

DEVOIR SURVEILLÉ 5

► Exercice 1 : étude de la suite de terme général $\sqrt{n + \sqrt{n-1 + \dots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}$.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$.

1. Justifier que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n \leq 2\sqrt{n}$.
3. En déduire que $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.
4. Déterminer alors la limite de $u_n - \sqrt{n}$.

► Exercice 2 : suites de rationnels convergeant vers un irrationnel

Dans tout l'exercice, on considère un nombre irrationnel x fixé.

1. Justifier qu'il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de rationnels telle que $r_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$.
2. Prouver qu'une suite (u_n) à valeurs dans $\mathbf{Z}$ qui converge est stationnaire.

Dans la suite, on considère une suite (r_n) , à valeurs rationnelles et qui converge vers x .

On considère également (p_n) et (q_n) deux suites à valeurs entières telles que $\forall n \in \mathbf{N}$, $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ et $q_n > 0$.

On souhaite alors prouver que les deux suites (q_n) et $(|p_n|)$ divergent vers $+\infty$.

3. On raisonne par l'absurde en supposant que (q_n) ne tend pas vers $+\infty$.
 - a. Écrire avec des quantificateurs la négation de $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.
 - b. Prouver alors qu'il existe une suite extraite de (q_n) qui est bornée.
 - c. En déduire qu'il existe une extractrice φ telle que $(q_{\varphi(n)})_n$ converge.
 - d. Justifier que pour un φ comme dans la question précédente, $(p_{\varphi(n)})_n$ converge.
 - e. Aboutir à une contradiction.
4. Prouver enfin que $|p_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

► Exercice 3 : en route vers la formule de Stirling

Dans cet exercice, on note pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$, et $v_n = \ln u_n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$.
2. Soit $a > \frac{1}{2}$. Prouver que $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \frac{1}{2}}{a - \frac{1}{2}}\right)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{t^2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - t^2} dt = v_{n+1} - v_n$.
4. À l'aide de la question précédente, justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.
5. En déduire que (v_n) converge, puis qu'il existe un réel $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \lambda.$$

Ce résultat, connu sous le nom de formule de Stirling sera prouvé en cours plus tard dans l'année, et on prouvera, à l'aide des intégrales de Wallis rencontrées dans un DM précédent, que $\lambda = \sqrt{2\pi}$.

► Problème : quelques matrices circulantes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$a_{n,1} = 1, \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_{i,i+1} = 1$$

et dont tous les autres coefficients sont nuls.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note E_i la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne, égal à 1.

Autrement dit, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, E_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Partie I. Étude du cas $n = 3$.

Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on suppose que $n = 3$, et donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

On note alors $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$

1. Montrer que A est inversible, et déterminer son inverse.
2. On note $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}.$ Calculer le produit PQ , et en déduire que P est inversible et exprimer son inverse en fonction de Q .
3. Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D , que l'on explicitera.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$ Montrer que $AM = MA$ si et seulement si $P^{-1}MP$ est diagonale.

Partie II. Diagonalisation de la matrice A .

On revient à présent au cas général, où $n \geq 2$ est quelconque.

5. Montrer que $AE_1 = E_n$ et que pour tout $j \in \llbracket 2, n \rrbracket, AE_j = E_{j-1}.$
6. En déduire que $A^n = I_n.$
7. On suppose dans cette question qu'il existe des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tels que $A = PDP^{-1}$, où $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$
 - a. Exprimer A^n en fonction de P et des λ_i , et en déduire que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_k \in \mathbb{U}_n.$
 - b. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket,$ et soit $C_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de P . En remarquant que $AP = PD$, montrer que $AC_j = \lambda_j C_j.$

La fin de cette partie a pour but de prouver qu'il existe bien une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}.$

8. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n.$ On note $X_\omega = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}).$ Montrer que $AX_\omega = \omega X_\omega.$

9. Dans la suite, on note $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, de sorte que $U_n = \{1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}\}$.
On note P la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$\forall k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, [P]_{k,\ell} = \zeta^{(k-1)(\ell-1)}.$$

On pourra noter que, avec les notations de la question 8, la $\ell^{\text{ème}}$ colonne de P est la matrice $X_{\zeta^{\ell-1}}$.

On note également $\bar{P}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ obtenue en remplaçant chaque coefficient de P par son conjugué.

