

DEVOIR SURVEILLÉ 7

► Exercice 1 : décomposition spectrale d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.

Dans cet exercice, on considère l'application $f : \begin{cases} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (2x + y + z, -x - z, x + y + 2z) \end{cases}$.

On note également $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = -y = z\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ et donner une base de F et une base de G .
2. Montrer que $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.
3. Première étude de f
 - a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$.
 - b. Justifier que f est surjectif, et déterminer $\text{Ker}(f)$.
 - c. En déduire que f est un automorphisme de $\mathbf{R}^3$, et déterminer f^{-1} .
 - d. Calculer f^2 . En déduire que $f^2 = 3f - 2\text{id}_{\mathbf{R}^3}$.
4. Projecteurs associés à f : on note à présent $p = f - \text{id}_{\mathbf{R}^3}$ et $q = 2\text{id}_{\mathbf{R}^3} - f$.
 - a. Vérifier que p et q sont des projecteurs vérifiant $p + q = \text{id}_{\mathbf{R}^3}$ et $2p + q = f$.
 - b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n = 2^n p + q$.
 - c. Vérifier que f est bijective et que $f^{-1} = 2^{-1}p + q$.
 - d. En déduire que la formule de la question 4.b est valable pour tout $n \in \mathbf{Z}$.
5. Exprimer, en fonction de p et q , la projection sur F parallèlement à G et la projection sur G parallèlement à F .

► Exercice 2 : étude d'une suite implicite

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'équation $\ln x + nx = 0$ admet une unique solution dans $\mathbf{R}_+^*$. On notera x_n cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est monotone.
3. En déduire que $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $y_n = nx_n$.

4. Montrer que $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $y_n + \ln y_n = \ln n$.
5. En déduire que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.
6. Prouver que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(\ln n)}{n} + o\left(\frac{\ln(\ln n)}{n}\right)$.

Indication : on pourra poser $z_n = x_n - \frac{\ln n}{n}$.

► Exercice 3 : étude d'une suite de polynômes

Soit $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite de polynômes définie par

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}, P_{n+1} = 2XP_n - \frac{1}{n+1} (1 + X^2) P'_n.$$

1.
 - a. Calculer P_1 et P_2 .
 - b. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n \in \mathbf{R}_n[X]$.
 - c. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\deg(P_n) = n$ et donner le coefficient dominant de P_n .
2.
 - a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.
 - b. En déduire que pour tout entier n , les coefficients de degré impair de P_{2n} sont nuls. Qu'en déduit-on au sujet des coefficients de P_{2n+1} ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P'_{n+1} = (n+2)P_n$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
5. En déduire les valeurs de P_3 et P_4 .
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1 + X^2) P_n = 0$.
7. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $z_n = P_n(x)$.
 - a. En utilisant la question 6, exprimer z_n en fonction de n et x .
 - b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n = \frac{1}{2i} ((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$.
8. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbf{R}$ et déterminer ses racines.
9. Factoriser le polynôme P_n en produit d'irréductibles de $\mathbf{R}[X]$.
10. Calculer la somme et le produit des racines de P_n (on pourra distinguer des cas suivant la parité de n).

► Exercice 4 : un endomorphisme sur les polynômes

Soit $n \geq 2$, et soit $Q \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme de degré 2.

On note φ l'application définie sur $\mathbf{C}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbf{C}_n[X], \varphi(P) = 2P'Q - nPQ'.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbf{C}_n[X]$.
2. Étude d'un cas particulier

Dans cette question, on suppose que $n = 2$. On considère également deux réels u et v , et on considère $Q = X^2 + uX + v$.

 - a. On note $P_1 = \varphi(1)$, $P_2 = \varphi(X)$ et $P_3 = \varphi(X^2)$.
Montrer que P_3 est une combinaison linéaire de P_1 et P_2 .
 - b. Déterminer une base de $\text{Im } \varphi$.
 - c. Déterminer le noyau de φ en fonction de Q .
3. Dans cette question, on suppose que Q possède deux racines complexes distinctes.
 - a. Montrer que si P est un polynôme non nul de $\text{Ker}(\varphi)$, alors Q divise P .
 - b. Montrer que si $P \in \text{Ker}(\varphi)$ est non nul, alors il existe un entier $k \geq 1$ et $R \in \mathbf{C}[X]$, non divisible par Q tel que $P = Q^k R$.
 - c. En déduire que si φ n'est pas injectif, alors n est pair.
 - d. Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$ en fonction de la valeur de n .
4. On suppose dans cette question que Q possède une racine double α .
 - a. Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant à $\text{Ker}(\varphi)$, alors α est racine de P .
 - b. Déterminer le noyau de φ .

