

DEVOIR SURVEILLÉ 6

► Exercice 1 : une équation polynomiale

On cherche dans cet exercice à déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = P(X)P(X-1) \quad (\star)$$

où $P(X^2)$, $P(X)$ et $P(X-1)$ désignent des composées et non des produits.

1. Déterminer les polynômes constants satisfaisant (\star) .
2. Déterminer, sous forme exponentielle, les racines complexes de $X^4 + X^2 + 1$. En déduire sa décomposition en produit d'irréductibles dans $\mathbf{C}[X]$ et dans $\mathbf{R}[X]$.
3. En déduire que $X^2 + X + 1$ vérifie (\star) .

Dans toute la suite, P est un polynôme non constant qui satisfait (\star) .

4. Montrer que si un complexe α est racine de P , alors α^2 et $(\alpha + 1)^2$ sont aussi racines de P .
5. On suppose que 0 est une racine de P , et on définit alors une suite en posant $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$.
 - a. Montrer que (u_n) est strictement croissante, puis déterminer sa limite.
 - b. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(u_n) = 0$.
 - c. En déduire que 0 n'est pas racine de P .
6. Soit $\alpha \in \mathbf{C}^*$ une racine de P .
 - a. Montrer que $\forall n \in \mathbf{N}$, $P(\alpha^{2^n}) = 0$.
 - b. En déduire qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\alpha^k = 1$.
 - c. Prouver alors que $|\alpha| = |\alpha + 1| = 1$.
 - d. En déduire que $\alpha \in \{j, j^2\}$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
7. Prouver que les polynômes satisfaisant (\star) sont le polynôme nul et les $(X^2 + X + 1)^k$, $k \in \mathbf{N}$.

► Exercice 2 : développement asymptotique d'une suite

On rappelle que $\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $f_n : \begin{cases} [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto (-1)^n \sin(x) - \frac{1}{x} \end{cases}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
 - a. Montrer que f_n réalise une bijection de $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle I_n que l'on précisera.
 - b. En déduire que l'équation $|x \sin x| = 1$ possède une unique solution dans $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
Dans toute la suite de l'exercice, on notera x_n cette solution.
2. Prouver que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.
 - a. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $y_n = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{x_n}$.
 - b. En déduire un équivalent de y_n , puis que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
4. À l'aide de la relation de la question 3.a, en déduire qu'il existe un réel α , que l'on précisera, tel que

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{1}{n\pi} + \alpha \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

► **Exercice 3 : endomorphismes annulés par $X^2 - 5X + 6$.**

Partie I. Étude d'un exemple

Dans cette partie, on note E le \mathbf{C} -espace vectoriel \mathbf{C}^3 .

On note alors (e_1, e_2, e_3) sa base canonique, avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

On considère alors $\varphi : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ (x, y, z) & \longmapsto (x + y + z, 2y, -2x + 2y + 4z) \end{cases}$.

1. Prouver que φ est un endomorphisme de E .
2.
 - a. L'application φ est-elle injective ?
 - b. Calculer $\varphi(e_i)$ pour $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. En déduire que pour tout $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, $e_i \in \text{Im}(\varphi)$.
 - c. Est-ce que φ est surjective ?
3. Montrer que $\varphi^2 - 5\varphi + 6\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. On note $F = \text{Ker}(\varphi - 3\text{id}_E)$ et $G = \text{Ker}(2\text{id}_E - \varphi)$.
 - a. Déterminer une base de F , et montrer que $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid -x + y + z = 0\}$.
 - b. Prouver que F et G sont supplémentaires dans E .

Partie II. Endomorphismes annulés par $X^2 - 5X + 6$

Dans cette partie, on considère E un \mathbf{C} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 - 5u + 6\text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

5. Montrer que u est un automorphisme de E , et que $u^{-1} \in \text{Vect}(\text{id}_E, u)$.

On pose à présent $p = 3\text{id}_E - u$ et $q = u - 2\text{id}_E$.

6.
 - a. Montrer que $u \circ q = q \circ u = 3q$ et que $u \circ p = p \circ u = 2p$.
 - b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u^n = 3^n q + 2^n p$.
 - c. Vérifier que cette relation reste valable pour $n = -1$, et en déduire que

$$\forall n \in \mathbf{Z}, u^n = 3^n q + 2^n p.$$

7.
 - a. Montrer que $E = \text{Im } p + \text{Im } q$.
 - b. Prouver que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - c. Déduire des deux questions précédentes que $E = \text{Ker } p \oplus \text{Ker } q$.
8. Prouver que p est la projection sur $G = \text{Ker } q$ parallèlement à $F = \text{Ker } p$. Que dire alors de q ?