- a. Calculer le produit $P\bar{P}$ et en déduire que P est inversible.
 - b. On note $D = \text{Diag}(1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1})$. Montrer que $AP = PD$.
10. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{-1}A^kP$ est une matrice diagonale que l'on précisera.

Partie III. Étude de l'inversibilité d'une matrice

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note alors $B = I_n + A + A^2 + \dots + A^{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

On note également $Q : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1 + z + z^2 + \dots + z^{p-1} \end{cases}$.

Le but de cette partie est de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que B soit inversible.

11. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $Q(z) = 0 \Leftrightarrow z \in U_p \setminus \{1\}$.
12. En déduire que B est inversible si et seulement si $U_p \cap U_n = \{1\}$.
13. Montrer alors que B est inversible si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 5

► Exercice 1 : étude de la suite de terme général $\sqrt{n + \sqrt{n-1} + \dots + \sqrt{2} + \sqrt{1}}$.

1. Une récurrence facile prouve que $(u_n)_{n \geq 1}$ est à valeurs positives.¹
Et alors pour tout $n \geq 2$, $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \geq \sqrt{n}$.
Et donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty}$.

¹ Ce qui permet au passage de justifier que chacun des termes est bien défini, puisque $n + u_{n-1}$ est toujours positif.

2. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$. On a $u_1 = 1 \leq 2\sqrt{1}$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $u_n \leq 2\sqrt{n}$. Alors

$$u_{n+1} = \sqrt{n+1 + u_n} \leq \sqrt{n+1 + 2\sqrt{n}}.$$

Mais par ailleurs

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1 + 2\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n+1} &\Leftrightarrow n+1 + 2\sqrt{n} \leq 4(n+1) \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{n} \leq 3n+3 \\ &\Leftrightarrow 4n \leq 9n^2 + 18n + 9. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant clairement vraie, on a donc bien $\sqrt{n+1 + 2\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n+1}$ et donc $u_{n+1} \leq 2\sqrt{n+1}$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, u_n \leq 2\sqrt{n}}$.

3. Soit $n \geq 2$. Alors

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+u_{n-1}}{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}.$$

Or par la question précédente, on a pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \leq \frac{u_n}{n} \leq 2\frac{\sqrt{n}}{n} \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Puisque $\frac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, par le théorème d'encadrement, $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Et alors pour $n \geq 2$, $0 \leq \frac{u_{n-1}}{n} \leq \underbrace{\frac{u_{n-1}}{n-1}}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$, si bien que $\frac{u_{n-1}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, et donc $\boxed{\frac{u_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1}$.

4. Soit $n \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned} u_n - \sqrt{n} &= \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \right) = \sqrt{n} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} + 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} + 1} \\ &= \sqrt{n} \frac{\cancel{1} + \frac{u_{n-1}}{n} - \cancel{1}}{\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} + 1} = \frac{\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Mais } \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

Puisque par ailleurs, $\sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} + 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$, on en déduit que $\boxed{u_n - \sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}}$.

Astuce

On multiplie au numérateur et au dénominateur par la quantité conjuguée.

⚠ Attention !

On a prouvé que $\frac{u_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et donc $\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n-1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.
S'il est intuitif que $\sqrt{n-1}$ est environ de l'ordre de $\sqrt{n}$, il faut tout de même prouver que $\frac{u_{n-1}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

► Exercice 2 : suites de rationnels convergeant vers un irrationnel

1. C'est tout simplement la caractérisation séquentielle de la densité de $\mathbf{Q}$: tout réel est limite d'une suite de rationnels, et en particulier c'est le cas de x .

2. Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n \in \mathbf{Z}$ et qui converge vers un réel ℓ . Prenons alors $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. Il vient alors

$$\exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \frac{1}{2}.$$

Fixons alors un tel n_0 . Alors pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_{n+1} - u_n| = |u_{n+1} - \ell + \ell - u_n| \leq |u_{n+1} - \ell| + |\ell - u_n| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq 1.$$

Mais pour $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n|$ est un entier naturel. Étant strictement inférieur à 1, il est nul.

Et donc pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = u_n$, si bien que (u_n) est stationnaire.

Notons au passage que ceci prouve que $\ell = u_{n_0} \in \mathbf{Z}$.