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 7

► Exercice 1 : décomposition spectrale d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in F &\Leftrightarrow z = -x - y \Leftrightarrow (x, y, z) = (x, y, -x - y) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) \\ &\Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect}((1, 0, -1), (0, 1, -1)).\end{aligned}$$

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et la famille $(1, 0, -1), (0, 1, -1)$ en est génératrice.

Puisque ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, elle est libre et donc forme une base de F .

De même, $(x, y, z) \in G \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -1, 1) \Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect}((1, -1, 1))$.

Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et une base en est donnée par la famille formée du seul vecteur $(1, -1, 1)$.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Prouvons par analyse-synthèse qu'il existe un unique $(u, v) \in F \times G$ tel que $(x, y, z) = u + v$.

Analyse : supposons que $(x, y, z) = u + v$, avec $u = (u_1, u_2, u_3) \in F$ et $v = (v_1, v_2, v_3) \in G$.

Alors $u_3 = -u_1 - u_2$ et $v_1 = -v_2 = v_3$.

Donc $(x, y, z) = (u_1 + v_1, u_2 - v_1, -u_1 - u_2 + v_1)$. Et donc

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = x \\ u_2 - v_1 = y \\ -u_1 - u_2 + v_1 = z \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 + L_2} \begin{cases} u_1 + v_1 = x \\ u_2 - v_1 = y \\ v_1 = x + y + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -y - z \\ u_2 = x + 2y + z \\ v_1 = x + y + z \end{cases}$$

On en déduit que $u_3 = -u_1 - u_2 = -x - y$.

Synthèse : posons $u = (-y - z, x + 2y + z, -x - y)$ et $v = (x + y + z, -x - y - z, x + y + z)$.

Alors on a bien $u \in F$ (la somme de ses coordonnées est nulle), $v \in G$ et $u + v = (x, y, z)$.

Ainsi, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G , si bien que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

3. Première étude de f

3.a. Puisque f possède $\mathbb{R}^3$ pour espace de départ et d'arrivée, il s'agit de prouver sa linéarité.

Soient donc $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}f(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (2(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + (\lambda z + z'), -(\lambda x + x') - (\lambda z + z'), (\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z')) \\ &= \lambda(2x + y + z, -x - z, x + y + 2z) + (2x' + y' + z', -x' - z', x' + y' + 2z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z').\end{aligned}$$

Donc f est bien linéaire et donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3.b. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Nous souhaitons donc prouver qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$(a, b, c) = f(x, y, z)$.

Mais pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(a, b, c) = f(x, y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = a \\ -x - z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases} \xLeftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x + y + 2z = c \\ -x - z = b \\ 2x + y + z = a \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{cases} x + y + 2z = c \\ y + z = b + c \\ -y - 3z = a - 2c \end{cases} \xLeftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x + y + 2z = c \\ y + z = b + c \\ -2z = a + b - c \end{cases}$$

Astuce

Un Vect est toujours un sous-espace vectoriel. Donc cela nous dispense de prouver la stabilité de F par combinaisons linéaires.

Ce système est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, donc il possède une unique solution, si bien que (a, b, c) possède un unique antécédent par f .

Ce qui signifie que f est bijective, et donc surjective.

Mais en plus elle est injective, si bien que $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

3.c. La bijectivité vient d'être prouvée.

Pour déterminer f^{-1} , il nous faut donc déterminer l'unique antécédent d'un élément $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, et donc terminer la résolution du système de la question précédente. Reprenons donc le calcul là où nous l'avons laissée :

$$\begin{cases} x + y + 2z = c \\ y + z = b + c \\ -2z = a + b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = a + b \\ y + z = b + c \\ z = \frac{-a-b+c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a-b-c}{2} \\ y = \frac{a+3b+c}{2} \\ z = \frac{-a-b+c}{2} \end{cases}$$

Et donc l'unique antécédent de (a, b, c) est $\frac{1}{2}(a - b - c, a + 3b + c, -a - b + c)$, si bien que

$$\boxed{f^{-1} : (a, b, c) \mapsto \frac{1}{2}(a - b - c, a + 3b + c, -a - b + c) .}$$

3.d. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors

$$f^2(x, y, z) = f(2x + y + z, -x - z, x + y + 2z) = (4x + 3y + 3z, -3x - 2y - 3z, 3x + 3y + 4z).$$

Et donc

$$\begin{aligned} 3f(x, y, z) - 2(x, y, z) &= 3(2x + y + z, -x - z, x + y + 2z) - 2(x, y, z) \\ &= (4x + 3y + 3z, -3x - 2y - 3z, 3x + 3y + 4z) = f^2(x, y, z). \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f^2 = 3f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3}$.