► **Exercice 4 : polynômes à valeurs entières**

Dans cet exercice, on note $\mathcal{A} = \{P \in \mathbf{R}[X] \mid \forall n \in \mathbf{Z}, P(n) \in \mathbf{Z}\}$.

S'il est évident qu'un polynôme dont tous les coefficients sont entiers est dans \mathcal{A} , la réciproque est fautive, par exemple car $\frac{X(X+1)}{2}$ ou $\frac{X(X+1)(2X+1)}{6}$ sont dans \mathcal{A} .

Le but de l'exercice est de caractériser les polynômes de \mathcal{A} .

1. Montrer que \mathcal{A} est un sous-anneau de $\mathbf{R}[X]$.

Partie I. L'opérateur de différence sur les polynômes

Dans la suite, on note $\Delta : \begin{cases} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$ où $P(X+1)$ désigne la composée du polynôme P par le polynôme $X+1$.

2. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.
3. Soit $k \in \mathbf{N}$. Déterminer le degré de $\Delta(X^k)$, et en déduire, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P .
4. Justifier soigneusement que $\text{Ker}(\Delta) = \mathbf{R}_0[X]$.
5. Prouver par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$, et pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\Delta^p(P) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} P(X+k)$.

Partie II. Base des polynômes de Hilbert

Dans la suite de l'exercice, on note $H_0 = 1$ et pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $H_i = \frac{X(X-1) \cdots (X-i+1)}{i!} = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X-k)$.

6.
 - a. Pour $i \in \mathbf{N}$, déterminer le degré de H_i , puis prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a $X^n \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$.
 - b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, (H_0, H_1, \dots, H_n) est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
7.
 - a. Montrer que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $\Delta(H_i) = H_{i-1}$.
 - b. En déduire que pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}$, $\Delta^j(H_i) = \begin{cases} H_{i-j} & \text{si } i \leq j \\ 0_{\mathbf{R}[X]} & \text{sinon} \end{cases}$.
8. Soit $n \in \mathbf{N}$, et soit $P \in \mathbf{R}_n[X]$.
 - a. Justifier qu'il existe un unique $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{i=0}^n a_i H_i$.
 - b. Prouver que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_i = [\Delta^i(P)](0)$.
 - c. En déduire que $P \in \mathcal{A}$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $[\Delta^i(P)](0) \in \mathbf{Z}$.
9. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer que $P \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, \deg P \rrbracket, P(k) \in \mathbf{Z}$.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 6

► Exercice 1 : une équation polynomiale

1. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme constant. Alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $P = \lambda$.
On a alors $P(X^2) = \lambda$ et $P(X)P(X-1) = \lambda^2$, donc P satisfait (\star) si et seulement si $\lambda^2 = \lambda$, soit si et seulement si $\lambda \in \{0, 1\}$.
Donc $P = 0_{\mathbf{C}[X]}$ et $P = 1$ sont les seuls polynômes de $\mathbf{C}_0[X]$ satisfaisant (\star) .

2. Un complexe z est racine de $X^4 + X^2 + 1$ si et seulement si z^2 est une racine de $X^2 + X + 1$.

Mais les racines de $X^2 + X + 1$ sont $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$ et $\bar{j} = j^2$.

Les racines carrées de j sont $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ et $-e^{i\frac{\pi}{3}} = j^2$.

Et les racines carrées de j^2 sont j et $-j$.

Donc les quatre racines complexes de $X^4 + X^2 + 1$ sont $j, j^2, -j$ et $-j^2$.

Puisque $X^4 + X^2 + 1$ est de degré 4, elles sont toutes simples, et étant unitaire¹,

$$X^4 + X^2 + 1 = (X - j)(X + j)(X - j^2)(X + j^2).$$

C'est là sa décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbf{C}[X]$.

Pour obtenir celle en produit d'irréductibles de $\mathbf{R}[X]$, il faut regrouper deux à deux les racines conjuguées (ici $j^2 = \bar{j}$ et $-j^2 = -\bar{j}$). On a alors

$$(X - j)(X - j^2) = X^2 - (j + j^2)X + 1 = X^2 + X + 1 \text{ et } (X + j)(X + j^2) = X^2 - X + 1.$$

Donc $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$.

3. Notons $P(X) = X^2 + X + 1$. Alors $P(X^2) = X^4 + X^2 + 1$.
Et $P(X-1) = (X-1)^2 + (X-1) + 1 = X^2 - X + 1$, de sorte que

$$P(X)P(X-1) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) = X^4 + X^2 + 1 = P(X^2).$$

Donc $X^2 + X + 1$ satisfait bien (\star) .

4. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ une racine de P .

Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha-1) = 0 \times P(\alpha-1)$, donc déjà α^2 est une racine de P .

De plus, on a également² $P((\alpha+1)^2) = P(\alpha+1)P(\alpha)$, et donc $P((\alpha+1)^2) = 0$, de sorte que $(\alpha+1)^2$ est aussi racine de P .

- 5.a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n + 1)^2 = u_n^2 + u_n + 1$.

Mais le polynôme $X^2 + X + 1$ ne possède pas de racine réelle, et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc (u_n) est strictement croissante.

- 5.b. Puisque (u_n) est croissante, par le théorème de la limite monotone, elle possède une limite soit finie, soit égale à $+\infty$.

Supposons par l'absurde qu'elle possède une limite finie ℓ .

Alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$, et donc par opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 1)^2 = (\ell + 1)^2$.

Par ailleurs, $u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ et donc par unicité de la limite, $(\ell + 1)^2 = \ell$.

Soit encore $\ell^2 + \ell + 1 = 0$, ce qui est absurde puisque nous avons déjà signalé que cette équation ne possède pas de solution réelle.

On en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- 5.c. D'après la question 4, si u_n est racine de P , alors u_{n+1} est également racine de P .

Donc une récurrence rapide, initialisée par le fait que $u_0 = 0$ est racine de P prouve que

pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P(u_n) = 0$.

- 5.d. Puisque la suite (u_n) est strictement croissante, elle est injective.

Et donc P possède une infinité de racines, ce qui est absurde puisque P n'est pas constant,

¹ Ne pas oublier le coefficient dominant quand on factorise en produit d'irréductibles !

Rappel

$$1 + j + j^2 = \sum_{\omega \in \mathbf{U}_3} \omega = 0.$$

² En évaluant (\star) en $\alpha + 1$.

et donc en particulier n'est pas le polynôme nul.

On en déduit donc que 0 n'est pas racine de P .

- 6.a. Par la question 4, si α est racine de P , alors α^2 est racine de P .
Donc $(\alpha^2)^2$ est également racine de P . Donc $(\alpha^4)^2 = \alpha^8$ est racine de P . Etc.

Une récurrence rapide prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, α^{2^n} est racine de P .

- 6.b. Puisque P est non nul, il possède un nombre fini de racines complexes.
Et donc en particulier, les α^{2^n} ne peuvent être tous distincts : il existe $k < \ell$ deux entiers distincts tels que $\alpha^{2^k} = \alpha^{2^\ell}$, et donc $\alpha^{2^\ell - 2^k} = 1$.
Il existe donc bien une puissance strictement positive de α qui est nulle.

- 6.c. On en déduit donc que α est une racine de l'unité, et en particulier est de module 1.
Puisque $(\alpha + 1)^2$ est aussi racine de P , nécessairement non nulle par la question 5, le même raisonnement montre que $|(\alpha + 1)^2| = 1$, et donc $|\alpha + 1| = 1$.

Donc on a bien $|\alpha| = |\alpha + 1| = 1$.

- 6.d. Cherchons les complexes $\alpha = a + ib$ vérifiant $|\alpha| = 1$ et $|\alpha + 1| = 1$.

Ceci équivaut à $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (a + 1)^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, ce qui n'est possible que pour

$$a^2 = (a + 1)^2 \Leftrightarrow 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Et alors si $a = -\frac{1}{2}$, $b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, de sorte que les deux valeurs possibles de α sont $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$ et $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j} = j^2$.

7. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ non nul solution de (\star) . Si on note λ le coefficient dominant de P , alors celui de $P(X^2)$ est encore λ , quand celui de $P(X)P(X-1)$ est λ^2 . Donc $\lambda = \lambda^2$, et λ étant non nul, $\lambda = 1$.

Puisque les seules racines de P sont j et/ou $-j^2$, il existe deux entiers³ k et ℓ tels que $P = (X - j)^k(X - j^2)^\ell$.

Alors $P(X^2) = (X^2 - j)^k(X^2 - j^2)^\ell$.

Mais à la question 2, nous avons déjà déterminé les racines carrées de j et de j^2 , si bien que $X^2 - j = (X - j^2)(X + j^2)$ et $X^2 - j^2 = (X + j)(X - j)$.

Et $P(X - 1) = (X - 1 - j)^k(X - 1 - j^2)^\ell$.

Or il est très classique que $1 + j + j^2 = 0$, et donc $1 + j = -j^2$ et $1 + j^2 = -j$, si bien que $P(X - 1) = (X + j^2)^k(X + j)^\ell$.