- 3.a. Commençons par écrire de manière quantifiée l'assertion $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$:

$$\forall A \in \mathbf{R}, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \geq n_0, q_n > A.$$

Sa négation est donc

$$\exists A \in \mathbf{R}, \forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n \geq n_0, q_n \leq A.$$

- 3.b. Soit donc A tel que $\forall n_0 \in \mathbf{N}, \exists n \geq n_0, q_n \leq A$.

Notons que ceci signifie qu'il existe une infinité de termes de la suite (q_n) qui sont inférieurs ou égaux à A . L'idée est donc de former une suite extraite avec ces termes.

Posons donc $\varphi(0) = \min\{n \in \mathbf{N} \mid q_n \leq A\}$.

Et pour tout $n \in \mathbf{N}$, posons

$$\varphi(n+1) = \min\{k \in \mathbf{N} \mid k \geq \varphi(n) + 1 \text{ et } q_k \leq A\}.$$

Notons que $\varphi(n+1)$ est bien défini puisque pour $n_0 = \varphi(n) + 1$, la définition de A implique qu'il existe $k \geq \varphi(n) + 1$ tel que $q_k \leq A$.

Autrement dit, $\{k \in \mathbf{N} \mid k \geq \varphi(n) + 1 \text{ et } q_k \leq A\}$ est non vide. Et alors comme toute partie non vide de $\mathbf{N}$, elle possède un plus petit élément.

Par construction, on a donc $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}, \varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 > \varphi(n)$, si bien que φ est strictement croissante. C'est donc une extractrice.

Et par construction, on a également, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 < q_{\varphi(n)} \leq A$.

Et donc $(q_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de (q_n) , qui est bornée.

- 3.c. Puisque $(q_{\varphi(n)})$ est bornée, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle possède une suite extraite qui converge.

Ainsi, il existe une extractrice ψ telle que $(q_{(\varphi \circ \psi)(n)})$ converge.

Et donc il existe bien une suite extraite de (q_n) qui converge.

On notera que le φ de l'énoncé est ce que nous avons noté $\varphi \circ \psi$, qui est encore bien une extractrice puisque composée de deux extractrices.

- 3.d. D'après la question 2, on en déduit que $(q_{\varphi(n)})$ est stationnaire, et donc en particulier possède une limite $\ell \in \mathbf{N}^*$.

Mais alors $r_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$, car suite extraite d'une suite convergeant vers x .

Et donc $p_{\varphi(n)} = r_{\varphi(n)} q_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell x$.

Donc la suite à valeurs entières $(p_{\varphi(n)})$ converge, si bien qu'elle est stationnaire², et sa limite est entière. Donc $\ell x \in \mathbf{Z}$, et puisque $\ell \in \mathbf{N}^*$, alors $x = \frac{\ell x}{\ell} \in \mathbf{Q}$, ce qui contredit l'irrationalité de x .

Ainsi, notre hypothèse de départ est fausse, si bien que $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

4. On a $|p_n| = |r_n q_n| = |r_n| |q_n|$.

Or $r_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x$, et donc $|r_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} |x|$.

Puisque $x \notin \mathbf{Q}$, $x \neq 0$, si bien que $|x| > 0$, et puisque $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, alors $|p_n| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Remarque

On a utilisé le fait que si $n \geq n_0$, alors $n+1 \geq n_0$, et donc $|u_{n+1} - \ell| < \frac{1}{2}$.

Formulé autrement

D'ailleurs, une manière de dire que $q_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ est de dire que pour tout $A \in \mathbf{R}$, il n'existe qu'un nombre fini de termes de (q_n) qui sont inférieurs ou égaux à A . Et alors il est clair que sa négation est «il existe A tel qu'une infinité de termes de la suite soient inférieurs ou égaux à A ».

Rappel

Extraire c'est composer à droite par une extractrice. Donc une suite extraite de $(q_{\varphi(n)})$ est de la forme $(q_{(\varphi \circ \psi)(n)})$.

² C'est encore la question 2.