4. **Projecteurs associés à f**

4.a. On a $p^2 = (f - \text{id}_{\mathbb{R}^3})^2 = f^2 - 2f + \text{id}_{\mathbb{R}^3} = 3f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3} - 2f + \text{id}_{\mathbb{R}^3} = f - \text{id}_{\mathbb{R}^3} = p$.

Puisque par ailleurs p est linéaire car somme d'applications linéaires, c'est un projecteur.

De même,

$$q^2 = (2\text{id}_{\mathbb{R}^3} - f)^2 = 4\text{id}_{\mathbb{R}^3} - 4f + f^2 = 4\text{id}_{\mathbb{R}^3} - 4f + 3f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3} = 2\text{id}_{\mathbb{R}^3} - f = q.$$

Et donc q est un projecteur.

On a clairement $p + q = f - \text{id}_{\mathbb{R}^3} + 2\text{id}_{\mathbb{R}^3} - f = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Et $2p + q = 2f - 2\text{id}_{\mathbb{R}^3} + 2\text{id}_{\mathbb{R}^3} - f = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.

4.b. La formule est clairement vraie pour $n = 0$ et $n = 1$ par la question précédente.

Commençons par remarquer que p et q commutent, puisque

$$p \circ q = p \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^3} - p) = p - p^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)} \text{ et } q \circ p = q \circ (\text{id}_{\mathbb{R}^3} - q) = q - q^2 = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}.$$

Donc par la formule du binôme, pour tout $n \geq 2$,

$$f^n = (2p + q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k p^k q^{n-k} = 2^n p^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k p^{k-1} \underbrace{p \circ q}_{=0} q^{n-k-1} + q^n.$$

Puisque par ailleurs, $p^n = p$ (car $p^2 = p$) et $q^n = q$, il reste donc

$$\boxed{f^n = 2^n p + q.}$$

4.c. La bijectivité avait déjà été prouvée, mais nous allons la retrouver puisque

$$f \circ (2^{-1}p + q) = (2p + q) \circ (2^{-1}p + q) = p^2 + 2p \circ q + 2^{-1}q \circ p + q^2 = p + q = \text{id}_{\mathbb{R}^3}.$$

Et sur le même principe, $(2^{-1}p + q) \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$.

Donc f est bijective¹, et $f^{-1} = 2^{-1}p + q$.

$(a - b)^2$
Notons que l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, utilisée ici dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ est un cas particulier du binôme et nécessite que a et b commutent. C'est le cas ici puisque id commute avec tout endomorphisme.

¹ Ce qu'on retrouve même si on l'avait déjà prouvé.

- 4.d. Exactement sur le même principe qu'à la question 4.b, pour $n < 0$ on peut appliquer le binôme de Newton à

$$f^n = (f^{-1})^{-n} = \left(2^{-1}\right)^{-n} p + q = 2^n p + q.$$

5. Commençons par noter que pour $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$,

$$p(x, y, z) = f(x, y, z) - (x, y, z) = (x + y + z, -x - y - z, x + y + z)$$

$$q(x, y, z) = 2(x, y, z) - f(x, y, z) = (-y - z, x + 2y + z, -x - y)$$

Reprenons les calculs effectués à la question 2 : si $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, alors

$$(x, y, z) = \underbrace{(-y - z, x + 2y + z, -x - y)}_{\in F} + \underbrace{(x + y + z, -x - y - z, x + y + z)}_{\in G}$$

si bien que la projection sur G parallèlement à F est $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, -x - y - z, x + y + z)$
qui est donc q .

Et alors la projection sur F parallèlement à G est $\text{id}_{\mathbf{R}^3} - q = p$.

► Exercice 2 : étude d'une suite implicite

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Notons $f_n : \begin{cases} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \ln(x) + nx \end{cases}$.

Alors f_n est strictement croissante car somme de fonctions qui le sont. Puisque par ailleurs $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, par le théorème de la bijection², f_n réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$.

Et donc il existe un unique $x_n \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $\ln(x_{n+1}) + (n+1)x_{n+1} = 0$, si bien que

$$f_n(x_{n+1}) = \ln(x_{n+1}) + nx_{n+1} = -x_{n+1} < 0 = f_n(x_n).$$

Puisque f_n est strictement croissante, et que $f_n(x_{n+1}) < f_n(x_n)$, on a donc $x_{n+1} < x_n$, si bien que (x_n) est (strictement) décroissante.

