Devoir surveillé 1

► *Les calculatrices sont **interdites**.*
► *La qualité d'une copie ne tient pas uniquement aux calculs et aux résultats qui s'y trouvent.*
Vous apporterez donc un soin particulier à la présentation, à la lisibilité et à l'orthographe de vos copies.
***La qualité de la rédaction, la clarté et la finesse des raisonnements** sont des éléments susceptibles d'influencer la note finale.*
► *Merci de numéroter entièrement les réponses (par exemple 6.c. et pas seulement c.) et **d'encadrer vos résultats**.*
► *Si vous repérez ce qui **vous semble être une erreur d'énoncé**, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amenés à prendre.*

Les temps indiqués pour chaque exercice sont fournis à titre indicatif.
Il est conseillé d'aborder chaque exercice, les premières questions d'un exercice étant souvent plus abordables que la suite.

► Exercice 1 : un peu de logique — *30 min*

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. On rappelle que f est bornée si et seulement si il existe deux réels m et M tels que $\forall x \in \mathbf{R},\ m \leqslant f(x) \leqslant M$.
   Prouver l'équivalence suivante :
   $$f \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbf{R},\ \forall x, y \in \mathbf{R},\ a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b.$$
2. Montrer que toute fonction dérivable $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction affine et d'une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dérivable et vérifiant $g(0) = g'(0) = 0$.

► Exercice 2 : une inégalité — *30 min*

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par : $\forall t \in \mathbf{R}_+^*,\ f(t) = \dfrac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$.
   Montrer que f est strictement croissante.
2. Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a < b$. Déduire de la question précédente le sens de variations de la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g : t \mapsto \dfrac{\ln(1+at)}{\ln(1+bt)}$.
3. En déduire que pour tout $a, b \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln\left(1 + \dfrac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \dfrac{b}{a}\right) \leqslant \ln(2)^2$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette inégalité soit une égalité.

► Exercice 3 : complexité du tri fusion — *20 min*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$, et pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 2u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n$.

Prouver que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant 2n\log_2(n)$, où pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on note $\log_2(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.
Cette suite apparaît naturellement en informatique lorsqu'on étudie le coût de l'algorithme de tri fusion, qui est un algorithme performant pour trier par ordre croissant une liste.

▸ Exercice 4 : partie entière et partie entière supérieure — 40 min

1. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-2 \leqslant 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leqslant 1$.
2. On admet que pour tout réel x, il existe un entier $k \in \mathbf{Z}$ tel que $k-1 < x \leqslant k$.
   a. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe **un unique** $k \in \mathbf{Z}$ tel que $k-1 < x \leqslant k$.
   Dans la suite, on note $\lceil x \rceil$ cet unique entier, appelé partie entière supérieure de x.
   b. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.
   c. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
   d. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$, $x \leqslant n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant n$.
   e. Prouver : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall m, n \in \mathbf{N}^*$, $\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{mn} \right\rceil$.

▸ Problème : nombres triangulaires et équation de Pell-Fermat — 1h

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$ le $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Soient m, n deux éléments de $\mathbf{N}^*$. Montrer que $T_n = m^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2 - 8m^2 = 1$.

Dans toute la suite du problème, on définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 3 \\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ b_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n \end{cases}$$

3. Prouver que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite strictement croissante dont tous les termes sont entiers.
   Dans la suite, on pourra utiliser sans démonstration le fait que $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est également une suite strictement croissante d'entiers.
4. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation $(\mathscr{R})$ si $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$.
   a. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha^2 = 2\alpha + 1$.
   Prouver que la suite $(\alpha^n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation $(\mathscr{R})$.
   b. Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites vérifiant la relation $(\mathscr{R})$ telles que $u_1 = v_1$ et $u_2 = v_2$.
   Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = v_n$.
   c. À l'aide des questions précédentes, déterminer l'expression des suites $(b_n + \sqrt{2}a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n - \sqrt{2}a_n)_{n\geqslant 1}$.
   d. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $b_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n$.
5. Montrer qu'il existe une infinité de couples (a, b) d'entiers naturels tels que $b^2 - 2a^2 = 1$.
6. Prouver qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbf{N}^*$ tels que T_n soit un carré parfait (c'est-à-dire le carré d'un entier). Donner un exemple d'un tel entier qui soit strictement supérieur à 10.