► Exercice 3 : en route vers la formule de Stirling

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \\
 &= \ln \left(\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{(n+1)! e^{n+1}} \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \right) \\
 &= \ln \left(\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}} \cancel{(n+1)}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\cancel{n!} n!}{\cancel{(n+1)!} (n+1)!} \frac{e^n}{e^{n+1}} \right) \\
 &= \ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{e} \right) \\
 &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln(e) \\
 &= \boxed{\left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - 1}.
 \end{aligned}$$

2. Une décomposition en éléments simples nous donne $\frac{1}{a^2 - X^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{a - X} + \frac{1}{a + X} \right)$. Et donc

$$\begin{aligned}
 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{a^2 - t^2} &= \frac{1}{2a} \int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{a - t} + \frac{1}{a + t} \right) dt \\
 &= \frac{1}{2a} [-\ln(a - t) + \ln(a + t)]_{-1/2}^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2a} \left(-\ln \left(a - \frac{1}{2} \right) + \ln \left(a + \frac{1}{2} \right) - \ln \left(a - \frac{1}{2} \right) + \ln \left(a + \frac{1}{2} \right) \right) \\
 &= \boxed{\frac{1}{a} \ln \left(\frac{a + \frac{1}{2}}{a - \frac{1}{2}} \right)}.
 \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que la fraction rationnelle $\frac{X^2}{(n+\frac{1}{2})^2 - X^2}$ n'est pas de degré strictement négatif³ mais

$$\frac{X^2}{(n+\frac{1}{2})^2 - X^2} = \frac{X^2 - (n+\frac{1}{2})^2 + (n+\frac{1}{2})^2}{(n+\frac{1}{2})^2 - X^2} = -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{(n+\frac{1}{2})^2 - X^2}.$$

Et donc

$$\begin{aligned}
 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{t^2}{(n+\frac{1}{2})^2 - t^2} dt &= - \int_{-1/2}^{1/2} 1 dt + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dt}{(n+\frac{1}{2})^2 - t^2} \\
 &= -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \ln \left(\frac{n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \right) \\
 &= -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) = \boxed{v_{n+1} - v_n}.
 \end{aligned}$$

³ Et donc il ne faut pas chercher sa décomposition en éléments simples.

Détails

On a utilisé la question précédente avec $a = n + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque pour tout $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $0 \leq \frac{t^2}{(n+\frac{1}{2})^2 - t^2}$, alors par positivité de

l'intégrale, $\boxed{v_{n+1} - v_n \geq 0}$.

Par ailleurs, une rapide étude de $t \mapsto (n+\frac{1}{2})^2 - t^2$ prouve que son minimum est atteint en $-\frac{1}{2}$ et en $\frac{1}{2}$, et qu'il vaut

$$\left(n + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = n^2 + n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = n^2 + n = n(n+1).$$

Et donc pour tout $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a $n(n+1) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - t^2$, si bien que⁴

⁴ En passant à l'inverse et en multipliant par $t^2 \geq 0$.

$$\frac{t^2}{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - t^2} \leq \frac{t^2}{n(n+1)}.$$

Et donc par croissance de l'intégrale, $v_{n+1} - v_n \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{t^2}{n(n+1)} dt \leq \frac{1}{n(n+1)} \int_{-1/2}^{1/2} t^2 dt$.

Cette dernière intégrale se calcule aisément :

$$\int_{-1/2}^{1/2} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{24} \right) = \frac{1}{12}.$$

Enfin, reste à noter que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, et donc $v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$.

5. L'inégalité de la question précédente prouve déjà que (v_n) est croissante. De plus, en sommant les inégalités de la question précédente, on obtient que pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \leq \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Ce qui, après simplification des deux sommes télescopiques nous donne

$$v_n - v_1 \leq \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{12}.$$

Et donc $v_n \leq \frac{1}{12} + v_1$, si bien que (v_n) est majorée, et donc par le théorème de la limite monotone, (v_n) converge vers un réel ℓ .

Et alors, par continuité de l'exponentielle, $u_n = e^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$.

Soit encore $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$. Mais $n^{n+\frac{1}{2}} = n^n \sqrt{n}$.

Et donc par passage à l'inverse, $\frac{n!e^n}{n^n \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\ell}$, si bien qu'en posant $\lambda = e^{-\ell} > 0$, on obtient bien le résultat souhaité.

► Problème : inversibilité d'une matrice circulante

Partie I. Étude du cas $n = 3$

1. Notons que l'inversibilité ne pose aucune difficulté, puisqu'un simple échange de lignes transforme A en I_3 . En revanche, ceci ne donne pas l'inverse, et pour cela appliquons la méthode usuelle.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xleftrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Et donc A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque

On notera que $A^{-1} = A^T$.

2. On a

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 1+j^2+j & 1+j+j^2 \\ 1+j+j^2 & 3 & 1+j+j^2 \\ 1+j+j^2 & 1+j+j^2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mais si on se souvient que $1+j+j^2 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_3} \omega = 0$, il vient $PQ = 3I_3$, et donc P est inversible,

avec $P^{-1} = \frac{1}{3}Q$.