3. Puisque (x_n) est décroissante et minorée par 0, par le théorème de la limite monotone elle converge vers un réel ℓ . Puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \geq 0$, alors par passage à la limite, $\ell \geq 0$.

Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. Alors $nx_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, et $\ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell)$.

Mais pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\ln(x_n) = -nx_n$, si bien que $\ln(\ell) = -\infty$, ce qui est absurde.

On en déduit donc que $\ell = 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $y_n = nx_n = -\ln(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Et par ailleurs, pour $n \in \mathbf{N}$, $\ln(x_n) + nx_n = 0$, soit encore

$$\ln\left(\frac{y_n}{n}\right) + y_n = 0 \text{ donc } \ln(y_n) + y_n = \ln(n).$$

5. Puisque $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, par croissances comparées, $\ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(y_n)$, si bien que

$$y_n + \ln(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} y_n + o(y_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y_n.$$

Ainsi, $\ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} y_n$, si bien que $x_n = \frac{y_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n}$.

6. Notons $z_n = x_n - \frac{\ln n}{n}$, de sorte que $x_n = \frac{\ln n}{n} + z_n$.

On a alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\ln\left(\frac{\ln n}{n} + z_n\right) + n\left(\frac{\ln n}{n} + z_n\right) = 0.$$

² Qui s'applique puisque f_n est continue.

Astuce

Parcourir rapidement le sujet n'est généralement pas une mauvaise idée, ici l'équivalent de la question 5 dit clairement que $x_n \rightarrow 0$. Si ça ne dit pas comment le prouver, ça nous dit déjà ce qu'on doit prouver.

Rappel

On a $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$.

Mais $\ln\left(\frac{\ln n}{n} + z_n\right) = \ln\left(\frac{\ln n}{n} \left(1 + \frac{nz_n}{\ln n}\right)\right) = \ln(\ln n) - \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{nz_n}{\ln n}\right)$.

Or $\frac{nz_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $z_n = x_n - \frac{\ln n}{n} = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Et donc

$$\ln\left(1 + \frac{nz_n}{\ln n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{nz_n}{\ln n} = o(nz_n).$$

Il vient donc

$$\ln(\ln n) - \ln(n) + o(nz_n) + \ln(n) + nz_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 0$$

si bien que $-\ln(\ln n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} nz_n + o(nz_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nz_n$.

On en déduit que $z_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(\ln n)}{n}$ et donc que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln(\ln n)}{n} + o\left(\frac{\ln(\ln n)}{n}\right).$$

► Exercice 3 : étude d'une suite de polynômes

1.a. On a donc $P_1 = 2XP_0 = \boxed{2X}$ et $P_2 = 2XP_1 - \frac{1}{2}(1+X^2) \times 2 = \boxed{3X^2 - 1}$.

1.b. Prouvons par récurrence simple sur $\mathbf{N}$ que $\deg(P_n) \leq n$.

Pour $n \in \{0, 1, 2\}$ cela découle de la question précédente.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\deg(P_n) \leq n$. Alors $\deg(2XP_n) = \deg(P_n) + 1 \leq n + 1$ et

$\deg((1+X^2)P'_n) = 2 + \deg(P'_n) \leq 2 + n - 1 \leq n + 1$.

Et donc P_{n+1} est la somme de polynômes de degré au plus $n + 1$: c'est un polynôme de degré au plus $n + 1$.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\deg(P_n) \leq n$, si bien que $\boxed{P_n \in \mathbf{R}_n[X]}$.

1.c. Le coefficient dominant de P_0 est 1, celui de P_1 est 2, et enfin le coefficient dominant de P_2 vaut 3. Il semble légitime de supposer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, le coefficient dominant de P_n est $n + 1$.

Prouvons par récurrence sur n que $\deg(P_n) = n$ et que le coefficient de degré n de P_n est $n + 1$.

L'initialisation a déjà été faite. Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que P_n soit de degré n et de coefficient dominant égal à $n + 1$.

Notons alors $P_n = (n + 1)X^n + Q_n$ avec $Q_n \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Donc $P'_n = (n + 1)nX^{n-1} + Q'_n$, avec $\deg Q'_n \leq n - 2$.

On a alors

$$P_{n+1} = 2(n+1)X^{n+1} + 2XQ_n - \frac{1}{n+1}(1+X^2)\left((n+1)X^{n-1} + Q'_n\right) = \underbrace{(n+2)X^{n+2} + 2XQ_n - nX^{n-1} - \frac{1}{n+1}(1+X^2)Q'_n}_{\in \mathbf{R}_n[X]}.$$

Et donc $\deg(P_{n+1}) = n + 1$ et le coefficient dominant de P_{n+1} est $n + 2$.

