Devoir surveillé 4 (2h)

▸ Exercice 1 : limite d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,dx$.

1. Calculer u_1.
2. a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x\,dx$.

   b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n, et en déduire la valeur de u_3.
3. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$ et en déduire qu'elle est convergente.
4. a. Déterminer un réel $K \in]0,1[$ tel que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin x \leqslant K$.

   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2\pi}{3} K^n$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.
5. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   a. Montrer que la suite $(S_n)_n$ est croissante. En déduire qu'elle possède une limite finie qu'on notera S.

   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x\,(1-\sin x)} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1} x}{\cos x(1-\sin x)}\,dx$.

   c. En déduire que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x(1-\sin x)}$.

   d. À l'aide d'un changement de variable, prouver que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{(1-u)^2(1+u)}$.

   e. En déduire la valeur de S.

▸ Exercice 2 : fonctions sup-continues

Dans cet exercice, on note $E = [0,1]$, et on note $\mathscr{F} = E^E$ l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to [0,1]$.

1. Soit $f \in \mathscr{F}$, et soit A une partie non vide de E. Justifier que $f(\sup A)$ et $\sup f(A)$ sont bien définis.

Une fonction $f \in \mathscr{F}$ est dite sup-continue si

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \neq \emptyset \Rightarrow f(\sup A) = \sup f(A).$$

2. Soient $f, g \in \mathscr{F}$.

   a. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $(g \circ f)(A) = g\big(f(A)\big)$.

   b. En déduire que si f et g sont sup-continues, alors $g \circ f$ est également sup-continue.
3. Montrer si $f \in \mathscr{F}$ est croissante, alors f pour toute partie A non vide de $\mathscr{P}(E)$, $\sup f(A) \leqslant f(\sup A)$.
4. Donner un exemple de fonction croissante qui n'est pas sup-continue.
5. Montrer que si $f \in \mathscr{F}$ est sup-continue, alors f est croissante.
6. Dans cette question, on considère une fonction $f \in \mathscr{F}$ sup-continue.
   On note $Y = \{f^n(0), n \in \mathbf{N}\}$, où $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$.

   a. Montrer que Y est la plus petite (au sens de l'inclusion) partie de E stable par f et contenant 0.

   b. Montrer que $\sup(Y) = \sup f(Y)$.

   c. En déduire que $\sup Y$ est un point fixe de f, et même que c'est le plus petit point fixe de f.

► Exercice 3 : une équation différentielle

On note (E) l'équation différentielle linéaire du second ordre, **à coefficients non constants**

$$(E)\ :\ \operatorname{sh}(x)y''(x) + 2\operatorname{ch}(x)y'(x) + \operatorname{sh}(x)y(x) = 0.$$

On cherche à résoudre (E) sur $I = \mathbf{R}_+^*$, c'est-à-dire à trouver toutes les fonctions deux fois dérivables sur I telles que pour tout $x \in I$, $\operatorname{sh}(x)y''(x) + 2\operatorname{ch}(x)y'(x) + \operatorname{sh}(x)y(x) = 0$.
On note également $(E')\ :\ \operatorname{sh}(x)y'(x) + \operatorname{ch}(x)y(x) = 0$.

1. Résoudre l'équation (E') sur I.
2. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable. On définit alors une fonction z en posant pour tout $x \in I$, $z(x) = f'(x) + \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}f(x)$.
   Montrer que f est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E').
3. En déduire les solutions de (E) sur I.

Correction du Devoir surveillé 4

▸ Exercice 1 : limite d'une suite d'intégrales

1. On a $u_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\ln(2).}$

2.a. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x\,dx = \left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1} x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.}$

2.b. On a

$$u_{n+2}-u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2} x}{\cos x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x}\,dx = -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x\,dx = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.$$

En particulier, pour $n = 1$, on en déduit que $u_3 = -\frac{1}{2}\frac{3}{4} + u_1 = \boxed{\ln(2) - \frac{3}{8}.}$

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et donc $0 \leqslant \sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x$.
Et donc, $\cos x$ étant positif, $\dfrac{\sin^{n+1} x}{\cos x} \leqslant \dfrac{\sin^n x}{\cos x}$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$u_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1} x}{\cos x}\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,dx = u_n.$$

Et donc $\boxed{(u_n)_n \text{ est décroissante.}}$
Puisque (u_n) est à valeurs positives[1], et donc minorée, on en déduit¨ par le théorème de la limite monotone que $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

> **⚠ Attention !**
> Une suite géométrique (q^n) dont la raison q est dans $[0,1]$ est décroissante, alors que pour $q \geqslant 1$, elle est croissante.

[1] Par positivité de l'intégrale.

4.a. Puisque sin est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin x \leqslant \sin\frac{\pi}{3} \leqslant \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\in]0,1[}$.

