercice 1 : fonctions usuelles

1.a. D'après le cours, th est dérivable donc continue, strictement croissante[1], et $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{th}(x) = 1$.

Donc par le théorème de la bijection, $\boxed{\text{th réalise une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur }]-1,1[.}$

[1] Car sa dérivée, qui est $\frac{1}{\text{ch}^2}$ est strictement positive.

1.b. Pour $x \in]-1,1[$ tel que $\text{th}'(\text{Argth}(x)) \neq 0$, Argth est dérivable en x.
Mais nous avons déjà dit que th′ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, donc Argth est dérivable sur $]-1,1[$ tout entier. On a alors, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\text{Argth}'(x) = \frac{1}{\text{th}'(\text{Argth}(x)} = \frac{1}{1-\text{th}^2\left(\text{Argth}(x)\right)^2} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}.}$$

1.c. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{array} \right.$.

Alors pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$.
Donc f est dérivable car somme de fonctions qui le sont, et

$$\forall x \in]-1,1[,\ f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Donc f est une primitive de Argth′ sur $]-1,1[$.
Or Argth est évidemment une primitive de Argth′. Donc ces deux fonctions diffèrent d'une constante[2] : soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $\text{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \lambda$.
En particulier, en évaluant en $x = 0$, il vient $\lambda = \text{Argth}(0)$.
Et puisque $\text{th}(0) = 0$, $\text{Argth}(0) = 0$, si bien que $\lambda = 0$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1,1[,\ \text{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right).}$

[2] Car $]-1,1[$ est un intervalle.

2.a. On a $\tan\left(2\text{Arctan}\frac{1}{2}\right) = \dfrac{2\tan\left(\text{Arctan}\frac{1}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\text{Arctan}\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

Et donc, toujours à l'aide de la formule d'addition pour la tangente,

$$\begin{aligned}\tan\left(2\,\text{Arctan}\frac{1}{2} - \text{Arctan}\frac{1}{7}\right) &= \frac{\tan\left(2\,\text{Arctan}\frac{1}{2}\right) - \tan\left(\text{Arctan}\frac{1}{7}\right)}{1+\tan\left(2\,\text{Arctan}\frac{1}{2}\right)\tan\left(\text{Arctan}\frac{1}{7}\right)} \\ &= \frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{3}\frac{1}{7}} \\ &= \frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}} = 1.\end{aligned}$$

Rappel

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a \tan b}{1-\tan a \tan b}.$$

Par ailleurs, $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$, donc par croissance de l'arctangente, $0 < \text{Arctan}\,\frac{1}{2} < \text{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$.
Et puisque $0 \leqslant \text{Arctan}\,\frac{1}{7} \leqslant \frac{\pi}{2}$, on en déduit que

$$-\frac{\pi}{2} < 2\,\text{Arctan}\,\frac{1}{2} - \text{Arctan}\,\frac{1}{7} < \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit donc que $\boxed{2\,\text{Arctan}\,\frac{1}{2} - \text{Arctan}\,\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}.}$

2.b.i. Supposons par l'absurde que $\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{p+r} = \frac{\pi}{2}$.

Alors $\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+q} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{p+r} = \operatorname{Arctan}(p+r)$.

Mais par stricte croissance de l'arctangente, on a alors

$$\frac{1}{p+q} = p+r \Leftrightarrow 1 = (p+q)(p+r) \Leftrightarrow 1 = p^2 + pq + pr + qr.$$

Mais $qr = 1 + p^2$, donc ceci est équivalent à $1 = p^2 + pq + p^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = p(2p+q+r)$, ce qui est absurde puisque p, q, r sont strictement positifs.