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, P_n est de degré n , de coefficient dominant égal à $n + 1$.

2.a. Là encore, procédons par récurrence puisque $P_0(-X) = P_0 = (-1)^0 P_0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$.

Alors par dérivation d'une composée, $-P'_n(-X) = (-1)^n P'_n(X)$, donc $P'_n(-X) = (-1)^{n+1} P'_n(X)$.

Et donc

$$P_{n+1}(-X) = -2XP_n(-X) - \frac{1}{n+1}(1+(-X)^2)P'_n(-X) = (-1)^{n+1} \left(2XP_n(X) - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P'_n(X)\right) = (-1)^{n+1} P_{n+1}(X).$$

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)}$.

2.b. Notons $P_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$.

$$\text{Alors } P_{2n}(-X) = \sum_{k=0}^{2n} a_k (-X)^k = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k X^k.$$

Remarque

Les mêmes méthodes prouvent que la dérivée d'une fonction paire, lorsqu'elle existe, est impaire et vice-versa.

Mais puisque $P_{2n}(-X) = P_{2n}(X)$, par identification des coefficients, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, $a_k = (-1)^k a_k$.

Et en particulier, si k est impair, alors $a_k = -a_k$, donc $a_k = 0$.

De même, puisque $P_{2n+1}(-X) = -P_{2n+1}(X)$, alors les coefficients de degré pair de P_{2n+1} sont nuls.

3. Pour changer, raisonnons par récurrence ! On a bien $P'_1 = 2 = (0+1)P_0$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $P'_{n+1} = (n+2)P_n$. Alors

$$\begin{aligned} P'_{n+2} &= \left(2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2}(1+X^2)P'_{n+1} \right)' \\ &= \left(2XP_{n+1} - (1+X^2)P_n \right)' && \text{Hypothèse de récurrence.} \\ &= 2XP'_{n+1} + 2P_{n+1} - 2XP_n - (1+X^2)P'_n \\ &= 2XP'_{n+1} + 2P_{n+1} - 2XP_n - (n+1)(2XP_n - P_{n+1}) && \text{C'est la définition de } P_{n+1}. \\ &= 2X(n+2)P_n + 2P_{n+1} - 2XP_n - (2n+2)XP_n + (n+1)P_{n+1} && \text{Hypothèse de récurrence.} \\ &= (n+3)P_{n+1}. \end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, P'_{n+1} = (n+2)P_n.}$

4. Puisque $P_{2n+1}(0)$ est le coefficient de degré 0 de P_{2n+1} , par la question 2.b, $\boxed{P_{2n+1}(0) = 0.}$
Pour $n \in \mathbf{N}$, notons qu'en utilisant à la fois la définition de P_n et la question précédente, on obtient

$$P_{2n+2}(0) = 2 \times 0 \times P_{2n+1}(0) - \frac{1}{2n+2} (1+0^2) P'_{2n+1}(0) = -\frac{1}{2n+2} (2n+2) P_{2n}(0) = -P_{2n}(0).$$

Puisque $P_0(0) = 1$, $P_2(0) = -1$, puis $P_4(0) = 1$, et de proche en proche, $\boxed{P_{2n}(0) = (-1)^n.}$

5. Par la question 3, P_3 est une primitive³ de $4P_2 = 12X^2 - 4$, et par la question précédente, son coefficient constant est nul.

Donc $\boxed{P_3 = 4X^3 - 4X.}$

Puis sur le même principe, P_4 est une primitive de $5P_3 = 20X^3 - 20X$, de coefficient constant égal à 1.

Donc $\boxed{P_4 = 5X^4 - 10X^2 + 1.}$

6. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2} (1+X^2) P'_{n+1} = 2XP_{n+1} - \frac{1}{n+2} (1+X^2) (n+2)P'_n = 2XP_{n+1} - (1+X^2) P_n.$$

D'où l'identité demandée.

- 7.a. Par la question précédente, on a donc pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_{n+2} - 2xz_{n+1} + (1+x^2)z_n = 0$.
Donc (z_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 2xX + (1+x^2)$.

Son discriminant est $4X^2 - 4(1+x^2) = -4$.

Ses racines sont donc $\frac{2x \pm 2i}{2} = x \pm i$.

