Devoir surveillé 3

▸ Exercice 1 : échauffement

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a. Résoudre l'équation $z^2 - (4-2i)z + 11 - 10i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.

   b. On se place dans le plan complexe, et on note A et B les points dont les affixes sont les deux solutions de l'équation précédente.
   Déterminer les points C tels que ABC soit un triangle rectangle et isocèle en C.

2. Soit E un ensemble, et soient A, B deux parties de E.
   Pour $X \in \mathscr{P}(E)$, on note $f(X) = (A \cap X) \cup (B \setminus X)$.

   a. Soient $X, Y \in \mathscr{P}(E)$. Justifier que $X \cup Y = \emptyset \Leftrightarrow X = Y = \emptyset$.

   b. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que $f(X) = \emptyset$ si et seulement si $B \subset X \subset \overline{A}$.

   c. Prouver alors qu'il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = \emptyset$ si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

   d. On suppose dans cette question que $A \cap B = \emptyset$, et soit $X \in \mathscr{P}(E)$.
   Montrer que $f(X) = \emptyset$ si et seulement si il existe $D \in \mathscr{P}\left(\overline{A}\right)$ tel que $X = B \cup D$.

▸ Exercice 2 : calcul de l'intégrale de Poisson

1. Soit g une fonction paire, continue et 2π-périodique sur $\mathbf{R}$. Montrer que
$$\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 2\int_0^{\pi} g(t)\,dt.$$

2. Pour $r \in \mathbf{R}$ et $\theta \in \mathbf{R}$, on pose $f_r(\theta) = r^2 - 2r\cos(\theta) + 1$.
   Montrer que $\forall r \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $f_r(\theta) > 0$.

Dans toute la suite, pour $r \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$, on note $I(r) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(f_r(\theta))\,d\theta = \int_0^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(\theta) + 1\right)\,d\theta$.

3. Soit $r \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$. À l'aide d'un changement de variable, prouver que $I(-r) = I(r)$.

4. En remarquant que $2I(r) = I(r) + I(-r)$, montrer que pour tout $r \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$,
$$2I(r) = \int_0^{\pi} \ln\left((r^2)^2 - 2r^2\cos(2\theta) + 1\right)\,d\theta.$$
   En utilisant la question 1, en déduire que $2I(r) = I\left(r^2\right)$.

5. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall r \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$, $2^n I(r) = I\left(r^{2^n}\right)$.

6. Soit $r \in]-1,1[$. Montrer que $2\pi\ln(1-|r|) \leqslant I(r) \leqslant 2\pi\ln(1+|r|)$.

7. En déduire que pour tout $r \in]-1,1[$, $I(r) = 0$.

8. Prouver que $\forall r \in \mathbf{R} \setminus \{-1,1\}$, $I\left(\dfrac{1}{r}\right) = I(r) - 2\pi\ln(|r|)$.

9. En déduire la valeur de $I(r)$ lorsque $|r| > 1$.

▸ Exercice 3 : points fixes de l'exponentielle complexe

Le but de cet exercice est de déterminer les points fixes de l'exponentielle complexe, c'est-à-dire les $z \in \mathbf{C}$ tels que $e^z = z$.
Dans la suite, pour $z \in \mathbf{C}$, on notera $\exp(z)$ le nombre complexe e^z.

Partie I. Existence de points fixes de l'exponentielle

1. On note f la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \exp\left(\frac{x}{\tan x}\right) - \frac{x}{\sin x}$.
   a. Déterminer les limites en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ et $\frac{\tan x}{x}$.
   b. Justifier qu'il existe $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b) = 0$.
   c. Prouver alors que $z = \frac{b}{\tan b} + ib$ est un point fixe de l'exponentielle.

Partie II. Détermination de l'ensemble des points fixes de l'exponentielle

2. Soit $z \in \mathbf{C}$. Exprimer $\exp(\overline{z})$ en fonction de $\exp(z)$.
   En déduire qu'il suffit de déterminer les points fixes dont la partie imaginaire est strictement positive.

Dans la suite, on note $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & te^{-t} \end{array} \right.$.