Finalement, il vient

$$P(X)^2 = (X + j^2)^k(X - j^2)^k(X + j)^\ell(X - j)^\ell = P(X)P(X - 1) = (X - j)^k(X - j^2)^\ell(X + j^2)^k(X + j)^\ell.$$

Dans le membre de gauche, la multiplicité de j est égale à ℓ , dans celui de droite elle est égale à k . Donc $k = \ell$.

Et donc $P(X) = [(X - j)(X - j^2)]^k = (X^2 + X + 1)^k$.

Inversement, il est facile de vérifier qu'un polynôme de cette forme est solution de (\star) , notamment car $X^2 + X + 1$ vérifie (\star) et que l'ensemble des polynômes vérifiant (\star) est stable par produit.

Et donc les polynômes vérifiant (\star) sont le polynôme nul et les $(X^2 + X + 1)^k$, $k \in \mathbf{N}$.

³ Éventuellement nuls.

Rappel

Le seul polynôme qui possède une infinité de racines est le polynôme nul.

► Exercice 2 : développement asymptotique d'une suite

- 1.a. La fonction f_n est dérivable sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ par somme de fonctions dérivables, avec $f'_n : x \mapsto (-1)^n \cos(x) + \frac{1}{x^2}$.

► Si n est pair, alors pour tout $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $\cos(x) \geq 0$ et donc $(-1)^n \cos(x) \geq 0$, si bien que $f'_n(x) > 0$.

► De même si n est impair, alors pour tout $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \leq 0$ et donc $(-1)^n \sin(x) \geq 0$

si bien que $f'_n(x) > 0$.

Dans tous les cas, f_n est strictement croissante sur $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$.

Enfin, $f_n(n\pi) = (-1)^n \sin(n\pi) - \frac{1}{n\pi} = -\frac{1}{n\pi} < 0$.

Et $f_n(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = (-1)^{2n} \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} > 0$.

Par le théorème de la bijection, qui s'applique car f_n est continue et strictement croissante,

f_n réalise une bijection de $[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ sur $I_n = \left[-\frac{1}{n\pi}, 1 - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}\right]$.

1.b. Puisque $0 \in I_n$, il existe un unique $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ tel que $f_n(x) = 0$.

Or pour $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x)$ est du signe de $(-1)^n$, si bien que $|\sin(x)| = (-1)^n \sin(x)$.

Et donc $|x \sin(x)| = 1 \Leftrightarrow (-1)^n x \sin(x) = 1 \Leftrightarrow (-1)^n \sin(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f_n(x) = 0$.

Donc il existe un unique $x \in [n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}]$ tel que $|x \sin(x)| = 1$.

2. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n\pi \leq x_n \leq n\pi + \frac{\pi}{2}$.

Or $n\pi + \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$. Donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$.

3.a. On a $\sin(y_n) = \sin(x_n - n\pi) = (-1)^n \sin(x_n)$.

Mais par définition de x_n , $(-1)^n \sin(x_n) = \frac{1}{x_n}$, si bien que $\sin(y_n) = \frac{1}{x_n}$.

Par ailleurs, $y_n \in [0, \frac{\pi}{2}] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, si bien que $y_n = \text{Arcsin} \frac{1}{x_n}$.

3.b. Puisque $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Or $\text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, et donc $y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$.

Et donc $x_n - n\pi \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, si bien que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

4. On a donc

$$y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x_n} + \frac{1}{6x_n^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right).$$

Puisque $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n\pi$, $\frac{1}{x_n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3 \pi^3}$ et donc $o\left(\frac{1}{x_n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Par ailleurs,

$$\frac{1}{x_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{n^2 \pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{1}{n^2 \pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Et $\frac{1}{x_n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi^3 n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n^3 \pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Donc il vient

$$y_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{n^3 \pi^3} + \frac{1}{6\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \frac{5}{6n^3 \pi^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

D'où $x_n = y_n + n\pi \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{5}{6\pi^3 n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Détails

C'est la version «équivalents» du théorème des gendarmes.

Rappel

$\theta = \text{Arcsin}(x)$ si et seulement si $\begin{cases} \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \sin \theta = x \end{cases}$

Détails

$$\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + o(u).$$

► Exercice 3 : endomorphismes annulés par $X^2 - 5X + 6$.