▸ Exercice hors barême

Cet exercice plus difficile n'est à aborder que si vous avez très bien traité tout le reste du sujet.
Prouver que $\forall p \in \mathbf{N}^*$, $\forall a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{R}_+$, $a_1 a_2 \cdots a_p = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_p \geqslant p$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 1

▸ Exercice 1 : un peu de logique

1. Procédons par double implication.
Supposons f bornée, et soient $M, m \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Soient $x, y \in \mathbf{R}$. Alors $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et $m \leqslant f(y) \leqslant M$, de sorte que $-M \leqslant -f(y) \leqslant -m$.
Et donc en sommant ces inégalités, $m - M \leqslant f(x) - f(y) \leqslant M - m$, de sorte que si on pose $a = m - M$ et $b = M - m$ alors on a bien : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b$.

Réciproquement, supposons qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x, y \in \mathbf{R}$, $a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b$, et notons a et b de tels réels.
Alors pour $x \in \mathbf{R}$, il vient $a \leqslant f(x) - f(0) \leqslant b \Leftrightarrow a + f(0) \leqslant f(x) \leqslant b + f(0)$.
Donc f est minorée (par $a + f(0)$) et majorée (par $b + f(0)$) et donc bornée.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est bornée si et seulement si } \exists a, b \in \mathbf{R}, \forall x, y \in \mathbf{R}, a \leqslant f(x) - f(y) \leqslant b.}$

2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable.
Prouvons par analyse-synthèse que f s'écrit de manière unique $f = h + g$, avec h affine, et g dérivable telle que $g(0) = g'(0) = 0$.

Analyse : supposons qu'il existe h affine, et g dérivable telle que $g(0) = g'(0) = 0$, vérifiant $f = h + g$.
Dans la suite, notons g et h de telles fonctions.
Notons alors a et b deux réels tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = ax + b$.
Alors $f(0) = h(0) + g(0) = b + 0 = b$.
Et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = h'(x) + g'(x) = a + g'(x)$, si bien que $f'(0) = a$.
Donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $h(x) = f(0) + f'(0)x$.
Et donc $g(x) = f(x) - h(x) = f(x) - f(0) - f'(0)x$.
Ainsi, si deux telles fonctions h et g existent, ce sont $h : x \mapsto f(0) + f'(0)x$ et $g : x \mapsto f(x) - f(0) - f'(0)x$.

Méthode
N'oublions pas la synthèse, l'analyse ne prouve pas l'existence de telles fonctions, puisqu'elle la supposait. Il reste donc à vérifier que les fonctions obtenues au cours de l'analyse conviennent.

Synthèse : notons $h : x \mapsto f(0) + f'(0)x$ et $g : x \mapsto f(x) - f(0) - f'(0)x$.
Alors il est clair que h est affine, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$.
On a alors $g(0) = f(0) - f(0) = 0$.
Puisque f et h sont dérivables[1], g est dérivable car somme de fonctions dérivables, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = f'(x) - h'(x) = f'(x) - f'(0)$.
Et en particulier, $g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$.
Donc il existe bien deux fonctions h et g, avec h affine et g dérivable telle que $g(0) = g'(0) = 0$ et vérifiant $f = g + h$.

[1] f l'est par hypothèse, h l'est comme toute fonction affine.

Ainsi, toute fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dérivable s'écrit de manière unique[2] comme somme d'une fonction affine et d'une fonction dérivable g telle que $g(0) = g'(0) = 0$.

[2] Encore une fois : l'analyse prouve l'unicité, la synthèse prouve l'existence.