Dans la suite, on note donc $\boxed{K = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$

4.b. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $0 \leqslant \sin^n x \leqslant K^n$, et par ailleurs $\cos x \geqslant \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, donc $0 \leqslant \dfrac{\sin^n x}{\cos x} \leqslant 2K^n$.
Et donc par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant u_n \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2K^n\,dx = \frac{2\pi}{3}K^n$.
Puisque $K \in]0,1[$, $K^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

5.a. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geqslant 0$, donc (S_n) est croissante.
Par ailleurs, en reprenant l'encadrement de u_k obtenu à la question 4.b on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $S_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2\pi}{3}K^k$.
Mais $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{2\pi}{3}K^k = \frac{2\pi}{3}\frac{1-K^{n+1}}{1-K} \leqslant \frac{2\pi}{3(1-K)}$. Et donc (S_n) est majorée.
Étant croissante, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle possède une limite finie.}}$

> **☠ Danger !**
> Un majorant doit être une **constante** (indépendante de n).
> Il n'est donc pas question de s'arrêter à
> $$S_n \leqslant \frac{2\pi}{3}\frac{1-K^{n+1}}{1-K},$$
> car cette quantité dépend de n.

5.b. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin x \neq 1$. Et donc quel que soit $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k x}{\cos x} = \frac{1-\sin^{n+1} x}{1-\sin x}$$

de sorte que par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^k x}{\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k x}{\cos x}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} \sum_{k=0}^{n} \sin^k x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1-\sin x)}\, dx \\ &= \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1-\sin x)}\, dx.} \end{aligned}$$

5.c. Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos(x)(1-\sin x) \geqslant \frac{1}{2}$, et donc $0 \leqslant \dfrac{1}{\cos x(1-\sin(x))} \leqslant 2$, si bien que

$$0 \leqslant \frac{\sin^{n+1} x}{\cos x(1-\sin x)} \leqslant 2K^{n+1}$$

et donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x(1-\sin x)}\, dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2K^{n+1}\, dx \leqslant \frac{2\pi}{3} K^{n+1}.$$

Et donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos x}\, dx = 0$.

On en déduit donc que

$$\boxed{S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x(1-\sin x)}\, dx.}$$

Méthode

Trouver le bon changement de variable est toujours délicat.

Ici on a de toutes façons plutôt envie de faire un changement de variable du type sin, cos ou tan afin de faire disparaître les fonctions trigonométriques.

Les bornes de l'intégrales doivent permettre de choisir, puisque $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$.

5.d. Réalisons le changement de variable $t = \sin x$, de sorte que $dt = \cos x\, dx$, et donc

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x(1-\sin x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\left(1-\sin^2 x\right)(1-\sin x)}\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{\left(1-t^2\right)(1-t)} = \boxed{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(1-t)^2(1+t)}.} \end{aligned}$$

5.e. Reste à calculer l'intégrale précédente, ce qui nécessite d'intégrer une fraction rationnelle, et donc de déterminer sa décomposition en éléments simples.

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{(X-1)^2(X+1)}$ est de la forme

$$\frac{1}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1}. \qquad (\star)$$

En multipliant $(\star)$ par $(X-1)^2$ et en évaluant en $X = 1$, il vient $\frac{1}{2} = b$.
En multipliant $(\star)$ par $X+1$ et en évaluant en $X = -1$, il vient $c = \frac{1}{4}$.
Enfin, en évaluant $(\star)$ en $X = 0$, on obtient $1 = -a + b + c$ et donc $a = -\frac{1}{4}$.
Et donc enfin,

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{(t-1)^2} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t+1} \\ &= \frac{1}{4}\left[\ln(1+t) - \ln(|t-1|) - \frac{2}{t-1}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}-1} - 2\right) \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{3}-2} - 2\right) = \boxed{\frac{1}{4}\ln\left(7+4\sqrt{3}\right) + \sqrt{3} + \frac{3}{2}.} \end{aligned}$$

Détails

Pour se débarasser des racines au dénominateur, penser à la quantité conjuguée.

▸ Exercice 2 : fonctions sup-continues

1. Puisque A et $f(A)$ sont des parties non vides[2] de $[0,1]$, elles sont majorées par 1, donc possèdent une borne supérieure.
Reste tout de même à justifier que $f(\sup A)$ est bien défini, c'est-à-dire que $\sup(A)$ est encore dans $[0,1]$.
Puisque 1 est un majorant de A, et que $\sup A$ est le plus petit des majorants de A, alors $\sup(A) \leqslant 1$.
Par ailleurs, A étant non vide, il existe au moins un élément $a \in A$.
Et alors $a \leqslant \sup(A)$, et puisque $a \geqslant 0$, alors $0 \leqslant \sup A$.
Ainsi, $\sup(A) \in [0,1]$, et donc $f(\sup A)$ est bien défini.