On en déduit donc que $\boxed{\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{q+r} \neq \frac{\pi}{2}.}$

Rappel
Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$,
$$\operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{x}.$$

2.b.ii. Nous pouvons donc[3] appliquer la formule d'addition de la tangente :

$$\tan\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{p+r}\right) = \frac{\frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+r}}{1 - \frac{1}{p+q}\frac{1}{p+r}}$$
$$= \frac{\frac{2p+q+r}{(p+q)(p+r)}}{\frac{(p+q)(p+r)-1}{(p+q)(p+r)}} = \frac{2p+q+r}{p^2+pq+pr+qr-1}$$
$$= \frac{2p+q+r}{2p^2+pq+pr} = \frac{2p+q+r}{p(2p+q+r)} = \boxed{\frac{1}{p}.}$$

[3] Rappelons que la formule pour $\tan(a+b)$ vaut dès que $\tan a, \tan b$ et $\tan(a+b)$ sont bien définis, c'est-à-dire lorsque $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $a+b \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Pour la première égalité, on a utilisé
$$qr = 1 + p^2.$$

2.b.iii. Puisque $\frac{1}{p+q} \geqslant 0$, $\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+q} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et de même $\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+r} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc $\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{p+r} \in [0, \pi[$.

Mais par ailleurs, sa tangente est positive, comme le montre la question précédente, donc on ne peut avoir $\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{q+r} \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Et donc $\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{q+r} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Puisque sa tangente vaut $\frac{1}{p}$, c'est donc que

$$\boxed{\operatorname{Arctan} \frac{1}{p+q} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{p+r} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{p}.}$$

2.c. On a $1 + 2^2 = 1 \times 5$. Donc par la formule de Dodgson, avec $p = 2, q = 1$ et $r = 5$,

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{2} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{2+1} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{2+5} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7}.$$

Et donc en repartant de $(\star)$,

$$\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + 2\operatorname{Arctan} \frac{1}{7} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \boxed{2\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7}.}$$

De même, $1 + 3^2 = 10 = 2 \times 5$, donc

$$\operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{3+2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3+5} = \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$$

si bien que

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2\operatorname{Arctan} \frac{1}{8}.}$$

▸ Problème 1 : inégalités de Cauchy-Schwarz et Hardy

S

Partie I. Inégalité de Cauchy-Schwarz

1.a. On a

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_iy_j-x_jy_i)^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(x_i^2y_j^2-2x_ix_jy_iy_i+x_i^2y_j^2\right)\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_i^2y_j^2-2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_ix_jy_iy_j+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}x_j^2y_i^2\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i^2y_j^2-2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_ix_jy_j+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_j^2y_j^2\\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)-2\sum_{i=1}^n x_iy_i\left(\sum_{j=1}^n x_jy_j\right)+\sum_{i=1}^n y_i^2\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\\ &= \left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)-2\left(\sum_{j=1}^n x_jy_j\right)\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)+\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)\\ &= \boxed{2\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)-2\left(\sum_{k=1}^n x_ky_k\right)^2.}\end{aligned}$$

Détails
Dans la première somme, on a sorti (par linéarité) la constante $\sum_{j=1}^n y_j^2$. Et de même pour les autres sommes.

Remarque : on pouvait aller plus vite en se souvenant qu'il a été dit en cours que $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ib_j=\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j\right)$, résultat qu'on a reprouvé ici (avec $a_i=x_i^2$ et $b_j=y_j^2$).

1.b. Puisqu'il est clair que $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(x_iy_j-x_jy_i)^2\geqslant 0$, car somme de termes positifs, on a donc

$$2\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)-2\left(\sum_{k=1}^n x_ky_k\right)^2\geqslant 0$$

soit encore

$$\left(\sum_{k=1}^n x_ky_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right).$$

Et donc en passant à la racine[4] des deux côtés,

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^n x_ky_k\right|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}.}$$

[4] Ce qui préserve les inégalités puisque la fonction racine est croissante.

Partie II. Inégalité de Hardy

2.a. Il vient donc, pour $k\in[\![1,n]\!]$,

$$S_k=\sum_{p=1}^k p(p+1)=\sum_{p=1}^k p^2+\sum_{p=1}^k p=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)}{6}(2k+1+3)=\boxed{\frac{k(k+1)(k+2)}{3}}.$$

2.b. On a donc, pour $n\in\mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^n\left(\frac1k-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Détails
On a reconnu une somme télescopique.