Il existe donc deux complexes λ et μ tels que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_n = \lambda(x+i)^n + \mu(x-i)^n$.
Puisque $z_0 = 1$ et $z_1 = 2x$, on a donc

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda(x+i) + \mu(x-i) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ \lambda(x+i) + (1-\lambda)(x-i) = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 - \lambda \\ 2i\lambda - i + x = 2x \end{cases}$$

De la seconde équation on tire $2i\lambda = x + i$, et donc $\lambda = \frac{x+i}{2i}$.

Et donc $\mu = 1 - \lambda = 1 - \frac{x+i}{2i} = -\frac{x-i}{2i}$.

Et ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, z_n = \frac{1}{2i}(x+i)^{n+1} - \frac{1}{2i}(x-i)^{n+1}.}$

- 7.b. Par la question précédente, les deux polynômes⁴ P_n et $\frac{1}{2i}((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1})$ coïncident sur $\mathbf{R}$, et donc sont égaux.

Hypothèse de récurrence.

C'est la définition de P_{n+1} .

Hypothèse de récurrence.

³ C'est plutôt la fonction polynomiale associée qui est une primitive de celle associée à $4P_2$.

⁴ A priori dans $\mathbf{C}[X]$.

8. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$P_n(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)^{n+1} - (z-i)^{n+1} = 0 \Leftrightarrow (z+i)^{n+1} = (z-i)^{n+1}.$$

Il est clair que i n'est pas racine de P_n . Donc pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a

$$P_n(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{n+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{z+i}{z-i} \in \mathbf{U}_{n+1}.$$

Donc z est racine de P_n si et seulement si il existe $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = \zeta^k$, où $\zeta = \exp\left(\frac{2i\pi}{n+1}\right)$.

Il est clair que pour $k = 0$, l'équation $\frac{z+i}{z-i} = \zeta^0 = 1$ n'a pas de solution. Soit donc $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors

$$\frac{z+i}{z-i} = \zeta^k \Leftrightarrow z+i = \zeta^k(z-i) \Leftrightarrow z = i \frac{\zeta^k + 1}{\zeta^k - 1} = i \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} - 1}.$$

Utilisons alors une factorisation par l'angle moitié,

$$i \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} + 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} - 1} = i \frac{e^{\frac{ik\pi}{n+1}} e^{\frac{ik\pi}{n+1}} + e^{-\frac{ik\pi}{n+1}}}{e^{\frac{ik\pi}{n+1}} e^{\frac{ik\pi}{n+1}} - e^{-\frac{ik\pi}{n+1}}} = i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}.$$

Et donc les racines de P_n sont les $\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}$, avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{\sin t}$ est dérivable sur $]0, \pi[$, de dérivée égale à $t \mapsto -\frac{1}{\sin^2 t}$, donc strictement décroissante.

En particulier, elle est injective, donc les $\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}$, $1 \leq k \leq n$ sont deux à deux distincts.

Ainsi, nous avons là n racines distinctes de P_n , qui est de degré n , donc il est scindé sur $\mathbf{R}$, à racines simples.

9. On a donc

$$P_n = (n+1) \prod_{k=1}^n \left(X - \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} \right).$$

⚠ Attention !

Ne pas oublier le coefficient dominant.

10. La somme des racines est la plus facile, puisqu'elle est égale au coefficient de degré $n-1$ de P_n , divisé par son coefficient dominant. Mais la question 2.b prouve que le coefficient de degré $n-1$ de P_n est toujours nul, donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} = 0.$$

De même, le produit des racines est $(-1)^n \frac{P_n(0)}{n+1}$.

► Si n est impair, $P_n(0) = 0$, donc $\prod_{k=1}^n \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} = 0$.

► Si $n = 2p$ est pair, alors nous avons prouvé que $P_n(0) = (-1)^p$.

Et donc
$$\prod_{k=1}^n \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} = \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

Prévisible

Si n est impair, $n+1$ est pair, et donc pour $k = \frac{n+1}{2}$, $\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)} = 0$. Et donc le produit est nul puisque l'un de ses facteurs l'est.

► Exercice 4 : un endomorphisme sur les polynômes

1. Commençons par prouver que φ est à valeurs dans $\mathbb{C}_n[X]$, ce qui n'est pas totalement évident, car s'il est clair que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P)$ est un polynôme, il se pourrait que son degré dépasse n .

Soit donc $P \in \mathbb{C}_n[X]$, et notons $P = \sum_{k=0}^n \alpha_k X^k$.

Notons également $Q = aX^2 + bX + c$. Alors $\deg(P'Q) = \deg(P') + \deg(Q) \leq n-1+2 = n+1$, et de même, $\deg(PQ') = \deg(P) + \deg(Q') \leq n+1$.