3. Soit $z \in \mathbf{C}$ un point fixe de l'exponentielle complexe, et soient $x, y \in \mathbf{R}$ tels que $z = x + iy$. On suppose de plus que $y > 0$.
   a. Donner le module et un argument de $\exp(z)$ en fonction de x et y.
   b. Justifier qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $y = 2k\pi + \operatorname{Arccos}(\varphi(x))$.
   c. Prouver alors que $e^x\sqrt{1-\varphi(x)^2} - \operatorname{Arccos}(\varphi(x)) = 2k\pi$.
4. On note δ la fonction définie là où c'est possible par $\delta(t) = e^t\sqrt{1-\varphi(t)^2} - \operatorname{Arccos}(\varphi(t))$.
   a. Étudier les variations de φ, puis montrer que l'ensemble de définition de δ est un intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$, pour un certain $\alpha \in \mathbf{R}$.
   b. Justifier la dérivabilité de δ sur $]\alpha, +\infty[$ et prouver que :
   $$\forall t \in]\alpha, +\infty[,\ \delta'(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}}\left(e^{2t} + 1 - 2t\right).$$
   En déduire le taleau de variations de δ.
   c. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, l'équation $\delta(t) = 2k\pi$, d'inconnue $t \in [\alpha, +\infty[$ possède une et une seule solution x_k.
   On note alors, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $y_k = 2k\pi + \operatorname{Arccos}\varphi(x_k)$.
   d. Montrer que $x_k + iy_k$ est un point fixe de l'exponentielle complexe.
5. Déterminer l'ensemble de tous les points fixes de l'exponentielle complexe.

▸ Problème : une famille d'intégrales

Pour tout entier $k \geqslant 1$, et pour $x \in \mathbf{R}_+$, on note $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k(t)}$.

Partie I. Première étude de I_k.

1. Justifier que pour tout $k \geqslant 1$, I_k est bien définie, qu'elle est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, et déterminer I_k'.
2. Soit $x \in \mathbf{R}_+$.
   a. À l'aide d'un changement de variable, déterminer $I_1(x)$.
   b. Calculer $I_2(x)$.
3. Soit $x \in \mathbf{R}_+$.
   a. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. En notant que $\frac{1}{\mathrm{ch}^k} = \frac{\mathrm{ch}}{\mathrm{ch}^{k+1}}$, et à l'aide d'une intégration par parties, montrer que
   $$I_{k+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\,\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1} I_k(x).$$
   b. En déduire les valeurs de $I_3(x)$ et $I_4(x)$.

Partie II. Existence de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_k(x)$.

4. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, justifier que I_k est monotone sur $\mathbf{R}_+$.
5. Soit $k \in \mathbf{N}^*$.
   a. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$, $e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)} \leqslant 2e^{-t}$.
   b. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $I_k(x) \leqslant \frac{2^k}{k}$.

Ainsi, la fonction I_k est croissante et majorée, donc par le théorème de la limite monotone, elle possède une limite en $+\infty$, que l'on notera J_k.
On a donc $J_k = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^k(t)}$. Vous noterez l'an prochain ceci sous la forme $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\mathrm{ch}^k(t)}$.

Partie III. Étude de la suite $(J_k)_{k\geqslant 1}$

6. Montrer que $J_1 = \frac{\pi}{2}$ et que $J_2 = 1$.
7. Prouver que la suite $(J_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante.
8. En utilisant la relation de la question 3.a, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $J_{k+2} = \dfrac{k}{k+1} J_k$.
9. Prouver que la suite $(kJ_kJ_{k+1})_{k\geqslant 1}$ est constante, et préciser sa valeur.
10. Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{J_k}{J_{k+1}} = 1$.
11. En déduire que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} J_k\sqrt{2k} = \sqrt{\pi}$.
12. Prouver que pour tout $k \geqslant 1$, $J_{2k} = \dfrac{4^k}{2k} \dfrac{1}{\binom{2k}{k}}$.
    En déduire alors la valeur de J_{2k+1}.
13. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $J_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k-1} t \, dt$ (intégrale de Wallis).

CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 3

▶ Exercice 1 : échauffement

1.a. Le discriminant vaut $-32+24i = 4(-8+6i) = (2(1+3i))^2$.
On en déduit que les deux racines du polynôme sont $\boxed{3+2i \text{ et } 1-4i.}$

> **Calculs**
> Je n'ai pas détaillé les calculs, mais pour trouver
> $$-8+6i = (1+3i)^2,$$
> on utilise la méthode donnée en cours pour la détermination des racines carrées sous forme algébrique.

1.b. Notons que la question ne dit pas laquelle des deux racines est l'affixe de A. Mais le problème qui nous intéresse est le même dans les deux cas, et ne dépend pas de laquelle des deux racines s'appelle A. Donc dans la suite, nous supposerons que A est le point d'affixe $1-4i$, et B le point d'affixe $3+2i$.

Soit c un complexe, et soit C le point d'affixe c. Alors ABC est rectangle isocèle en C si et seulement si A est l'image de B par une rotation de centre C et d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$.
Mais l'expression complexe de la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $z \mapsto i(z-c)+c$ et la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est $z \mapsto -i(z-c)+c$.
Donc ABC est rectangle isocèle en C si et seulement si

$$1-4i = i(3+2i-c)+c \textbf{ ou } 1-4i = -i(3-2i-c)+c.$$

Mais

$$1-4i = i(3+2i-c)+c \Leftrightarrow 3-7i = c(1-i) \Leftrightarrow c = \frac{3-7i}{1-i} = \frac{(3-7i)(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{10-4i}{2} = 5-2i.$$

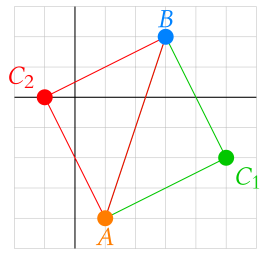

FIGURE 0.1– Sans surprise, les points C_1 et C_2 sont symétriques par rapport au segment $[AB]$.