[2] Pour A c'est une hypothèse, et l'image directe d'une partie non vide par une application est toujours non vide.

2.a. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$, et soit $z \in (g \circ f)(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $z = g(f(x))$.
Mais alors $f(x) \in f(A)$, et donc $z = g(f(x)) \in g(f(A))$.
Donc déjà $(g \circ f)(A) \subset g(f(A))$.

Inversement, soit $z \in g(f(A))$. Alors il existe $y \in f(A)$ tel que $z = g(y)$.
Et puisque $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Et alors $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x) \in (g \circ f)(A)$.
Donc $g(f(A)) \subset (g \circ f)(A)$, et donc par double inclusion, $\boxed{(g \circ f)(A) = g(f(A)).}$

2.b. Supposons donc f et g sup-continues, et considérons A une partie non vide E.
Alors $\sup f(A) = f(\sup A)$. Et puisque $f(A)$ est une partie non vide de E,

$$\sup g(f(A)) = g(\sup f(A)) = g(f(\sup A)) = (g \circ f)(\sup A).$$

Comme enfin, $g(f(A)) = (g \circ f)(A)$, on a bien prouvé que pour A non vide, $\sup\big[(g \circ f)(A)\big] = (g \circ f)(\sup A)$, si bien que $\boxed{g \circ f \text{ est sup-continue.}}$

3. Soit $f : E \to E$ croissante, et soit A une partie non vide de E. Alors pour tout $a \in A$, on a $a \leqslant \sup(A)$, si bien que par croissance de f, $f(a) \leqslant f(\sup(A))$.
Ainsi, $f(\sup A)$ est un majorant de $f(A)$, et puisque $\sup f(A)$ est le plus petit des majorants de $f(A)$, il vient donc $\boxed{\sup f(A) \leqslant f(\sup A).}$

4. Considérons l'application $f = \mathbb{1}_{\{1\}} : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases} \end{array} \right.$.
Alors f est croissante, mais si $A = [0,1[$, alors $\sup A = 1$, alors que $f(A) = \{0\}$ et donc $f(\sup A) = f(0) = 0$.
Nous avons donc bien un exemple de fonction croissante mais pas sup-continue.

5. Soit $f \in \mathscr{F}$ sup-continue. Soient alors x, y deux éléments de E avec $x \leqslant y$.
Posons $A = \{x, y\}$, qui est une partie non vide de E. D'une part, $\sup A = \max A = y$ et d'autre part $f(A) = \{f(x), f(y)\}$.
On a alors $\sup(f(A)) = f(\sup A) = f(y)$. Et donc en particulier, puisque $f(x) \in f(A)$, alors $f(x) \leqslant f(y)$. Ainsi, $\forall x, y \in E,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$, si bien que $\boxed{f \text{ est croissante.}}$

> **Sup/max**
> Puisque $f(A)$ ne contient que deux éléments (et que l'ordre est total sur $\mathbf{R}$), le plus grand de ces deux éléments vaut $\max f(A)$.
> Et alors, comme toute partie admettant un plus grand élément, $f(A)$ admet une borne supérieure égal à son plus grand élément :
> $$\sup f(A) = \max f(A).$$

6.a. Il est clair que Y contient $0 = f^0(0)$. Et si $x \in Y$, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x = f^n(0)$. Et donc $f(x) = f^{n+1}(x) \in Y$, si bien que Y est stable par f.
Par ailleurs, si A est une partie de E contenant 0 et stable par f, montrons que $Y \subset A$.
Puisque $0 \in A$ et que A est stable par f, alors $f(0) \in A$. Et, toujours pas stabilité de f, $f^2(0) = f(f(0)) \in A$. Une récurrence facile prouve alors que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n(0) \in A$, et donc $Y \subset A$.
Ainsi, Y est bien le plus petit élément (pour la relation d'ordre donnée par l'inclusion) de l'ensemble des parties de E contenant 0 et stables par f.

6.b. On a $f(Y) = \{f(y), y \in Y\} = \{f^n(0),\ n \in \mathbf{N}^*\}$.
Et donc en particulier, $f(Y) \subset Y$. Donc déjà, $\sup Y$ est un majorant de $f(Y)$, et donc que $\sup f(Y)$, qui est le plus petit majorant de $f(Y)$ est inférieur ou égal à $\sup Y$.
Inversement, nous avons déjà dit[3] que $0 \leqslant \sup f(Y)$, et si $n \in \mathbf{N}^*$, alors $f^n(0) \in f(Y)$ et donc $f^n(0) \leqslant \sup f(Y)$.
Ainsi, $\sup f(Y)$ est plus grand que tous les éléments de Y, et donc est un majorant de Y.
Donc[4] $\sup Y \leqslant \sup f(Y)$.
On en déduit donc que $\boxed{\sup Y = \sup f(Y).}$

[3] À la question 1.