▸ Exercice 2 : une inégalité

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ car produit et quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$f'(t) = \frac{\left(\ln(1+t) + (1+t)\dfrac{1}{1+t}\right)t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2} = \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}.$$

Notons g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g : t \mapsto t - \ln(1+t)$.
Alors g est dérivable, et pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $g'(t) = 1 - \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{t}{1+t} > 0$.
Donc g est strictement croissante, et puisque $\lim\limits_{t \to 0} g(t) = 0$, on en déduit que pour tout $t > 0$, $g(t) > 0$, soit encore $t - \ln(1+t) > 0$.

Convexité
Si vous avez reconnu que $y = x$ est la tangente au graphe de $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 0, et que vous savez que f est concave, vous pouvez facilement prouver que $\ln(1+x) \leqslant x$.
Ce n'est toutefois pas suffisant pour l'inégalité stricte (nécessaire à la stricte croissance de f).

On en déduit donc que $\boxed{f \text{ est strictement croissante}}$ puisque sa dérivée est strictement positive.

2. La fonction g est dérivable car quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$g'(t) = \frac{\frac{a}{1+at}\ln(1+bt) - \frac{b}{1+bt}\ln(1+at)}{\ln(1+bt)^2}.$$

Donc $g'(t)$ est du signe de $\dfrac{a}{1+at}\ln(1+t) - \dfrac{b}{1+bt}\ln(1+at)$.
Or, pour $t > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+at}\ln(1+bt) - \frac{b}{1+bt}\ln(1+at) > 0 &\Leftrightarrow \frac{a}{1+at}\ln(1+bt) > \frac{b}{1+bt}\ln(1+at)\\ &\Leftrightarrow \frac{(1+bt)\ln(1+bt)}{bt} > \frac{(1+at)\ln(1+at)}{at}\\ &\Leftrightarrow f(bt) > f(at).\end{aligned}$$

Puisque $a < b$, pour tout $t > 0$, $at < bt$, et donc par stricte croissance de f, $f(at) < f(bt)$, si bien que $g'(t) > 0$.
On en déduit que $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R}_+^*.}$

3. Soient $a, b \in \mathbf{R}_+^*$. Quitte à les échanger, supposons que $a \leqslant b$, de sorte que la fonction g de la question précédente est strictement croissante.

En particulier, $g\left(\dfrac{1}{b}\right) \leqslant g\left(\dfrac{1}{a}\right)$, soit encore $\dfrac{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\ln(2)} \leqslant \dfrac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$ et donc

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln(2))^2.}$$

De plus, si $a \neq b$, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, si bien que par stricte croissance de g, $g\left(\frac{1}{b}\right) < g\left(\frac{1}{a}\right)$, et donc $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) < (\ln(2))^2$.

Et évidemment, si $a = b$, alors $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) = \ln(2)\ln(2) = \ln(2)^2$.

Donc $\boxed{\text{l'inégalité est une égalité si et seulement si } a = b.}$

▸ Exercice 3 : complexité du tri fusion

Nous allons procéder par récurrence forte sur $n \geqslant 2$, en notant $\mathscr{P}(n) : u_n \leqslant 2n\log_2(n)$.
On a $u_2 = 2u_1 + 2 = 4$.
Et par ailleurs, $2 \times 2 \times \log_2(4) = 4\dfrac{\ln(4)}{\ln 2} = 8 \geqslant 4$.

Méthode u_{n+1} de dépend pas de u_n, mais de $u_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, donc une récurrence simple ne saurait suffire.

Soit donc $n \geqslant 2$, tel que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $u_n \leqslant 2n\log_2(n)$.
▸ Si $n = 2$, notons que $u_3 = 2u_1 + 3 = 5$. Puisque nous n'avons rien supposé[3] sur u_1, on ne peut pas utiliser d'hypothèse de récurrence.
En revanche, on a

$$2 \times 3 \times \log_2(3) = 6\frac{\ln 3}{\ln 2} \geqslant 6 \geqslant u_2.$$

Donc si $n = 2$, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

[3] D'ailleurs la majoration que l'on cherche à prouver est fausse si $n = 1$ car $\log_2(1) = 0$.