3. On a $P^{-1}A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ j & 1 & j^2 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3j & 0 \\ 0 & 0 & 3j^2 \end{pmatrix} = \boxed{\text{Diag}(1, j, j^2)}$.

4. Puisque $A = PDP^{-1}$, il vient donc

$$AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \Leftrightarrow DP^{-1}MP = P^{-1}MPD.$$

Donc M et A commutent si et seulement si D et $P^{-1}MP$ commutent.

Il s'agit donc de prouver qu'une matrice commute avec D si et seulement si elle est diagonale.

Soit donc $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Alors

$$ND = DN \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & jb & j^2c \\ d & je & j^2f \\ g & jh & j^2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ jd & je & jf \\ j^2g & j^2h & j^2k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} jb = b \\ j^2c = c \\ d = jd \\ j^2f = jf \\ g = j^2g \\ jh = j^2h \end{cases} \Leftrightarrow b = c = d = f = g = h = 0.$$

Plus généralement

C'est un cas particulier d'un résultat qui figure dans le TD : une matrice qui commute à une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts est diagonale.

Donc si et seulement si $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ est diagonale.

Ainsi, $\boxed{A \text{ et } M \text{ commutent si et seulement si } PMP^{-1} \text{ est diagonale.}}$

Partie II. Diagonalisation de A

5. Rappelons que AE_1 est la première colonne de A , dont on constate qu'elle est égale à E_n . De même, pour $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$, AE_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A , qui est égale à E_{j-1} .
6. On en déduit que $A^2E_1 = E_{n-1}$, puis $A^3E_1 = E_{n-2}, \dots, A^nE_1 = E_1$. Puis de même,

$$A^2E_2 = AE_1 = E_n, A^3E_2 = AE_n = E_{n-1}, \dots, A^nE_2 = E_2.$$

Et plus généralement, pour $k \in \llbracket 3, n \rrbracket$,

$$A^2E_k = E_{k-2}, \dots, A^{k-1}E_k = E_1, A^kE_k = E_n, A^{k+1}E_k = E_{n-1}, \dots, A^nE_k = E_k.$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A^nE_k = E_k$, si bien que la $k^{\text{ème}}$ colonne de A^n est égale à E_k . Et donc A^n est la matrice dont les colonnes sont, dans cet ordre, $E_1, \dots, E_n$, si bien que

$$\boxed{A^n = I_n}.$$

- 7.a. On a $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD I_n DP^{-1} = PD^2P^{-1}$. Sur le même principe, une récurrence sans difficulté prouve que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PD^kP^{-1}$. De plus, D étant diagonale, on a $D^k = \text{Diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)$. Et en particulier, $\boxed{A^n = P \text{Diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_n^n) P^{-1}}$.

Mais par ailleurs, $A^n = I_n$, si bien que $I_n = PD^nP^{-1}$ et donc $D^n = P^{-1}P = I_n$.

On en déduit que les coefficients diagonaux de D^n sont tous égaux à 1, si bien que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k^n = 1$, et donc $\boxed{\lambda_k \in \mathbb{U}_n}$.

- 7.b. Rappelons que la $j^{\text{ème}}$ colonne de AP est égale à AC_j . Et par ailleurs, la $j^{\text{ème}}$ colonne de PD est égale au produit de P par la $j^{\text{ème}}$ colonne de D , qui est $\lambda_j E_j$. Or $P\lambda_j E_j = \lambda_j C_j$, et donc $\boxed{AC_j = \lambda_j C_j}$.

Remarque

On pourrait prouver par récurrence sur k que $A^k E_j = E_{r+1}$ où r est le reste de la division euclidienne de $j - 1 - k$ par n .

Rappel

Le produit d'une matrice M par E_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de M .

8. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Notons que le coefficient situé à la $k^{\text{ème}}$ ligne de X_ω est ω^{k-1} .

On a alors $[AX_\omega]_{k,1} = \sum_{p=1}^n [A]_{k,p} [X_\omega]_{p,1}$.