Mais le coefficient de degré $n+1$ de $2P'Q$ est $2n\alpha_n a$, et celui de nPQ' est $n\alpha_n 2a$.

Donc le coefficient de degré $n+1$ de $\varphi(P)$ est nul, si bien que $\deg(\varphi(P)) \leq n$, et donc $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

Coeff. dominant

Le coefficient dominant d'un produit est le produit des coefficients dominants.

Reste à prouver la linéarité de φ : soient $P_1, P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\varphi(\lambda P_1 + P_2) = 2(\lambda P_1 + P_2)'Q - n(\lambda P_1 + P_2)Q' = 2(\lambda P_1' + P_2')Q - \lambda n P_1 Q' - n P_2 Q' = \lambda(2P_1'Q - n P_1 Q') + (2P_2'Q - n P_2 Q') = \lambda \varphi(P_1) + \varphi(P_2).$$

Ainsi, φ est linéaire, et donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

2. Étude d'un cas particulier

- 2.a. On a donc $P_1 = -2Q' = -4X - 2u$, $P_2 = 2Q - 2XQ' = 2X^2 + 2uX + 2v - 2X(2X + u) = -2X^2 + 2v$ et

$$P_3 = 4XQ - 2X^2Q' = 4X^3 + 4uX^2 + 4vX - 2X^2(2X + u) = 2uX^2 + 4vX.$$

Et donc $P_3 = -uP_2 - vP_1 \in \text{Vect}(P_1, P_2)$.

- 2.b. Nous savons que l'image par φ d'une famille génératrice est génératrice de $\text{Im } \varphi$. Or $(1, X, X^2)$ est génératrice⁵ de $\mathbb{C}_2[X]$, donc (P_1, P_2, P_3) est génératrice de $\text{Im } \varphi$. Mais puisque $P_3 \in \text{Vect}(P_1, P_2)$, $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \text{Vect}(P_1, P_2)$. Et P_1, P_2 étant de degrés distincts, (P_1, P_2) est libre, donc est une base de $\text{Im } \varphi$.

⁵ C'est la base canonique de $\mathbb{C}_2[X]$.

- 2.c. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}_2[X]$. Alors

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(\varphi) &\Leftrightarrow 2P'Q = 2PQ' \Leftrightarrow (2aX + b)(X^2 + uX + v) = (aX^2 + bX + c)(2X + u) \Leftrightarrow 2aX^3 \\ &\Leftrightarrow 2aX^3 + (b + 2au)X^2 + (bu + 2av)X + bv = 2aX^3 + (au + 2b)X^2 + (bu + 2c)X + cu \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} au + 2b = b + 2au \\ bu + 2av = bu + 2c \\ bv = cu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = au \\ av = c \\ bv = cu \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - vL_1 - uL_2} \begin{cases} b = au \\ c = av \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (a, b, c) = (a, au, av) \Leftrightarrow P = a(X^2 + uX + v) \Leftrightarrow P \in \text{Vect}(Q). \end{aligned}$$

Et donc $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(Q)$.

- 3.a. Notons λ_1, λ_2 les deux racines distinctes de Q .

On a donc $2P'Q = nPQ'$, de sorte que λ_1 et λ_2 sont des racines de PQ' .

Autrement dit, $P(\lambda_1)Q'(\lambda_1) = 0$. Mais λ_1 étant racine simple de Q , $Q'(\lambda_1) \neq 0$, et donc $P(\lambda_1) = 0$.

De même, λ_2 est racine de P . Mais Q est scindé⁶, et toutes ses racines sont racines de P , avec une multiplicité en P supérieure à celle en Q puisqu'il s'agit de racines simples de P .

⁶ C'est le théorème de d'Alembert-Gauss.

Ainsi, Q divise P .

- 3.b. L'ensemble $\{p \in \mathbb{N}^* \mid Q^p \text{ divise } P\}$ est une partie non vide⁷ de $\mathbb{N}$, majorée pour des raisons de degré (par exemple elle est majorée par $\deg P$). Donc cette partie possède un plus grand élément k .

⁷ Elle contient 1.

Ainsi, Q^k divise P , si bien qu'il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = Q^k R$.

Et puisque Q^{k+1} ne divise pas P , Q ne divise pas R .

- 3.c. Supposons que φ ne soit pas injectif. Alors $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$, et donc il existe $P \in \text{Ker}(\varphi)$ différent de 0.

Comme à la question précédente, notons $P = Q^k R$, avec R non divisible par Q .

On a alors $\varphi(P) = 0_{\mathbb{C}[X]}$, soit encore $2P'Q = nPQ'$.