▸ Si $n \geqslant 3$. Alors $u_{n+1} = 2u_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + (n+1)$. Puisque $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor \in [\![2, n]\!]$, on a donc

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= 2u_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + n + 1\\ &\leqslant 2 \times 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \log_2\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + (n+1)\\ &\leqslant 4\frac{n+1}{2}\log_2\left(\frac{n+1}{2}\right) + (n+1)\end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence s'applique puisque $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant n$.

$$\begin{aligned}
&\leqslant 2(n+1)\log_2\left(\frac{n+1}{2}\right)+(n+1)\\
&\leqslant 2(n+1)\left(\log_2(n+1)-\underbrace{\log_2(2)}_{=1}\right)+(n+1)\\
&\leqslant 2(n+1)\log_2(n+1)-(n+1)\\
&\leqslant 2(n+1)\log_2(n+1).
\end{aligned}$$

Et donc dans tous les cas, pour $n \geqslant 2$, si pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie, alors $\mathscr{P}(n+1)$ l'est également.

Par le principe de récurrence forte, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2,\ u_n \leqslant 2n\log_2(n).}$

Commentaire *: le tri fusion*[4] *consiste à dire que pour trier une liste de n éléments, il suffit de la couper en deux listes de taille moitié, de trier les deux listes (ce qui peut se faire récursivement en les coupant de nouveau chacune en deux), puis de fusionner les deux listes ainsi triées en une liste triée.*
Si la liste de départ était de taille n, alors la fusion de deux sous-listes peut se faire en comparant uniquement n éléments (à chaque fois on compare les deux plus petits éléments de chaque sous-liste).
Et donc si u_n *est le nombre d'opérations pour trier une liste de taille n, on a* $u_n = 2u_{\frac{n}{2}} + n$.
Du moins lorsque n est pair...
Sinon, l'une des listes sera de taille $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *et l'autre de taille* $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.
Donc on a la relation $u_n = u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1} + n$*, ce qui n'est pas exactement la suite étudiée ici, mais qui y ressemble beaucoup.*

[4] Que vous rencontrerez en info.

▸ Exercice 4 : partie entière et partie entière supérieure.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors on a $2x - 1 < \lfloor 2x \rfloor \leqslant 2x$ et $3x - 1 < \lfloor 3x \rfloor \leqslant 3x$.
Et donc $6x - 3 < 3\lfloor 2x \rfloor \leqslant 6x$ et $-6x \leqslant 2\lfloor 3x \rfloor < 2 - 6x$.
Par somme d'inégalités, on en déduit que

$$-3 < 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor < 2.$$

Puisque par ailleurs $3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor$ est un entier, on a donc $\boxed{-2 \leqslant 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leqslant 1.}$

Rappel
Puisque
$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor - 1$$
on a
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

2.a. Soient k, k' deux entiers tels que $k - 1 < x \leqslant k$ et $k' - 1 < x \leqslant k'$.
Alors $k - 1 < x \leqslant k'$ si bien que $k - 1 < k'$ et donc[5] $k \leqslant k'$.
Et de même $k' - 1 < x \leqslant k$, si bien que $k' \leqslant k$.
On en déduit donc que $k = k'$, et donc qu'il existe un unique tel entier k.

[5] k et k' sont entiers.

Remarque
Si on n'avait pas admis l'existence, on aurait donc qu'il existe **au plus** un tel entier.

2.b. Soit $x \in \mathbf{R}$.
Notons $k = \lceil x \rceil$, de sorte que $k - 1 < x \leqslant k$.
Et donc $-k \leqslant -x < -k + 1$. Puisque $-k \in \mathbf{Z}$, on a donc $-k = \lfloor -x \rfloor$.
Et donc $\lceil x \rceil = k = \boxed{-\lfloor -x \rfloor.}$

2.c. Soit $n \in \mathbf{N}$. Si n est pair, soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p$.
Alors $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \lceil p \rceil$ et $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = p$. Donc on a bien l'égalité annoncée.
Et si n est impair, soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Alors