Partie I. Étude d'un exemple

1. Soient $(x, y, z), (x', y', z') \in E$, et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= \varphi(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x' + \lambda y + y' + \lambda z + z, 2\lambda y + 2y', -2\lambda x - 2x' + 2\lambda y + 2y' + 4\lambda z + 4z') \\ &= \lambda(x + y + z, 2y, -2x + 2y + 4z) + (x' + y' + z', 2y', -2x' + 2y' + 4z') \end{aligned}$$

$$= \lambda\varphi(x, y, z) + \varphi(x', y', z').$$

Donc φ est linéaire de E dans E , donc φ est un endomorphisme de E .

2.a. Soit $(x, y, z) \in \text{Ker } \varphi$. Alors

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = 0 \\ -2x + 2y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ -x + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

Donc $\text{Ker } \varphi = \{0_E\}$, si bien que φ est injective.

2.b.

2.c. On a alors $\varphi(e_1) = (1, 0, -2)$, $\varphi(e_2) = (1, 2, 2)$ et $\varphi(e_3) = (1, 0, 4)$.

Mais $\varphi(e_3) - \varphi(e_1) = 6e_3$, donc $e_3 = \frac{1}{6}\varphi(-1, 0, 3) \in \text{Im } \varphi$.

Puis $e_1 = \varphi(e_1) + 2e_3 \in \text{Im}(\varphi)$.

Et alors $e_2 = \frac{1}{2}(\varphi(e_2) - e_1 - 2e_3) \in \text{Im}(\varphi)$.

2.d. Par la question précédente, $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient e_1, e_2, e_3 , donc qui contient $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3) = E$. Ainsi, $\text{Im}(\varphi) = E$, et donc φ est surjective.

3. Pour prouver que $\varphi^2 - 5\varphi + 6\text{id}_E$ est nulle, le plus simple est sûrement de prouver qu'elle s'annule en tous les vecteurs de la base canonique.

Or, $\varphi^2(e_1) = \varphi(1, 0, -2) = (-1, 0, -10) = 5(1, 0, -2) - 6e_1 = (5\varphi - 6\text{id}_E)(e_1)$.

De même, $\varphi^2(e_2) = \varphi(1, 2, 2) = (5, 4, 10) = 5(1, 2, 2) - 6(0, 1, 0) = (5\varphi - 6\text{id}_E)(e_2)$.

Et enfin, $\varphi^2(e_3) = \varphi(1, 0, 4) = (5, 0, 14) = 5(1, 0, 4) - 6(0, 0, 1) = (5\varphi - 6\text{id}_E)(e_3)$.

Et donc $\varphi^2 - 5\varphi + 6\text{id}_E$ est un endomorphisme de E , nul sur une base de E , c'est l'application nulle.

4.a. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. Alors

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(\varphi - 3\text{id}_E) \Leftrightarrow \varphi(x, y, z) - 3(x, y, z) = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y, z) = (x, 0, 2x) = x(1, 0, 2) \Leftrightarrow (x, y, z) \in \text{Vect}(1, 0, 2).$$

Donc $\text{Ker}(\varphi - 3\text{id}_E)$ possède pour base⁴ la famille formée du seul vecteur $(1, 0, 2)$.

De même,

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(2\text{id}_E - \varphi) \Leftrightarrow 2(x, y, z) - \varphi(x, y, z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -x + y + z = 0.$$

Et donc $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid -x + y + z = 0\}$.

4.b. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$. Prouvons par analyse-synthèse que (x, y, z) s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Analyse : supposons que $(x, y, z) = u + v$, avec $u \in F$ et $v \in G$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda(1, 0, 2)$ et $v = (b + c, b, c)$, avec $b, c \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Alors } \begin{cases} \lambda + b + c = x \\ b = y \\ 2\lambda + c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + c = x - y \\ b = y \\ 2\lambda + c = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -x + y + z \\ b = y \\ c = 2x - 2y - z \end{cases}.$$

Donc une telle écriture, si elle existe, est unique.

Synthèse : posons $u = (-x + y + z)3(1, 0, 2)$, et $v = (2x - y - z, y, 2x - 2y - z)$.

Alors il est clair que $u \in F$ et $v \in G$, et de plus, $u + v = (x, y, -2x + 2y + 2z + 2x - 2y - z) = (x, y, z)$.

Ainsi, $\forall (x, y, z) \in E, \exists!(u, v) \in F \times G, (x, y, z) = u + v$, donc F et G sont supplémentaires dans E .

Détails

On a utilisé ici le fait que $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^3 .

Rappel

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

⁴ Elle est libre car formée d'un seul vecteur non nul.

Partie II. Endomorphismes annulés par $X^2 - 5X + 6$.

5. On a donc $\text{id}_E = \frac{1}{6}(5u - u^2) = u \circ \left(\frac{5\text{id}_E - u}{6}\right) = \left(\frac{5\text{id}_E - u}{6}\right) \circ u$.