Ce qui s'écrit aussi $2kQ^{k-1}Q'QR + 2Q^kR'Q = nQ^kRQ'$, et donc $2kQ'R + 2QR' = nQ'R$.
On en déduit que $2QR' = (n - 2k)Q'R$.

Puisque λ_1 et λ_2 sont racines simples de Q , ce ne sont pas des racines de Q' .

Si $n - 2k$ était non nul, on aurait alors $\underbrace{(n - 2k)Q'(\lambda_1)R(\lambda_1)}_{\neq 0} = 2Q(\lambda_1)R(\lambda_1) = 0$ et donc

$$R(\lambda_1) = 0.$$

Et de même $R(\lambda_2) = 0$. Donc comme à la question 3.a, Q divise R , ce qui est absurde.

Ainsi, $n - 2k = 0$, et donc $n = 2k$ est pair.

3.d. La contraposée de la question précédente prouve que si n est impair, $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

Et si n est pair, alors le calcul de la question précédente prouve que tout polynôme non nul de $\text{Ker}(\varphi)$ est de la forme $P = Q^kR$, avec $R \in \mathbb{C}[X]$ et $n = 2k$, donc $k = \frac{n}{2}$.

Mais puisque $\deg(P) \leq n$, et que $\deg(Q^k) = 2k = n$, nécessairement $\deg R = 0$, et donc R est un polynôme constant.

Donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $P = \lambda Q^{n/2}$.

Ainsi, $\text{Ker}(\varphi) \subset \{\lambda Q^{n/2}, \lambda \in \mathbb{C}\} = \text{Vect}(Q^{n/2})$.

Inversement, $\varphi(Q^{n/2}) = 2\frac{n}{2}Q^{n/2-1}Q'Q - 2Q^{n/2}Q' = 0$, si bien que $Q^{n/2} \in \text{Ker}(\varphi)$. Puisque $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel, on a donc $\text{Vect}(Q^{n/2}) \subset \text{Ker}(\varphi)$.

Et donc par double inclusion, $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(Q^{n/2})$.

4. Notons que α étant racine double de Q , il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $Q = \lambda(X - \alpha)^2$.

4.a. Puisque $P \in \text{Ker}(\varphi)$, alors $2P'Q = nPQ'$, soit encore $2\lambda(X - \alpha)^2P' = 2n\lambda P(X - \alpha)$.

Et donc après simplification⁸ par $2\lambda(X - \alpha)$, $(X - \alpha)P' = nP$.

Et donc $X - \alpha \mid P$, si bien que α est racine de P .

4.b. Soit $P \in \text{Ker}(\varphi)$ non nul, et soit m la multiplicité de α en tant que racine de P .

Soit également $R \in \mathbb{C}[X]$, tel que $P = (X - \alpha)^m R$, avec $R(\alpha) \neq 0$.

Alors comme ci-dessus,

$$(X - \alpha)P' = nP \text{ donc } (X - \alpha)m(X - \alpha)^{m-1}R + (X - \alpha)^{m+1}R' = n(X - \alpha)^m R.$$

Ce qui après simplification par $(X - \alpha)^m$ nous donne $mR + (X - \alpha)R' = nR$.

Donc $(X - \alpha)R' = (n - m)R$, de sorte que $(n - m)R(\alpha) = 0$. Puisque $R(\alpha) \neq 0$, nécessairement $m = n$.

Et comme $\deg P \leq n$, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $P = \mu(X - \alpha)^n \in \text{Vect}((X - \alpha)^n)$.

Inversement, on a

$$\varphi((X - \alpha)^n) = 2n(X - \alpha)^{n-1}\lambda(X - \alpha)^2 - n(X - \alpha)^n 2\lambda(X - \alpha) = 0$$

et donc $(X - \alpha)^n \in \text{Ker}(\varphi)$.

Puisque $\text{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}_n[X]$, $\text{Vect}((X - \alpha)^n) \subset \text{Ker}(\varphi)$, de sorte que par double inclusion, $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}((X - \alpha)^n)$.

⁸ Légitime car $\mathbb{C}[X]$ est un anneau intègre.

Remarque

On notera au passage que $P' \mid P$, et que nous avons fait en TD un exercice dont le but était justement de déterminer tous les polynômes tels que $P' \mid P$.

Remarque

Si n est pair, on obtient encore, comme dans le cas de la question 3,

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(Q^{n/2}).$$

C'est pour cette raison que la question 2, avec $n = 2$ pair, ne nécessitait pas de distinction suivant le nombre de racines distinctes de Q .