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil p + \frac{1}{2} \right\rceil = p + 1 \text{ et } \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \lfloor p + 1 \rfloor = p + 1.$$

Dans tous les cas, on a $\boxed{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.}$

2.d. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$. Si $x \leqslant n$, alors on a $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant n$, et donc $\lceil x \rceil - 1 < n$.
Puisque $\lceil x \rceil$ et n sont entiers, on a donc $\lceil x \rceil \leqslant n$.
Ainsi, $x \leqslant n \Rightarrow \lceil x \rceil \leqslant n$.
Et inversement, si $\lceil x \rceil \leqslant n$, alors $x \leqslant \lceil x \rceil \leqslant n$.
Et donc $\lceil x \rceil \leqslant n \Rightarrow x \leqslant n$.
Par double implication, on a bien prouvé que $\boxed{x \leqslant n \Leftrightarrow \lceil x \rceil \leqslant n.}$

2.e. Soit $x \in \mathbf{R}$ et soient $m, n \in \mathbf{N}^*$. Notons $q = \left\lceil \frac{x}{mn} \right\rceil$, de sorte que $q - 1 < \frac{x}{mn} \leqslant q$ et donc $nq - n < \frac{x}{m} < nq$.

Il s'agit donc de prouver que $q = \left\lceil \frac{\lceil \frac{x}{m} \rceil}{n} \right\rceil$. Or

$$q = \left\lceil \frac{\lceil \frac{x}{m} \rceil}{n} \right\rceil \Leftrightarrow q - 1 < \frac{\lceil \frac{x}{m} \rceil}{n} \leqslant q \Leftrightarrow nq - n < \left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil \leqslant nq.$$

On a déjà $nq - n < \frac{x}{m} \leqslant \left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil$.

Par ailleurs, nq est un entier avec $nq \geqslant \frac{x}{m}$, donc par la question précédente, $nq \geqslant \left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil$.

Et donc on a bien $nq - n < \left\lceil \frac{x}{m} \right\rceil \leqslant nq$, si bien que $\boxed{\left\lceil \frac{\lceil \frac{x}{m} \rceil}{n} \right\rceil = q = \left\lceil \frac{x}{mn} \right\rceil.}$

Remarque : il était sûrement plus facile[6] de prouver que $\forall y \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \left\lceil \frac{y}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{\lceil y \rceil}{n} \right\rceil$, puis d'appliquer ceci à $y = \frac{x}{m}$.

[6] Et totalement acceptable.

▸ Problème : nombres triangulaires et équation de Pell-Fermat

1. Prouvons la formule annoncée par récurrence simple sur $n \in \mathbf{N}^*$.
On a évidement $T_1 = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors

$$T_{n+1} = 1+\cdots+n+(n+1) = T_n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+n+1 = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Donc par le principe de réucrrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, T_n = \frac{n(n+1)}{2}.}$

2. On a donc

$$T_n = m^2 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = m^2 \Leftrightarrow n^2+n = 2m^2 \Leftrightarrow 4n^2+4n = 8m^2 \Leftrightarrow (2n+1)^2-1 = 8m^2 \Leftrightarrow \boxed{(2n+1)^2 - 8m^2 = 1.}$$

3. Prouvons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $a_n \in \mathbf{N}^*$.
Il est évident que a_1 et a_2 sont dans $\mathbf{N}^*$, donc la récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tels que $a_n \in \mathbf{N}^*$ et $a_{n+1} \in \mathbf{N}^*$. Alors $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \in \mathbf{N}^*$.
Donc par le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \in \mathbf{N}^*$.