Donc u est bijectif⁵, avec $u^{-1} = \frac{5\text{id}_E - u}{6} \in \text{Vect}(\text{id}_E, u)$.

⁵ Car nous venons de déterminer une application v telle que $u \circ v = v \circ u = \text{id}_E$.

6.a. On a $u \circ q = u^2 - 2u = 5u - 6\text{id}_E - 2u = 3u - 6\text{id}_E = 3q$.

Et sur le même principe, $q \circ u = u^2 - 2u = 3q$.

De même, $u \circ p = p \circ u = u^2 - 2u = 2p$.

6.b. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

Pour $n = 0$, on a $u^0 = \text{id}_E = q + p = 3^0q + 2^0p$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u^n = 3^nq + 2^n p$. Alors

$$u^{n+1} = u^n \circ u = (3^nq + 2^n p) \circ u = 3^nq \circ u + 2^n p \circ u = 3^{n+1}q + 2^{n+1}p.$$

Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u^n = 3^nq + 2^n p$.

6.c. On a $\frac{1}{3}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{3}u - \frac{2}{3}\text{id}_E + \frac{3}{2}\text{id}_E - \frac{1}{2}u = \frac{5}{6}\text{id}_E - \frac{1}{6}u = u^{-1}$.

Et alors une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u^{-n} = 3^{-n}q + 2^{-n}p$.

7.a. Notons que $\text{id}_E = p + q$, et donc pour tout $x \in E$, $x = \text{id}_E(x) = p(x) + q(x) \in \text{Im } p + \text{Im } q$.

Donc $E \subset \text{Im } p + \text{Im } q$, et puisque $\text{Im } p + \text{Im } q$ est un sous-espace vectoriel de E , alors on a l'égalité $E = \text{Im } p + \text{Im } q$.

7.b. On a $p \circ q = (3\text{id}_E - u) \circ (u - 2\text{id}_E) = 3u - u^2 - 6\text{id}_E + 2u = -(u^2 - 5u + 6\text{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Et le même calcul prouve que $q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

7.c. Puisque $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$, alors $\text{Im } q \subset \text{Ker } p$. Et de même, $\text{Im } p \subset \text{Ker } q$.

Donc $E = \text{Im } p + \text{Im } q \subset \text{Ker } p + \text{Ker } q$, si bien que $E = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.

Soit à présent $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Alors $x = \text{id}_E(x) = p(x) + q(x) = 0_E + 0_E = 0_E$. Et donc $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q = \{0_E\}$, si bien que $\text{Ker } p$ et $\text{Ker } q$ sont en somme directe, et donc⁶ sont supplémentaires dans E .

8. Soit $x \in E$. Alors $x = p(x) + q(x)$, avec $p(x) \in \text{Ker } q$ et $q(x) \in \text{Ker } p$.

Et puisque $p(x) = p(x)$, p associe à un vecteur sa composante suivant $\text{Ker } q$ dans la somme directe $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(q)$. C'est donc la projection sur $\text{Ker } q$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Et alors $q = \text{id}_E - p$ est la projection sur $\text{Ker } p$ parallèlement à $\text{Ker } q$.

Projecteurs

Rappelons que les projecteurs vont toujours par deux : si p est la projection sur F parallèlement à G , alors $q = \text{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F .

► Exercice 4 : polynômes à valeurs entières

1. Il est évident que $1 \in \mathcal{A}$.

Soient $P, Q \in \mathcal{A}$. Alors pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $(P - Q)(n) = P(n) - Q(n) \in \mathbf{Z}$

et $(PQ)(n) = P(n)Q(n) \in \mathbf{Z}$.

Donc $P - Q \in \mathcal{A}$ et $PQ \in \mathcal{A}$, si bien que \mathcal{A} est un sous-anneau de $\mathbf{R}[X]$.

Partie I. L'opérateur de différence sur les polynômes

2. Soient $P, Q \in \mathbf{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\Delta(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda(X+1) - \lambda P(X) + Q(X+1) - Q(X) = \lambda \Delta(P) + \Delta(Q).$$

Donc Δ est linéaire, de $\mathbf{R}[X]$ dans $\mathbf{R}[X]$, donc est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

3. On a $\Delta(X^0) = \Delta(1) = 1 - 1 = 0_{\mathbf{R}[X]}$. Et pour $k \in \mathbf{N}^*$, par la formule du binôme,

$$\Delta(X^k) = (1+X)^k - X^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.$$

Donc $\Delta(X^k)$ est de degré inférieur ou égal à $k - 1$, et son coefficient de degré $k - 1$ est

$$\binom{k}{k-1} = k \neq 0, \text{ si bien que } \deg \Delta(X^k) = k - 1.$$

Si P est un polynôme constant, alors $\Delta(P) = 0_{\mathbf{R}[X]}$ est de degré $-\infty$.