Et de même

$$1-4i = -i(3+2i-c)+c \Leftrightarrow -1-i = c(1+i) \Leftrightarrow c = -1.$$

Autrement dit, les points C cherchés sont au nombre de deux : $\boxed{\text{ce sont les points d'affixe } 5-2i \text{ et } -1.}$

2.a. Il est évident que si $X = Y = \emptyset$, alors $X \cup Y = \emptyset$.
Inversement, si $X \cup Y = \emptyset$, alors $X \subset X \cup Y = \emptyset$, et donc $X = \emptyset$, et de même $Y = \emptyset$.

2.b. On a donc $f(X) = \emptyset \Leftrightarrow (A \cap X = \emptyset \textbf{ et } B \setminus X = \emptyset)$.
Or si $A \cap X = \emptyset$, $X = X \cap E = X \cap (A \cup \overline{A}) = (X \cap A) \cup (X \cap \overline{A}) = X \cap \overline{A} \subset \overline{A}$.
Et inversement, si $X \cap \overline{A}$, $X \cap A \subset \overline{A} \cap A = \emptyset$. Et donc $X \cap A = \emptyset \Leftrightarrow X \subset \overline{A}$.
Et puisque $B \setminus X = B \cap \overline{X}$, on a pour les mêmes raisons $B \setminus X = \emptyset \Leftrightarrow B \subset \overline{\overline{X}}$, ce qui est équivalent à $B \subset X$.
Et donc $f(X) = \emptyset \Leftrightarrow (X \subset \overline{A} \textbf{ et } B \subset X)$, soit encore si et seulement si $\boxed{B \subset X \subset \overline{A}.}$

2.c. Supposons qu'il existe $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = \emptyset$, et fixons un tel X.
Par la question précédente on a alors $B \subset X \subset \overline{A}$, si bien qu'en particulier $B \subset \overline{A}$.
Et alors $(B \cap A) \subset \overline{A} \cap A = \emptyset$, si bien que $B \cap A = \emptyset$.
Inversement, supposons que $A \cap B = \emptyset$. Alors si on pose $X = B$, il vient

$$f(X) = f(B) = (A \cap B) \cup (B \setminus B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Par double implication, il existe donc $X \in \mathscr{P}(E)$ tel que $f(X) = \emptyset$ si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

> **Méthode**
> Il s'agit de prouver l'**existence** d'un X tel que $B \subset X \subset \overline{A}$. Donc pour cela il faut exhiber une telle partie. On a choisi ici $X = B$, mais on aurait tout aussi bien pu prendre $X = \overline{A}$.

2.d. Dans un premier temps, considérons D une partie de $\overline{A}$ et posons $X = B \cup D$. Alors

$$A \cap X = A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D) = \emptyset \cup (A \cap D) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

> **Détails**
> $D \cap A$ est vide car $D \subset \overline{A}$.

Et par ailleurs, puisque $B \subset X$, $B \setminus X = \emptyset$.
Plus rigoureusement, $B \setminus X = B \cap \overline{X} = \underbrace{B \cap \overline{B}}_{=\emptyset} \cap \overline{D} = \emptyset$.

Et donc $f(X) = \emptyset$.

Inversement, considérons une partie X de E telle que $f(X) = \emptyset$.
D'après la question 2.b, $B \subset X$.
Posons alors $D = X \cap \overline{B}$. On a alors

$$X = X \cap E = X \cap (B \cup \overline{B}) = \underbrace{(X \cap B)}_{=B} \cup (X \cap \overline{B}) = B \cup D.$$

Et puisque par ailleurs $X \subset \overline{A}$, nécessairement $D \subset X \subset \overline{A}$, si bien que $D \in \mathscr{P}\left(\overline{A}\right)$. Donc comme annoncé, il existe bien une partie D de $\overline{A}$ telle que $X = B \cup D$.