Si $k \neq n$, alors le seul $[A]_{k,p}$ non nul est $[A]_{k,k+1}$, et donc

$$[AX_\omega]_{k,1} = [X_\omega]_{k+1,1} = \omega^k = \omega \omega^{k-1} = [X_\omega]_{k,1}.$$

Et si $k = n$, alors le seul $[A]_{k,p}$ non nul est $[A]_{n,1}$, et donc

$$[AX_\omega]_{k,1} = [X_\omega]_{1,1} = 1 = \omega^n = \omega \omega^{n-1} = \omega [X_\omega]_{n,1}.$$

Donc pour tout k , on a $[AX_\omega]_{k,1} = \omega [X_\omega]_{k,1}$, si bien que $AX_\omega = \omega X_\omega$.

9.a. Soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Alors

$$[P\bar{P}]_{k,\ell} = \sum_{p=1}^n [P]_{k,p} [\bar{P}]_{p,\ell} = \sum_{p=1}^n \zeta^{(p-1)(k-1)} \zeta^{-(p-1)(\ell-1)} = \sum_{p=1}^n \zeta^{(p-1)(k-\ell)} = \sum_{p=1}^n \left(\zeta^{(k-\ell)} \right)^{p-1} = \sum_{p=0}^{n-1} \left(\zeta^{(k-\ell)} \right)^p.$$

Il s'agit donc de la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\zeta^{k-\ell}$, mais il a nous falloir distinguer deux cas suivant que cette raison vaut 1 ou non.

► Si $\zeta^{k-\ell} = 1$, alors $[P\bar{P}]_{k,\ell} = \sum_{p=0}^{n-1} 1 = n$.

► Si $\zeta^{k-\ell} \neq 1$, alors

$$[P\bar{P}]_{k,\ell} = \frac{1 - (\zeta^{(k-\ell)})^n}{1 - \zeta^{k-\ell}} = 0.$$

Reste à noter que $\zeta^{k-\ell} = 1$ si et seulement si n divise $k - \ell$. Et puisque k et ℓ sont tous deux dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $k - \ell$ est divisible par n si et seulement si $k = \ell$.

Ainsi, on a prouvé que $[P\bar{P}]_{k,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell \\ n & \text{si } k = \ell \end{cases}$, si bien que $P\bar{P} = nI_n$.

On en déduit que P est inversible, d'inverse $\frac{1}{n}\bar{P}$.

9.b. Comme mentionné à la question 7.b., la $k^{\text{ème}}$ colonne de AP est égale au produit de A par la $k^{\text{ème}}$ colonne de P , qui ici est $X_{\zeta^{k-1}}$.

Or, nous avons prouvé à la question 8 que $AX_{\zeta^{k-1}} = \zeta^{k-1}X_{\zeta^{k-1}}$.

Par le même argument, la $k^{\text{ème}}$ colonne de D étant égale à $\zeta^{k-1}E_k$, la $k^{\text{ème}}$ colonne de PD est $\zeta^{k-1}PE_k$.

Or PE_k est la $k^{\text{ème}}$ colonne de P , qui est donc $X_{\zeta^{k-1}}$.

Et donc la $k^{\text{ème}}$ colonne de PD est $\zeta^{k-1}X_{\zeta^{k-1}}$.

Ainsi, tous les colonnes de AP et de PD sont les mêmes, si bien que $AP = PD$.

10. On déduit de ce qui précède que $A = PDP^{-1}$, soit encore $P^{-1}AP = D$.

Alors, comme à la question 7.a, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $P^{-1}A^kP = (P^{-1}AP)^k = D^k = \text{Diag}(1^k, \zeta^k, \zeta^{2k}, \dots, \zeta^{(n-1)k})$.

Notons que cette formule vaut encore pour $k = 0$ puisque

$$P^{-1}A^0P = P^{-1}I_nP = I_n = \text{Diag}(1^0, \zeta^0, \dots, \zeta^0).$$

Partie III. Étude de l'inversibilité d'une matrice (d'après un oral des Mines)

11. Il est clair que $Q(1) = p \neq 0$. Soit donc $z \in \mathbf{C} \setminus \{1\}$. Alors

$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow 1 + z + z^2 + \dots + z^{p-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - z^p}{1 - z} = 0 \Leftrightarrow 1 - z^p = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}_p.$$

Et donc il vient bien $Q(z) = 0 \Leftrightarrow (z \neq 1 \text{ et } z \in \mathbf{U}_p) \Leftrightarrow z \in \mathbf{U}_p \setminus \{1\}$.