Et si P est de degré $n \geq 1$, avec $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, avec $a_n \neq 0$.

Alors par linéarité de Δ , $\Delta(P) = \sum_{k=0}^n a_k \Delta(X^k) = \sum_{k=1}^n a_k \Delta(X^k)$.

Mais $\sum_{k=1}^{n-1} a_k \Delta(X^k)$ est de degré inférieur ou égal à $n-2$ et $a_n \Delta(X^n)$ est de degré $n-1$, si bien que $\deg(\Delta(P)) = n-1$.

Ainsi, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $\deg(\Delta(P)) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \deg P \leq 0 \\ \deg P - 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Degré

Rappelons que si $\deg P < \deg Q$, alors $\deg(P+Q) = \deg(Q)$.

4. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On a donc

$$P \in \text{Ker } \Delta \Leftrightarrow \Delta(P) = 0_{\mathbf{R}[X]} \Leftrightarrow \deg \Delta(P) = -\infty \Leftrightarrow \deg(P) \leq 0 \Leftrightarrow P \in \mathbf{R}_0[X].$$

Et donc $\text{Ker } \Delta = \mathbf{R}_0[X]$, l'ensemble des polynômes constants.

5. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Prouvons par récurrence sur $p \in \mathbf{N}$ que $\Delta^p(P) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} P(X+k)$.

Pour $p=0$, on a $\sum_{k=0}^0 (-1)^{0-k} P(X+k) = P(X) = \Delta^0(P)$.

Soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta^p(P) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} P(X+k)$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta^{p+1}(P) &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} P(X+k+1) - \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} P(X+k) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{p+1-i} \binom{p}{i-1} P(X+i) - \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} P(X+k) \\ &= P(X+p+1) + \sum_{k=1}^p (-1)^{p+1-k} \left(\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k} \right) P(X+k) - (-1)^p P(X) \\ &= (-1)^{p+1-(p+1)} \binom{p+1}{p+1} P(X+p+1) + \sum_{k=1}^p (-1)^{p+1-k} \binom{p+1}{k} P(X+k) + (-1)^{p+1} \binom{p+1}{0} P(X) \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^{p+1-k} \binom{p+1}{k} P(X+k). \end{aligned}$$

Chgt d'indice

On a posé $i = k+1$.

Donc par le principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbf{N}$ et pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$,

$$\Delta^p(P) = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} P(X+k).$$

Partie II. Base des polynômes de Hilbert

6.a. On a $\deg H_0 = 0$ et pour $i \geq 1$, puisque H_i est produit de i polynômes de degré 1,

$$\deg H_i = i.$$

Prouvons alors par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $X^n \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$.

Pour $n=1$, on a $X = X-1+1 = H_1 + H_0 \in \text{Vect}(H_0, H_1)$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $X^k \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_k)$.

Si on note λ le coefficient dominant de H_{n+1} , alors $H_{n+1} = \lambda X^{n+1} + R$, où $R = H_{n+1} - \lambda X^{n+1}$ est un élément de $\mathbf{R}_n[X]$.

Remarque

On peut noter que λ et R sont respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de H_{n+1} par X^{n+1} .

Mais par hypothèse de récurrence, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,
 $X^k \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_k) \subset \text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$, si bien que $\mathbf{R}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) \subset \text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$.
 Et donc $R \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$. Par conséquent, $X^{n+1} = \frac{1}{\lambda} (H_{n+1} - R) \in \text{Vect}(H_0, H_1, \dots, H_{n+1})$.
 Par le principe de récurrence, on a donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $X^n \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$.

Remarque : ici un argument de dimension permettrait d'aller plus vite, puisque (H_0, \dots, H_n) est une famille de cardinal $n+1 = \dim \mathbf{R}_n[X]$ de $\mathbf{R}_n[X]$, libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts.
 C'est donc une base de $\mathbf{R}_n[X]$, si bien que $X^n \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$.

- 6.b. Comme expliqué dans la preuve précédente, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
 $\mathbf{R}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n) \subset \text{Vect}(H_0, H_1, \dots, H_n)$.
 Et puisque H_0, \dots, H_n sont tous de degré inférieur ou égal à n ,
 $\text{Vect}(H_0, H_1, \dots, H_n) \subset \mathbf{R}_n[X]$, si bien que $\mathbf{R}_n[X] = \text{Vect}(H_0, H_1, \dots, H_n)$.