On en déduit en particulier que pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} > 2a_n \geqslant a_n$.
Puisque de plus $a_2 > a_1$, $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bien strictement croissante.}}$

4.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors $\alpha^{n+2} = \alpha^n\alpha^2 = \alpha^n(2\alpha+1) = 2\alpha^{n+1}+\alpha^n$. Donc $\boxed{\text{la suite } (\alpha^n)_{n\geqslant 1} \text{ vérifie bien } (\mathscr{R}).}$

4.b. Prouvons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $u_n = v_n$.
Pour $n = 1$ et $n = 2$, c'est l'hypothèse de l'énoncé.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $u_n = v_n$ et $u_{n+1} = v_{n+1}$. Alors

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n = 2v_{n+1} + v_n = v_{n+2}.$$

Donc par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, u_n = v_n.}$

4.c. Les solutions de $x^2 = 2x + 1$ sont $\alpha = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$ et $\beta = 1 - \sqrt{2}$.
On a alors $\alpha^2 = 2\alpha + 1 = 3 + \sqrt{2}$, et $\beta^2 = 2\beta + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Posons $u_n = b_n + \sqrt{2}a_n$, de sorte que $u_1 = 1 + \sqrt{2} = \alpha$ et $u_2 = 3 + 2\sqrt{2} = \alpha^2$.
Puisque (a_n) et (b_n) vérifient la relation $(\mathscr{R})$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$u_{n+2} = b_{n+2} + \sqrt{2}a_{n+2} = 2b_{n+1} + b_n + \sqrt{2}(2a_{n+1} + a_n) = 2u_{n+1} + u_n$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie encore $(\mathscr{R})$.
Puisque $(\alpha^n)_{n\geqslant 1}$ vérifie également $(\mathscr{R})$ et que ses deux premiers termes coïncident avec ceux de $(u_n)_{n\geqslant 1}$, par la question précédente, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ u_n = \alpha^n.}$

De même, en posant $v_n = b_n - \sqrt{2}a_n$, on prouve que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie $(\mathscr{R})$, et que ses deux premiers termes coïncident avec ceux de $(\beta^n)_{n\geqslant 1}$, si bien que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = \beta^n.}$

4.d. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$b_n^2 - 2a_n^2 = (b_n + \sqrt{2}a_n)(b_n - \sqrt{2}a_n) = u_n v_n = (\alpha\beta)^n.$$

Mais $\alpha\beta = \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(1 - \sqrt{2}\right) = 1 - 2 = -1$, si bien que $\boxed{b_n^2 - 2a_n^2 = (-1)^n.}$

Remarque Il est important ici de justifier que les solutions ainsi obtenues sont deux à deux distinctes. Si les suites étaient constantes, par exemple $b_n = 3$ pour tout n et $a_n = 2$, on aurait certes pour une infinité de n, $b_n^2 - 2a_n^2 = 1$, mais cela ne nous donnerait qu'une seule solution à $b^2 - 2a^2 = 1$.

5. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, a_{2n} et b_{2n} sont deux entiers avec $b_{2n}^2 - 2a_{2n}^2 = 1$.
Puisque de plus la suite $(b_{2n})_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante, les couples (b_{2n}, a_{2n}) sont deux à deux distincts, si bien que $\boxed{\text{l'équation } b^2 - 2a^2 = 1 \text{ possède une infinité de solutions.}}$

6. Il s'agit donc, par la question 2, de prouver qu'il existe une infinité de couples d'entiers (n, m) tels que $(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$.
Mais si p est un entier pair, nous savons déjà que $b_p^2 - 2a_p^2 = 1$.
Donc si a_p est lui-même pair, et si m est tel que $a_p = 2m$, alors $b_p^2 - 8m^2 = 1$.
Prouvons donc qu'il existe une infinité d'entiers p pairs tels que b_p soit impair et a_p soit pair.
Pour nous faire une idée de leur parité, calculons les premiers termes des suites (a_n) et (b_n).
On a $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 12$, $a_5 = 29$, $a_6 = 70$.
On peut donc raisonnablement conjecturer que a_n est de la parité de n.
De même, on a $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 7$, $b_4 = 17$, $b_5 = 41$, $b_6 = 99$ etc, et on peut donc conjecturer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, b_n est impair.