▶ Exercice 2 : calcul de l'intégrale de Poisson

1. Par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \int_0^{\pi} g(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} g(t)\,dt$.
Soit $t \in [\pi, 2\pi]$. Alors par 2π-périodicité de g, $g(t) = g(t-2\pi)$, puis par parité, $g(t) = g(2\pi - t)$.
Et donc $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} g(t)\,dt = \int_{\pi}^{2\pi} g(2\pi - t)\,dt$.
Procédons alors au changement de variable[1] $x = 2\pi - t$, pour lequel on a donc $dx = -dt$.
Alors

$$\int_{\pi}^{2\pi} g(2\pi - t)\,dt = -\int_{\pi}^{0} g(x)\,dx = \int_0^{\pi} g(x)\,dx.$$

Et donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = \int_0^{\pi} g(t)\,dt + \int_0^{\pi} g(x)\,dx = \boxed{2\int_0^{\pi} g(t)\,dt.}$

[1] Affine.

2. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ fixé. Le polynôme $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$ a pour discriminant $\Delta = 4\cos^2\theta - 1$.
▶ Donc soit $\Delta < 0$ et donc le polynôme de possède pas de racines réelles, et donc est de signe constant, positif puisque le coefficient dominant est positif.
Et donc pour tout $r \in \mathbf{R}$, $r^2 - 2r\cos(\theta) + 1 > 0$.
▶ Soit $\Delta = 0$, auquel cas $\cos^2\theta = 1$, si bien que $\cos\theta = 1$ **ou** $\cos\theta = -1$.
Dans le premier cas, on a, pour tout $r \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$, $r^2 - 2r\cos(\theta) + 1 = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 > 0$.
Et dans le second cas, pour tout $r \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$, $r^2 - 2r\cos(\theta) + 1 = r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 > 0$.

Dans tous les cas, on a bien prouvé que $\boxed{\text{pour tout } r \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\},\ r^2 - 2r\cos(\theta) + 1 > 0.}$

Remarque
Ceci permet de justifier que la fonction $\theta \mapsto \ln(f_r(\theta))$ est bien définie, et même continue sur $[0, \pi]$, ce qui nous autorise à considérer son intégrale $I(r)$.

3. Soit $r \notin \{-1, 1\}$. Alors

$$I(-r) = \int_0^{\pi} \ln((-r)^2 + 2r\cos(\theta) + 1)\,d\theta = \int_0^{\pi} \ln(r^2) - 2r\cos(\pi - \theta) + 1)\,d\theta.$$

Détails
On a ici utilisé le fait que

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta).$$

Procédons alors au changement de variable $x = \pi - \theta$, pour lequel $dx = -d\theta$. Il vient alors

$$I(-r) = -\int_{\pi}^{0} \ln\left(r^2 - 2r\cos(x) + 1\right)\,dx = \int_0^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos(x) + 1\right)\,dx = I(r).$$

4. Soit $r \notin \{-1, 1\}$. Comme indiqué, par la question précédente, $2I(r) = I(r) + I(-r)$.
Et donc

$$\begin{aligned}
2I(r) &= \int_0^{\pi} \ln\left(r^2 - 2r\cos\theta + 1\right)\,d\theta + \int_0^{\pi} \ln\left(r^2 + 2r\cos(\theta) + 1\right)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \ln\left(\left(r^2 + 1 - 2r\cos(\theta)\right)\left(r^2 + 1 + 2r\cos(\theta)\right)\right)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \ln\left(\left(r^2 + 1\right)^2 - 4r^2\cos^2(\theta)\right)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \ln\left(r^4 + 2r^2 + 1 - 4r^2\cos^2(\theta)\right)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \ln\left(\left(r^2\right)^2 - 2r^2\left(2\cos^2(\theta) - 1\right) + 1\right)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \ln\left(\left(r^2\right)^2 - 2r^2\cos(2\theta) + 1\right)\,d\theta
\end{aligned}$$

Identité remarquable.

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(\left(r^2\right)^2 - 2r^2\cos(x) + 1\right)\,dx$$

Mais alors la question 1 s'applique à la fonction $x \mapsto \ln(f_{r^2}(x))$, qui est bien paire et 2π-périodique, si bien que

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(\left(r^2\right)^2 - 2r^2\cos(x) + 1\right)\,dx = \int_0^{\pi} \ln\left(\left(r^2\right) - 2r^2\cos(x) + 1\right)\,dx = \frac{1}{2}2\int_0^{\pi} \ln\left(\left(r^2\right)^2 - 2r^2\cos(\theta) + 1\right)\,d\theta = I(r^2).$$

Chgt variable — On a réalisé le changement de variable $x = 2\theta$, de sorte que $d\theta = \frac{dx}{2}$.