2.c. Grâce aux calculs précédents, on a

$$\sum_{k=1}^n\frac{k}{S_k}=\sum_{k=1}^n\frac{3}{(k+1)(k+2)}=3\sum_{k=1}^n\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Mais comme précédemment, on a $\dfrac{1}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+2}$, et donc on a de nouveau affaire à une somme télescopique

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}.$$

Donc il s'agit de prouver que

$$3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

soit encore[5] que

$$\frac{3}{2}\frac{n}{n+2} \leqslant \frac{2n}{n+1} \Leftrightarrow 3(n+1) \leqslant 4(n+2)$$

ce qui est évidemment vrai.

Donc on a bien $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}.}$

[5] Après mise au même dénominateur.

Méthode

Pourquoi avoir choisi ces valeurs de x_p et y_p ? Tout simplement pour que $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} x_p^2$ et $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} y_p^2$, qui sont les sommes apparaissant dans l'inégalité de Cauchy-Scwharz soient égales à celles qui apparaissent dans l'énoncé de la question.

3. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec pour tout $p \in [\![1, k]\!]$, $x_p = \sqrt{a_p}$ et $y_p = \dfrac{p}{\sqrt{a_p}}$.

Il vient alors

$$\left|\sum_{p=1}^{k} x_p y_p\right| \leqslant \sqrt{\sum_{p=1}^{k} x_p^2}\sqrt{\sum_{p=1}^{k} y_p^2} \Leftrightarrow \left|\sum_{p=1}^{k} p\right| \leqslant \sqrt{\sum_{p=1}^{k} a_p}\sqrt{\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}}.$$

Puisque tous les termes sont positifs, par croissance de la fonction carré sur $\mathbf{R}_+$, on en déduit que

$$\left(\sum_{p=1}^{k} p\right)^2 \leqslant \left(\sum_{p=1}^{k} a_p\right)\left(\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right).$$

Et donc en notant que $\displaystyle\sum_{p=1}^{k} p = \frac{k(k+1)}{2}$, on a bien l'inégalité annoncée.

4. L'inégalité que nous venons de prouver s'écrit encore $k\dfrac{k(k+1)^2}{4} \leqslant S_k \left(\displaystyle\sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}\right)$.

Et donc

$$\boxed{\frac{k}{S_k} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}.}$$

5. Sommons les inégalités précédemment obtenues pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{S_k} \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \sum_{p=1}^{k} \frac{p^2}{a_p}.$$

Soit encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{S_k} \leqslant 4\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p}$.

Mais on peut alors intervertir les sommes :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{k} \frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p} = \sum_{1 \leqslant p \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p} = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}\frac{p^2}{a_p} = \sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{a_p}\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}.$$

Et donc on a bien l'inégalité demandée.

6. Notons que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \geqslant \frac{2k}{k^2(k+1)^2} \geqslant \frac{2}{k(k+1)^2}.$$

7. Pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, on a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=p}^{n}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2p^2}.\end{aligned}$$

Somme télescopique.

Et donc il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4\sum_{p=1}^{n} \frac{p^2}{a_p}\frac{1}{2p^2} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}.$$

Ce qui achève donc la preuve de l'inégalité de Hardy.

En aucun cas il ne peut y avoir égalité, puisque l'inégalité $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \leqslant \frac{1}{2p^2}$ est toujours stricte.

▸ Problème 2 : inégalité de Fejér-Jackson

Partie I. Préliminaires trigonométriques

1.a. On a $\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).}$ Et

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x+x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + (1-2\sin^2(x))\sin(x)\\ &= 2\sin(x)(1-\sin^2(x)) + \sin(x) - 2\sin^3(x) = \boxed{3\sin(x) - 4\sin^3(x).}\end{aligned}$$

1.b. Il est évident que (FJ_1) est vraie puisque $\forall x \in]0,\pi[,\ \sin(x) > 0$.
De ce qui précède, on déduit que pour $x \in [0,\pi]$,

$$f_2(x) = \sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} = \boxed{\sin(x)(1+\cos(x)).}$$