Et alors (H_0, \dots, H_n) est génératrice de $\mathbf{R}_n[X]$, libre car formée de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc c'est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

- 7.a. Si $i = 1$, alors $\Delta(H_1) = X + 1 - X = 1 = H_0$.
 Soit $i \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta(H_i) &= H_i(X+1) - H_i(X) \\ &= \frac{1}{i!} \left(\prod_{k=0}^{i-1} (X+1-k) - \prod_{k=0}^{i-1} (X-k) \right) \\ &= \frac{1}{i!} \left(\prod_{k=-1}^{i-2} (X-k) - \prod_{k=0}^{i-1} (X-k) \right) \\ &= \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-2} (X-k) \times (X+1 - (X - (i-1))) \\ &= \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-2} (X-k) i = \frac{1}{(i-1)!} \prod_{k=0}^{i-2} (X-k) = \boxed{H_{i-1}}. \end{aligned}$$

- 7.b. Soient $(i, j) \in \mathbf{N}$. Puisque $\deg(\Delta(P)) \leq \deg P - 1$, alors $\deg \Delta^j(H_i) \leq \deg H_i - j$, si bien que pour $j > i$, $\deg \Delta^j(H_i) < 0$, et donc $\Delta_j(H_i) = 0_{\mathbf{R}[X]}$.
 Et pour $j \leq i$,

$$\Delta^j(H_i) = \Delta^{j-1}(\Delta(H_i)) = \Delta^{j-1}(H_{i-1}) = \Delta^{j-2}(\Delta(H_{i-1})) = \Delta^{j-2}(H_{i-2}) = \dots = H_{i-j}.$$

- 8.a. Nous avons déjà dit que (H_0, \dots, H_n) est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.
 8.b. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Alors en appliquant Δ^j à l'égalité $P = \sum_{i=0}^n a_i H_i$, il vient

$$\Delta^j(P) = \sum_{i=j}^n a_i \Delta^j(H_i) = \sum_{i=j}^n a_i H_{i-j}.$$

Détails

Les termes avec $i < j$ ont disparu car alors $\Delta^j(H_i) = 0$.

Mais les H_i ont tous 0 pour racine, sauf H_0 qui vaut 1 en 0.
 Et donc en évaluant en 0 l'égalité ci-dessus, il vient

$$[\Delta^j(P)](0) = \sum_{i=j}^n a_i H_{i-j}(0) = a_i.$$

D'après la formule de la question 5, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$[\Delta^i(P)](0) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} P(k).$$

Et donc si $P \in \mathcal{A}$, c'est un entier car somme de produits d'entiers.

Inversement, supposons que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_i \in \mathbf{Z}$.

Prouvons que pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $H_i \in \mathcal{A}$. Pour $i = 0$, c'est évident.

Soit $i \in \mathbf{N}^*$, et $n \in \mathbf{Z}$.

► Si $n \geq i$, alors $H_i(n) = \frac{1}{i!} n(n-1) \cdots (n-i+1) = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i} \in \mathbf{Z}$.

Si $0 \leq n < i$, alors n est l'une des racines de H_i , donc $H_i(n) = 0 \in \mathbf{Z}$.

Enfin si $n < 0$, alors

$$H_i(n) = \frac{1}{i!} n(n-1) \cdots (n-i+1) = \frac{(-1)^n}{i!} (i-1-n)(i-2-n) \cdots (1-n)(-n) = \frac{(-1)^n}{i!} \frac{(i-1-n)!}{(-n-1)!} = (-1)^n \binom{i-1-n}{i} \in \mathbf{Z}.$$

Ainsi, $H_i \in \mathcal{A}$, et donc pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$P(n) = \sum_{i=0}^n \underbrace{a_i}_{\in \mathbf{Z}} \underbrace{H_i(n)}_{\in \mathbf{Z}} \in \mathbf{Z}$$

si bien que $P \in \mathcal{A}$.

9. Le sens \Rightarrow est évident.

Et inversement, si pour tout $k \in \llbracket 0, \deg P \rrbracket$, $P(k) \in \mathbf{Z}$, alors pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$[\Delta^i(P)](0) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} P(k) \in \mathbf{Z}$$

si bien que par la question 8.c, $P \in \mathcal{A}$.

Mieux

On pourrait faire un peu mieux et prouver qu'un polynôme de degré n est dans \mathcal{A} si et seulement si il prend des valeurs entières en $n+1$ entiers consécutifs (ce que nous venons de prouver dans le cas où ces entiers consécutifs sont $0, 1, \dots, n$).