Bonnes habitudes

Puisqu'on manipule des matrices à coefficients complexes, on préfère ne pas utiliser i pour les indices, pour être sûr de ne pas confondre avec le nombre complexe i .

Remarque

Puisque $\mathbf{U}_n$ est stable par produit, $\zeta^{k-\ell}$ est encore une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité.

Rappel

Il n'est pas nécessaire de vérifier que $\frac{1}{n}\bar{P}P = I_n$, l'égalité $P\frac{1}{n}\bar{P} = I_n$ suffit à justifier de l'inversibilité de P .

12. Puisque pour tout $k \in \mathbf{N}$, $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$, alors

$$B = PD^0P^{-1} + PDP^{-1} + PD^2P^{-1} + \dots + PD^{p-1}P^{-1} = P(I_n + D + D^2 + \dots + D^{p-1})P^{-1}.$$

Mais chacune des D^k est diagonale, si bien que $I_n + D + D^2 + \dots + D^{p-1}$ est diagonale, et plus précisément, il s'agit de la matrice

$$\text{Diag}\left(1 + 1 + 1 + \dots + 1^{p-1}, 1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{p-1}, \dots, 1 + \zeta^{n-1} + \dots + (\zeta^{n-1})^{p-1}\right) = \text{Diag}\left(Q(1), Q(\zeta), Q(\zeta^2), \dots, Q(\zeta^{n-1})\right).$$

Notons donc C cette matrice diagonale, de sorte que $B = PCP^{-1}$.

Or un produit de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ est inversible si et seulement si chacun des facteurs l'est. Et puisque P et P^{-1} sont inversibles, on en déduit que B est inversible si et seulement si C est inversible.

Mais C est une matrice diagonale, qui est donc inversible si et seulement si⁵ tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Donc si et seulement si $Q(1) \neq 0, Q(\zeta) \neq 0, \dots, Q(\zeta^{n-1}) \neq 0$, ou encore si et seulement si pour tout $\omega \in \mathbf{U}_n$, $Q(\omega) \neq 0$.

Par la question 11, cette condition équivaut à $\mathbf{U}_n \cap (\mathbf{U}_p \setminus \{1\}) = \emptyset$.

Et comme on sait que $1 \in \mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p$, elle est bien équivalente à $\mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p = \{1\}$.

Ainsi, B est inversible si et seulement $\mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p = \{1\}$.

13. Par la question précédente, il s'agit donc de prouver que $\mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p = \{1\}$ si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

Commençons par prouver que si n et p ne sont pas premiers entre eux, alors $\mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p$ contient un élément autre que 1.

Supposons donc que n et p ne soient pas premiers entre eux, et soit d un diviseur commun de n et p , différent de 1 (par exemple d peut être le pgcd de n et p). Alors $\frac{n}{d}$ et $\frac{p}{d}$ sont entiers.

Et alors $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n} \frac{n}{d}\right) \in \mathbf{U}_n$. Mais $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{d}\right) = \exp\left(\frac{2i\pi}{p} \frac{p}{d}\right) \in \mathbf{U}_p$.

Puisque $1 \leq \frac{n}{d} \leq n-1$, alors $\omega \neq 1$, si bien que $\mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p \neq \{1\}$.

Inversement, supposons que n et p sont premiers entre eux. Alors par le théorème de Bézout il existe deux entiers a et b tels que $an + bp = 1$.

Soit alors $z \in \mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p$. Alors $z = z^1 = z^{an+bp} = (z^n)^a (z^p)^b = 1^a 1^b = 1$.

Et donc $\mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p = \{1\}$.

Ainsi nous avons bien prouvé que $\mathbf{U}_n \cap \mathbf{U}_p = \{1\}$ si et seulement si n et p sont premiers entre eux, et donc B est inversible si et seulement si n et p sont premiers entre eux.

Commentaire : l'oral des Mines dont est inspiré cette partie contenait en fait une seule question, qui était «montrer que B est inversible si et seulement si n et p sont premiers entre eux». Vous aurez l'an prochain toute une panoplie d'outils à votre disposition pour montrer sans indication que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible, que vous saurez déterminer de tels P et D .

Une matrice A pour laquelle il existe D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$ sera appelée une matrice diagonalisable.

⁵ Rappelons qu'un tel critère d'inversibilité est valable pour une matrice triangulaire, et qu'une matrice diagonale est notamment une matrice triangulaire.