Et donc $\boxed{2I(r) = I\left(r^2\right).}$

5. Fixons $r \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ et procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.
Il est évident que $2^0 I(r) = I\left(r^{2^0}\right) = I(r)$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $2^n I(r) = I\left(r^{2^n}\right)$. Alors

$$2^{n+1}I(r) = 2\cdot 2^n I(r) = 2I\left(r^{2^n}\right) = I\left(\left(r^{2^n}\right)^2\right) = I\left(r^{2\cdot 2^n}\right) = I\left(r^{2^{n+1}}\right).$$

Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ 2^n I(r) = I\left(r^{2^n}\right).}$

6. Supposons dans un premier temps que $r \in [0, 1[$. Alors pour tout $\theta \in [0, \pi]$, on a

$$r^2 - 2r + 1 \leqslant r^2 - 2r\cos\theta + 1 \leqslant r^2 + 2r + 1$$

soit encore

$$(1-r)^2 \leqslant r^2 - 2r\cos\theta + 1 \leqslant (1+r)^2$$

si bien que $2\ln(1-r) \leqslant \ln\left(r^2 - 2r\cos\theta + 1\right) \leqslant 2\ln(1+r)$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\pi} 2\ln(1-r)\,d\theta \leqslant I(r) \leqslant \int_0^{\pi} 2\ln(1+r)\,d\theta \text{ soit encore } 2\pi\ln(1-r) \leqslant I(r) \leqslant 2\pi\ln(1+r).$$

Et pour $r \in]-1, 0]$, on a $I(r) = I(|r|)$, si bien que $2\pi\ln(1-|r|) \leqslant I(r) \leqslant 2\pi\ln(1+|r|)$.

7. Encore une fois, puisque $I(-r) = I(r)$, nous pouvons nous contenter de prouver le résultat annoncé pour $r \in [0, 1[$.
Mais alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $r^{2^n} \in [0, 1[$, si bien que $2\pi\ln\left(1 - r^{2^n}\right) \leqslant I\left(r^{2^n}\right) \leqslant 2\pi\ln\left(1 + r^{2^n}\right)$.
Puisque $r \in [0, 1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{2^n} = 0$. .
Et alors par continuité du logarithme en 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 - r^{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + r^{2^n}\right) = 0$, si bien que par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} I\left(r^{2^n}\right) = 0$.
Puisque de plus $I(r) = \dfrac{I\left(r^{2^n}\right)}{2^n}$, $I(r) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc $\boxed{I(r) = 0.}$

Limite — L'argument n'est pas encore totalement clair pour l'instant, mais l'idée est que si une suite (u_n) tend vers ℓ, alors toute suite obtenue en ne gardant que certains des termes de (u_n) (nous nommerons bientôt ceci une suite extraite de (u_n)) doit encore converger vers ℓ.
Ici on pourrait simplement noter que puisque $n \leqslant 2^n$, alors

$$0 \leqslant r^{2^n} \leqslant r^n$$

et appliquer le théorème des gendarmes.

8. Soit $r \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Alors

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{r}\right) &= \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2}{r}\cos\theta + 1\right)d\theta = \int_0^{\pi} \ln\left(\frac{1}{r^2}\left(1 - 2r\cos\theta + r^2\right)\right)d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \left[-2\ln(|r|) + \ln\left(r^2 - 2r\cos\theta + 1\right)\right]d\theta \\ &= \boxed{-2\pi\ln(|r|) + I(r).} \end{aligned}$$

☠ Danger ! — S'il est vrai que pour $r > 0$, $\ln(r^2) = 2\ln(r)$, on prendra soin à mettre une valeur absolue dans le cas où $r < 0$.

9. Soit $r \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Alors $\left|\dfrac{1}{r}\right| < 1$, si bien que par la question 7, $I\left(\frac{1}{r}\right) = 0$.
Et donc par la question précédente, $I(r) = I\left(\dfrac{1}{r}\right) + 2\pi\ln|r| = \boxed{2\pi\ln|r|.}$

▸ Exercice 3 : points fixes de l'exponentielle complexe

Partie I. Existence de points fixes.

1.a. L'idée est de faire apparaître un taux d'accroissement :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = \boxed{1.}$$

De même, puisque $\tan(0) = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \tan'(0) = \boxed{1.}$

1.b. Grâce aux limites calculées précédemment, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = e^1 - 1 > 0$.

Par ailleurs, puisque $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{x}{\tan x} = 0$.

On en déduit facilement que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$.

Puisque par ailleurs f est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, et que $1-\frac{\pi}{2} < 0 < e^1 - 1$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f(b) = 0$.

1.c. Notons qu'on a alors $\exp\left(\frac{b}{\tan b}\right) = \frac{b}{\sin b}$, et donc

$$\exp(z) = \exp\left(\frac{b}{\tan b}\right)(\cos b + i\sin b) = \frac{b}{\sin b}\left(\cos(b) + i\sin(b)\right) = \frac{b}{\tan b} + b = z.$$

Et donc $\boxed{z \text{ est bien un point fixe de l'exponentielle.}}$

> **TVI ?**
> Ce n'est en fait pas tout à fait le TVI que nous utilisons ici puisque ni $f(0)$ ni $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ne sont définis.
> Il s'agit d'une généralisation plutôt intuitive du TVI que nous prouverons plus tard dans l'année, mais si vous souhaitez vous en tenir à l'énoncé du cours, il suffit de prolonger f par continuité en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ pour obtenir une fonction continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, à laquelle le TVI s'applique bien.