Pour $x \in]0,\pi[$, $\sin(x) > 0$ et $\cos x > -1$, donc $\sin(x)(1+\cos(x)) > 0$. Donc (FJ_2) est vraie.
Enfin,

$$\begin{aligned}f_3(x) &= \sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3}\\ &= \sin(x)\left(1+\cos(x)+1-\frac{4}{3}\sin^2(x)\right) = \sin(x)\left(2+\cos(x)-\frac{4}{3}\left(1-\cos^2(x)\right)\right)\\ &= \boxed{\sin(x)\left(\frac{2}{3}+\cos(x)+\frac{4}{3}\cos^2(x)\right).}\end{aligned}$$

Puisque le discriminant de $t \mapsto \frac{4}{3}t^2 + t + \frac{2}{3}$ vaut $\Delta = 1 - \frac{32}{9} < 0$, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\frac{4}{3}t^2 + t + \frac{2}{3} > 0$ et donc en particulier, pour tout $x \in]0,\pi[$, $\frac{4}{3}\cos^2(x) + \cos x + \frac{2}{3} > 0$.
Puisque pour tout $x \in]0,\pi[$, $\sin(x) > 0$, on en déduit que $\forall x \in]0,\pi[,\ f_3(x) > 0$, et donc (FJ_3) est vraie.

2.a. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x) = \sin\left(x+\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}-x\right) = \sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Rappel

On a

$2\sin(a)\cos(b)$
$= \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

Et donc $\cos(x) = \sum_{k=1}^{1}\cos(kx) = \dfrac{\sin\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.
Donc la récurrence est initialisée.

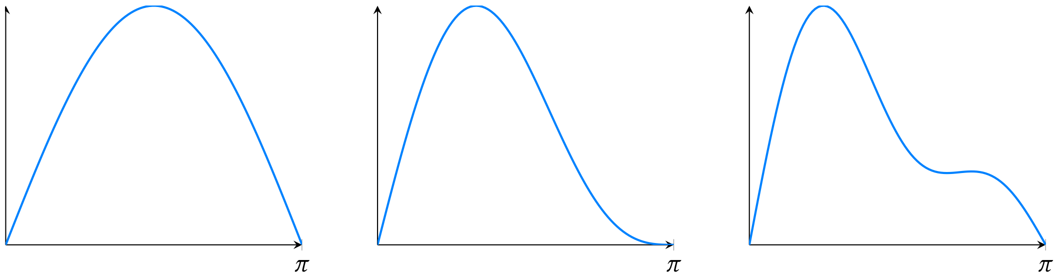

FIGURE 0.1 – Les fonctions f_1, f_2 et f_3.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \cos(kx) &= \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) + \cos((n+1)x) \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \cos((n+1)x) \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos((n+1)x)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\left(\frac{1}{2}-n-1\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Rappel
On utilise encore la formule pour $\sin a \cos b$.

Donc la propriété est héréditaire, si bien que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$.

2.b. Il suffit de noter, toujours à l'aide de la formule pour $\sin(a)\cos(b)$ que

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) &= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(\frac{n}{2}+\frac{n+1}{2}\right)x\right) + \sin\left(\frac{n}{2}x - \frac{n+1}{2}x\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

Et donc on a bien

$$\boxed{\frac{\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).}$$

Partie II. Préliminaires analytiques

3.a. Soit $i \in [\![0, r]\!]$. Puisque f' est continue, et qu'elle ne s'annule pas sur $]x_i, x_{i+1}[$, elle est de signe constant sur $[x_i, x_{i+1}]$. En effet, s'il existait deux réels u et v de $[x_i, x_{i+1}]$, avec $u < v$ et $f'(u)$ et $f'(v)$ de signe contraire, par le théorème des valeurs intermédiaires[6], il existerait $t \in]u, v[$ tel que $f'(t) = 0$, ce qui est absurde.
Donc f' est de signe constant sur $[x_i, x_{i+1}]$, et ne s'annule au plus[7] qu'en x_i et en x_{i+1}, donc $\boxed{f \text{ est strictement monotone sur } [x_i, x_{i+1}]}$.

[6] C'est ici que la continuité de f' est nécessaire.

[7] Si $i = 0$, $f'(x_0) = f'(a)$ n'est pas forcément nul. Idem pour $f'(b)$.