[4] Encore une fois : $\sup Y$ est le plus petit majorant de Y.

6.c. Puisque f est sup-continue, on a $\sup f(Y) = f(\sup Y)$, et donc $\sup(Y) = f(\sup Y)$, donc $\boxed{\sup Y \text{ est un point fixe de } f.}$

Et si α est un point fixe de f, alors $0 \leqslant \alpha$.
Et alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, puisque f^n est croissante[5], $f^n(0) \leqslant f^n(\alpha)$.
Mais $f(\alpha) = \alpha$, donc $f^2(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$, et une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n(\alpha) = \alpha$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^n(0) \leqslant \alpha$. Donc α est un majorant de Y, si bien que $\sup Y \leqslant \alpha$, et donc $\boxed{\alpha \text{ est le plus petit point fixe de } f.}$

[5] f est croissante, et f^n est donc une composée de fonctions croissantes.

▸ Exercice 3 : une équation différentielle

1. L'équation normalisée[6] associée à (E') est $y'(x) + \dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} y(x) = 0$.
Puisqu'une primitive de $\dfrac{\mathrm{ch}}{\mathrm{sh}}$ est $x \mapsto \ln(\mathrm{sh}(x))$, l'ensemble des solutions de (E') est

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{-\ln \mathrm{sh}\, x}, \lambda \in \mathbf{R}\right\} = \boxed{\left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\mathrm{sh}\, x}, \lambda \in \mathbf{R}\right\}.}$$

[6] Sur I, la fonction sh ne s'annule pas.

2. Puisque f est deux fois dérivable, alors z est dérivable sur I avec pour tout $x \in I$,
$$z'(x) = f''(x) + \frac{1}{\mathrm{th}(x)} f'(x) + \frac{\mathrm{sh}^2(x) - \mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} f(x) = f''(x) + \frac{1}{\mathrm{th}(x)} f'(x) - \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)} f(x).$$
Et donc pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{sh}(x) z'(x) + \mathrm{ch}(x) z(x) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{sh}(x) f''(x) + \mathrm{ch}(x) f'(x) - \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} f(x) + \mathrm{ch}(x) f'(x) + \frac{\mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{sh}(x)} f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{sh}(x) f''(x) + 2\,\mathrm{ch}(x) f'(x) + \frac{\mathrm{ch}^2(x) - 1}{\mathrm{sh}(x)} f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{sh}(x) f''(x) + 2\,\mathrm{ch}(x) f'(x) + \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{sh}(x)} f(x) = 0\\
&\Leftrightarrow \mathrm{sh}(x) f''(x) + 2\,\mathrm{ch}(x) f'(x) + \mathrm{sh}(x) f(x) = 0.
\end{aligned}$$

Et donc $\boxed{z \text{ est solution de } (E') \text{ si et seulement si } f \text{ est solution de } (E).}$

Rappel
On a toujours
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

3. Puisque nous avons déterminer les solutions de (E') à la question 1, une fonction f est solution de (E) si et seulement si il existe un $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in I$,

$$f'(x) + \frac{1}{\mathrm{th}(x)} f(x) = \frac{\lambda}{\mathrm{sh}(x)} \qquad (E_\lambda).$$

Nous reconnaissons là, à λ fixé, une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
L'équation homogène a déjà été résolue : les solutions en sont les $x \mapsto \dfrac{\mu}{\mathrm{sh}(x)}$, $\mu \in \mathbf{R}$.

Cherchons une solution particulière par la méthode de variation de la constante sous la forme $y : x \mapsto \dfrac{\mu(x)}{\mathrm{sh}(x)}$, avec $\mu : I \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable.
On a alors pour tout $x \in I$, $y'(x) = \mu'(x)\dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)} - \mu(x)\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)}$.
Et donc y est solution de (E_λ) si et seulement si pour tout $x \in I$,

$$y'(x) + \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} y(x) = 0 \Leftrightarrow \mu'(x)\frac{1}{\mathrm{sh}(x)} - \mu(x)\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(x)} + \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}\frac{\mu(x)}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{\lambda}{\mathrm{sh}\, x} \Leftrightarrow \mu'(x) = \lambda.$$

Donc $\mu : x \mapsto \lambda x$ convient.
Et donc l'ensemble des solutions de (E_λ) est $\left\{x \mapsto \dfrac{\lambda x + \mu}{\mathrm{sh}(x)}, \mu \in \mathbf{R}\right\}$. Et donc f est solution de (E) si et seulement si il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{\lambda x + \mu}{\mathrm{sh}(x)}$.