Partie II. Détermination de l'ensemble des points fixes.

2. Soit $z = a+ib$, avec $a, b \in \mathbf{R}$. Alors $e^z = e^a e^{ib}$, et

$$\exp(\overline{z}) = \exp(a-ib) = e^a e^{-ib} = e^a\overline{e^{ib}} = \overline{e^a}\,\overline{e^{ib}} = \overline{e^a e^{ib}} = \overline{\exp(z)}.$$

> **Rappel**
> Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$.

Donc en particulier, si z est un point fixe de l'exponentielle avec $\mathrm{Im}(z) < 0$, alors $\overline{z} = \overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, si bien que $\overline{z}$ est un point fixe de l'exponentielle de partie imaginaire positive ou nulle.
Et inversement, si z est un point fixe de l'exponentielle de partie imaginaire positive, alors son conjugué est un point fixe de l'exponentielle complexe de partie imaginaire négative.
Donc il suffit bien de déterminer l'ensemble des points fixe de partie imaginaire positive ou nulle.
Par ailleurs, il n'existe pas de point fixe de l'exponentielle de partie imaginaire nulle puisque si $x \in \mathbf{R}$, alors $e^x \geqslant 1 + x > x$, et donc x n'est pas un point fixe de l'exponentielle.
Donc il suffit bien de déterminer l'ensemble des points fixes de partie imaginaire strictement positive.

3.a. Rappelons que puisque $e^z = e^x e^{iy}$ avec $e^x > 0$, y est un argument de e^z, et e^x est son module.

3.b. Puisque $y \geqslant 0$, $\arg(z) = \arg(x+iy) \in [0,\pi]$.

D'autre part, nous savons que e^x est le module de $\exp(z)$, et donc de z, si bien que $z = e^x\left(\cos\arg(z) + i\sin\arg(z)\right)$, et donc par identification des parties réelles, $x = e^x\cos(\arg(z))$, et donc $\cos(\arg(z)) = xe^{-x} = \varphi(x)$.
Puisque $\arg(z) \in [0,\pi]$, $\arg(z) = \mathrm{Arccos}(\varphi(x))$.
Et deux arguments étant congrus modulo 2π, on a bien $y \equiv \mathrm{Arccos}(\varphi(x))\ \ [2\pi]$, si bien qu'il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $y = 2k\pi + \mathrm{Arccos}(\varphi(x))$.
Enfin, puisque $\mathrm{Arccos}(\varphi(x)) \in [0,\pi]$ et $y \geqslant 0$, nécessairement $k \geqslant 0$, et donc $k \in \mathbf{N}$.

3.c. On a donc $y = \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\arg(z)) = e^x\sin(\mathrm{Arccos}(\varphi(x)))$.
Mais il est classique[2] pour tout $u \in [-1,1]$, $\cos^2(\mathrm{Arccos}\,u) + \sin^2(\mathrm{Arccos}\,u) = 1$, si bien que $\sin^2(\mathrm{Arccos}\,u) = 1 - u^2$.
Puisque de plus, $\mathrm{Arccos}\,u \in [0,\pi]$, $\sin(\mathrm{Arccos}\,u) \geqslant 0$ et donc $\sin(\mathrm{Arccos}\,u) = \sqrt{1-u^2}$.
En particulier, $y = e^x\sqrt{1-\varphi(x)^2}$, et donc

$$2k\pi = y - \mathrm{Arccos}(\varphi(x)) = \boxed{e^x\sqrt{1-\varphi(x)^2} - \mathrm{Arccos}(\varphi(x)).}$$

[2] Mais malgré tout par explicitement au programme, et il vous faudra le reprouver systématiquement.

> **☠ Danger !**
> Attention au signe, sans cette précision on ne peut pas exclure que
> $$\sin(\mathrm{Arccos}\,u) = -\sqrt{1-u^2}.$$

4.a. La fonction φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ car produit de fonctions dérivables, et pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\varphi'(t) = (1-t)e^{-t}$.
Donc le tableau de variations de φ est le suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

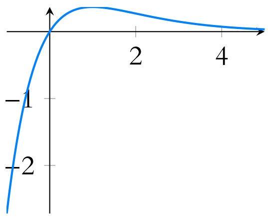

Figure 0.2– La fonction φ.