3.b. Notons m le plus petit des $r+2$ nombres $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_r), f(x_{r+1})$, et notons $j \in [\![0, r+1]\!]$ tel que $f(x_j) = m$.
Soit alors $x \in [a, b]$, et soit $i \in [\![0, r]\!]$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$.
▶ Si f est croissante sur $[x_i, x_{i+1}]$, alors $f(x) \geqslant f(x_i) \geqslant m$.

Remarque
Notons qu'il n'y a pas nécessairement unicité d'un tel j, plusieurs des x_k peuvent avoir la même image par f.

► Et si f est décroissante sur $[x_i, x_{i+1}]$, alors $f(x) \geqslant f(x_{i+1}) \geqslant m$.
Et donc pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant m$.
Puisque par ailleurs, $m = f(x_j)$ est bien une valeur atteinte par f, f possède bien un minimum sur $[a, b]$, atteint en l'un des x_i.

Mieux
Nous prouverons plus tard que sans hypothèse de dérivabilité, une fonction continue sur $[a, b]$ possède toujours un minimum.

Par ailleurs, pour $x \notin \{x_0, x_1, \dots, x_{r+1}\}$, soit $i \in [\![0, r]\!]$ tel que $x \in]x_i, x_{i+1}[$.
Alors soit f est strictement croissante sur $]x_i, x_{i+1}[$, et alors $f(x) > f(x_i) \geqslant m$.
Soit f est strictement décroissante sur $]x_i, x_{i+1}[$, et alors $f(x) > f(x_{i+1}) \geqslant m$.
Dans tous les cas, pour $x \notin \{x_0, \dots, x_{r+1}\}$, $f(x) > m$.

Partie III. Preuve de l'inégalité de Fejér-Jackson

4. Puisque la fonction sin est dérivable sur $\mathbf{R}$, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $x \mapsto \sin(kx)$ est dérivable sur $[0, \pi]$.
Et donc par somme de fonctions dérivables, f_n est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$,
$f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k\cos(kx)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

5.a. Puisque $f_n'(\theta) = 0$, par la question 2.a, on a donc $\dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 0$, soit encore

$$\boxed{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).}$$

5.b. Rappelons que pour a, b deux réels, $\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow a \equiv b \quad [2\pi]$ **ou** $a \equiv \pi - b \quad [2\pi]$.
Donc ici, $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta \equiv \dfrac{\theta}{2} \quad [2\pi]$ **ou** $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta \equiv \pi - \dfrac{\theta}{2} \quad [2\pi]$.
► Si $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta \equiv \dfrac{\theta}{2} \quad [2\pi]$, alors $n\theta \equiv 0 \quad [2\pi]$ et donc $\boxed{\sin(n\theta) = 0.}$
► Et si $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\theta \equiv \pi - \dfrac{\theta}{2} \quad [2\pi]$, alors $(n+1)\theta \equiv \pi \quad [2\pi]$.
Mais dans ce cas, on a

$$\sin(n\theta) = \sin((n+1)\theta - \theta) = \sin((n+1)\theta)\cos\theta - \cos(n\theta)\sin(\theta) = \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\cos(\theta) - \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\sin(\theta) = \boxed{\sin(\theta).}$$

5.c. On a donc

$$f_n(\theta) - f_{n-1}(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\theta)}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\sin(n\theta)}{n}.$$

Si $\sin(n\theta) = 0$, alors $f_n(\theta) = f_{n-1}(\theta)$.
Et si $\sin(n\theta) = \sin(\theta)$, alors $f_n(\theta) - f_{n-1}(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{n} > 0$ puisque $\theta \in]0, \pi[$.
Dans tous les cas, $\boxed{f_n(\theta) \geqslant f_{n-1}(\theta).}$