Puisqu'en fait nous avons seulement besoin d'un peu moins[7], prouvons par récurrence simple sur $p \in \mathbf{N}^*$ que b_{2p} est impair et a_{2p} est pair.
Il est évident que b_2 est impair et que a_2 est pair.
Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que b_{2p} soit impair et a_{2p} soit pair.
Alors $b_{2p+2} = 2b_{2p+1} + b_{2p}$. Comme b_{2p+1} est entier, $2b_{2p+1}$ est pair, et donc b_{2p+2} est impair.
Et de même, $a_{2p+2} = 2a_{2p+1} + a_{2p}$ est pair.
Par le principe de récurrence simple, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, b_{2p} est impair et a_{2p} est pair.

[7] Seuls les a_{2p} et les b_{2p} vont nous intéresser.

⚠ Attention ! Le terme d'indice pair de (b_n) après b_{2p} est $b_{2(p+1)} = b_{2p+2}$ et non b_{2p+1}.

Par la question 4.d, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $b_{2p}^2 - 2a_{2p}^2 = 1$.
En particulier, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, si on note $n = \dfrac{b_{2p} - 1}{2}$, qui est bien un entier[8], et en notant $m = \dfrac{a_{2p}}{2}$, qui est également entier, on a $(2n+1)^2 - 8m^2 = 1$.
Autrement dit, $T_n^2 = m$.
Puisque la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante, les $\dfrac{b_{2p} - 1}{2}$ sont deux à deux distincts, et donc il y a bien une infinité d'entiers $n \in \mathbf{N}^*$ tels que T_n soit un carré parfait.
Pour donner un exemple de tel entier supérieur à 10, cherchons une valeur de p telle que $\dfrac{b_{2p} - 1}{2}$ soit plus grand que 10.
Les calculs effectués précédemment nous informent que $p = 3$ convient puisque $\frac{b_6 - 1}{2} = 49 > 10$.
Comme par ailleurs $a_6 = 70 = 2 \times 35$, on a $T_{49} = \dfrac{49 \times 50}{2} = 1225 = 35^2$.

[8] Car b_{2p} est impair.

Remarque On a même prouvé un peu plus que demandé : 49 est le plus petit entier $n > 10$ tel que T_n soit un carré parfait.

▸ Exercice facultatif

Procédons par récurrence sur $p \in \mathbf{N}^*$ en posant

$$\mathscr{P}(p) : \forall a_1, \ldots, a_p \in \mathbf{R}_+,\ a_1 a_2 \cdots a_p = 1 \Rightarrow a_1 + \cdots + a_p \geqslant p.$$

Il est évident que $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Soit $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(p)$ soit vraie.
Soient alors $a_1, \dots, a_{p+1}$ des réels positifs tels que $a_1 a_2 \cdots a_{p+1} = 1$.
Notons tout de suite que les a_i sont nécessairement strictement positifs.
Supposons, quitte à les échanger que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{p+1}$.
Alors nécessairement $a_1 \leqslant 1$ (faute de quoi $a_1 \cdots a_{p+1} \geqslant a_1^{p+1} > 1$) et de même $a_{p+1} \geqslant 1$ (faute de quoi $a_1 \cdots a_{p+1} \leqslant a_{p+1}^{p+1} < 1$).
Puisque $a_2 a_2 \cdots a_p (a_{p+1} a_1) = 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux réels positifs $a_2, a_3, \dots, a_p, a_{p+1} a_1$.
Et alors $a_2 + a_3 + \cdots + a_p + a_{p+1} a_1 \geqslant p$ par hypothèse de récurrence.
On en déduit que

$$\begin{aligned}
a_1 + \cdots + a_p + a_{p+1} &= (a_2 + \cdots + a_p + a_{p+1} a_1) + a_1 + a_{p+1} - a_{p+1} a_1 c \\
&\geqslant p + a_1 + a_{p+1} - a_{p+1} a_1 \\
&\geqslant p + \underbrace{(1 - a_1)}_{\geqslant 0} \underbrace{(a_{p+1} - 1)}_{\geqslant 0} + 1 \\
&\geqslant p + 1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vérifiée, et donc par le principe de récurrence simple, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(p)$ est vraie.