Pour que $\sqrt{1-\varphi(t)^2}$ soit bien défini, il faut que $1-\varphi(t)^2 \geqslant 0$, soit encore que $\varphi(t) \in [-1,1]$.
Et pour que $\operatorname{Arccos}(\varphi(t))$ soit défini, il faut également que $\varphi(t) \in [-1,1]$.
Mais par stricte croissance et continuité[3] de φ sur $]-\infty, 0]$, il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}_-^*$ tel que $\varphi(\alpha) = -1$.
Et alors pour tout $t < \alpha$, $\varphi(t) < -1$, et pour $t \geqslant \alpha$, $\varphi(t) \geqslant -1$, et $\varphi(t) \leqslant e^{-1} \leqslant 1$, si bien que $\varphi(t) \in [-1,1]$.
Donc $\boxed{\delta \text{ est définie sur } [\alpha, +\infty[.}$

[3] Pour appliquer le TVI.

4.b. Le tableau de variations de φ précédemment dressé prouve que sur $]\alpha,+\infty[$, φ est à valeurs dans $]-1,1[$. Or sur $]-1,1[$, $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ et Arccos sont dérivables, donc par composition, $t \mapsto \sqrt{1-\varphi(t)^2}$ et $t \mapsto \operatorname{Arccos}(\varphi(t))$ sont dérivables sur $]\alpha,+\infty[$. Donc par somme et produit de fonctions dérivables, δ est dérivable sur $]\alpha,+\infty[$. Et alors pour $t > \alpha$,

$$\begin{aligned}
\delta'(t) &= e^t\sqrt{1-\varphi(t)^2} - e^t\frac{2\varphi(t)\varphi'(t)}{2\sqrt{1-\varphi(t)^2}} + \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}} = \frac{e^t(1-\varphi(t)^2) - e^t\varphi(t)\varphi'(t) + \varphi'(t)}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}} \\
&= \frac{e^t\left(1-t^2e^{-2t}\right) - e^t te^{-t}(1-t)e^{-t} + (1-t)e^{-t}}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}} = \frac{e^t - t^2e^{-t} - te^{-t} + t^2e^{-t} + e^{-t} - te^{-t}}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}} \\
&= \boxed{\frac{e^{-t}\left(e^{2t}+1-2t\right)}{\sqrt{1-\varphi(t)^2}}.}
\end{aligned}$$

4.c. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On a $\delta(0) = 1 - \operatorname{Arccos}(0) = 0$, et donc par croissance, δ est négative sur $[\alpha, 0]$, et donc n'y prend pas la valeur $2k\pi$.
Par ailleurs, lorsque $x \to +\infty$, $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc $e^x\sqrt{1-\varphi(x)^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Et puisque $\forall t \in [\alpha,+\infty[$, $\delta(t) \geqslant e^t\sqrt{1-\varphi(t)^2} - \pi$, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} \delta(t) = +\infty$.
Donc par le théorème de la bijection, δ réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\mathbf{R}_+$, et donc en particulier $\boxed{\text{il existe un unique } x_k \in \mathbf{R}_+ \text{ tel que } \delta(x_k) = 2k\pi.}$

4.d. Soit $k \in \mathbf{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\exp(x_k + iy_k) &= e^{x_k}\left(\cos(y_k) + i\sin(y_k)\right) \\
&= e^{x_k}\left(\cos(\operatorname{Arccos}(\varphi(x_k))) + i\sin(\operatorname{Arccos}(\varphi(x_k)))\right) \\
&= e^{x_k}\left(\varphi(x_k) + i\sqrt{1-\varphi(x_k)^2}\right) = e^{x_k}x_ke^{-x_k} + ie^{x_k}\sqrt{1-\varphi(x_k)^2} \\
&= x_k + i(2k\pi + \operatorname{Arccos}(\varphi(x_k))) = x_k + iy_k.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{x_k + iy_k \text{ est bien un point fixe de l'exponentielle.}}$

5. Il s'agit donc de faire la synthèse de tout ce qui a été dit jusqu'à présent : si $z = x+iy$ est un point fixe de l'exponentielle, avec une partie imaginaire positive, alors par la question 3.c, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\delta(x) = 2k\pi$. Et donc il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\delta(x) = x_k$.
Et alors par la question 3.b, $y = 2k\pi + \operatorname{Arccos}(\varphi(x_k)) = y_k$. Si bien que $z = x_k + iy_k$.
Et la question 4 prouve qu'inversement, tous les $x_k + iy_k$, pour $k \in \mathbf{N}$, sont des points fixes[4] de l'exponentielle.
On en déduit que les points fixes de l'exponentielle de partie imaginaire positive sont exactement les $x_k + iy_k$, $k \in \mathbf{N}$.
Et donc en utilisant la question 2, l'ensemble des points fixes de l'exponentielle complexe est

$$\{x_k + iy_k,\ k \in \mathbf{N}\} \cup \{x_k - iy_k,\ k \in \mathbf{N}\}.$$

[4] Nécessairement de partie imaginaire positive puisque $k \geqslant 0$ et

$$\operatorname{Arccos}(\varphi(x_k)) \in [0, \pi].$$

Remarque

Cette union est disjointe puisque les y_k sont non nuls.