6. Par le résultat de la question 2.b, pour $x \in]0, \pi[$, $f_n'(x) = 0$ si et seulement si $\sin \frac{n}{2}x = 0$ **ou** $\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) = 0$.
Soit si et seulement si $\frac{n}{2}x \equiv 0[\pi]$ **ou** $\frac{n+1}{2}x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
Soit encore si et seulement si $x \equiv 0 \quad \left[\frac{2\pi}{n}\right]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{n+1} \quad \left[\frac{2\pi}{n+1}\right]$.
Or, pour $\alpha > 0$ et $y \in \mathbf{R}$, il n'existe qu'un nombre fini de réels $x \in [0, \pi]$ congrus à y modulo α.
En effet, ce sont les $y + k\alpha$, avec $k \in \mathbf{Z}$ tels que $0 \leqslant y + k\alpha \leqslant \pi \Leftrightarrow -\frac{y}{\alpha} \leqslant k \leqslant \frac{\pi - y}{\alpha}$.
Et donc en particulier, f_n' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur $]0, \pi[$.
Et donc[8] s'annule un nombre fini de fois sur $[0, \pi]$.

[8] Il faut au plus ajouter deux points (0 et π).

Remarque : on peut noter que $f_n'(0) = n + 1 \neq 0$, et que $f_n'(\pi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(k\pi) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k$, qui s'annule lorsque n est pair.

7. Puisque f_n' est continue[9] et s'annule un nombre fini de fois, les résultats de la partie II s'appliquent : f possède un minimum m sur $[0, \pi]$, atteint en un ou plusieurs des points $x_0, x_1, \dots, x_{r+1}$, et pas ailleurs (où on a repris les mêmes notations que dans la question 3 : $x_1, \dots, x_r$ sont les points de $]0, \pi[$ où f_n' s'annule, $x_0 = 0$ et $x_{r+1} = \pi$).

[9] Elle est dérivable.

Supposons qu'il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $m = f_n(x_i)$ avec $x_i \in]0, \pi[$. Alors par hypothèse de récurrence, $f_{n-1}(x_i) > 0$, et donc $m = f_n(x_i) \geqslant f_{n-1}(x_i) > 0$. Donc en particulier, pour tout $x \in]0, \pi[$, $f_n(x) \geqslant m > 0$.
Mais puisque m est le minimum de f_n sur $[0, \pi]$, $m \leqslant f_n(0) = 0$, d'où une contradiction.

Par conséquent, les seuls x_i tels que $m = f_n(x_i)$ sont égaux à 0 ou à π. Et alors $m = 0$ puisque $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$.
Mais alors pour tout $x \in [0, \pi] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{r+1}\}$, $f_n(x) > m$ par la question 3.b, et pour $x \in \{x_0, x_1, \dots, x_{r+1}\} \setminus \{0, \pi\}$, $f_n(x_i) > m$. Donc pour tout $x \in]0, \pi[$, $f_n(x) > 0$.

Dans tous les cas, on a prouvé que $\forall x \in]0, \pi[$, $f_n(x) > 0$, ce qui achève de prouver (FJ_n).

▸ Hors barème : optimalité asymptotique de la constante dans l'inégalité de Hardy

1.a. On a

$$e^{H_n} = e^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}}.$$

Mais on sait que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$, et donc pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $e^{\frac{1}{k}} \geqslant 1 + \frac{1}{k}$.
Par produit d'inégalités à termes positifs, il vient donc

$$\boxed{e^{H_n} = \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).}$$

1.b. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{n+1}{1}.$$

Détails
Il s'agit d'un produit télescopique.

Et puisque $n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $e^{H_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Par composition avec le logarithme, on en déduit que $H_n = \ln(e^{H_n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. L'inégalité de Hardy[10], appliquée avec $a_k = k$ nous dit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

[10] Celle avec λ, que nous avons supposée vraie.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{1 + \cdots + k} \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

soit encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k(k+1)} \leqslant \lambda H_n$.
Mais $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = 2\left(H_n - 1 + \frac{1}{n+1}\right)$.
Donc $2H_n - 2 + \dfrac{2}{n+1} \leqslant \lambda H_n$.
On en déduit, après division par $H_n > 0$, que

$$2 - \frac{2}{H_n} + \frac{2}{(n+1)H_n} \leqslant \lambda.$$

Puisque $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\dfrac{2}{H_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{2}{(n+1)H_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Et donc par passage à la limite dans l'inégalité précédente, $\boxed{2 \leqslant \lambda.}$
Autrement dit, la constante 2 obtenue précédemment dans l'inégalité de Hardy est optimale : on ne peut pas faire mieux.