▸ Problème : une famille d'intégrales

Partie I. Première étude de I_k.

1. Soit $k \geqslant 1$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}^k}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ puisque ch ne s'y annule pas, et donc non seulement I_k y est bien définie, mais en plus le théorème fondamental de l'analyse nous garantit qu'il s'agit d'une[5] primitive de $\frac{1}{\mathrm{ch}^k}$, donc I_k est dérivable, avec $I_k' = \frac{1}{\mathrm{ch}^k}$.

[5] Et même de la seule qui s'annule en 0.

2.a. On a $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}\, t} = 2\int_0^x \frac{dt}{e^t+e^{-t}} = 2\int_0^x \frac{e^t\, dt}{e^{2t}+1}$.
Procédons alors au changement de variable $u = e^t$, de sorte que $du = e^t\, dt$. Alors

$$I_1(x) = 2\int_1^{e^x} \frac{du}{u^2+1} = \left[2\,\mathrm{Arctan}(u)\right]_1^{e^x} = 2\,\mathrm{Arctan}(e^x) - 2\,\mathrm{Arctan}(1) = \boxed{2\,\mathrm{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}.}$$

Alternative
Un autre changement de variable possible était $u = \mathrm{sh}\, t$.

2.b. Nous savons qu'une primitive de $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ est th, si bien que

$$I_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^2\, t} = [\mathrm{th}\, t]_0^x = \boxed{\mathrm{th}(x).}$$

3.a. Comme indiqué, procédons à une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \mathrm{ch}(t)\frac{1}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}\, dt$ en posant $u(t) = \mathrm{sh}\, t$ et $v(t) = \frac{1}{\mathrm{ch}^{k+1} t}$, de sorte que u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, avec $u'(t) = \mathrm{ch}\, t$ et $v'(t) = -(k+1)\frac{\mathrm{sh}\, t}{\mathrm{ch}^{k+2} t}$. Il vient donc

$$\begin{aligned}
I_k(x) &= \left[\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^{k+1}(t)}\right]_0^x + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{sh}^2\, t}{\mathrm{ch}^{k+2}\, t}\, dt \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{\mathrm{ch}^2\, t - 1}{\mathrm{ch}^{k+2}\, t}\, dt \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k\, t}\, dt + (k+1)\int_0^x \frac{dt}{\mathrm{ch}^{k+2}\, t} \\
&= \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + (k+1)I_k(x) - (k+1)I_{k+2}(x).
\end{aligned}$$

Détails
Puisque $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ alors
$$\mathrm{sh}^2 = \mathrm{ch}^2 - 1.$$

On en déduit que $(k+1)I_{k+2}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + kI_k(x)$ et donc que

$$\boxed{I_{k+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{(k+1)\,\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}I_k(x).}$$

3.b. On en déduit que $I_3(x) = I_{1+2}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}^2(x)} + \dfrac{1}{2}I_1(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}^2(x)} + \mathrm{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{4}$.

Et de même,

$$I_4(x) = I_{2+2}(x) = \frac{\mathrm{sh}\, x}{3\,\mathrm{ch}^3(x)} + \frac{2}{3}\,\mathrm{th}(x) = \mathrm{th}(x)\left(\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} + \frac{2}{3}\right) = \frac{\mathrm{th}(x)}{3}\left(1 - \mathrm{th}^2(x) + 2\right) = \boxed{\mathrm{th}(x) - \frac{1}{3}\,\mathrm{th}^3(x).}$$

Partie II. Existence de $\lim\limits_{x\to+\infty} I_k(x)$.

4. Nous avons déjà dit que I_k est dérivable de dérivée $\frac{1}{\mathrm{ch}^k}$, qui est positive. Donc I_k est croissante sur $\mathbf{R}_+$.

5.a. Soit $t \geqslant 0$. On a alors

$$e^{-t} \leqslant \frac{1}{\mathrm{ch}\, t} \leqslant 2e^{-t} \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^t \leqslant \mathrm{ch}\, t \leqslant e^t \Leftrightarrow e^t \leqslant e^t + e^{-t} \leqslant 2e^t.$$

Détails
Le passage à l'inverse est légitime puisque toutes les quantités en jeu sont strictement positives, et que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

La première inégalité est triviale, la seconde vient du fait que par croissance de l'exponentielle, $e^{-t} \leqslant e^t$.

Et donc puisque nous avons procédé par équivalences, $\boxed{e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, t} \leqslant 2e^{-t}.}$

5.b. On en déduit que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $\dfrac{1}{\operatorname{ch}^k t} \leqslant 2^k e^{-kt}$.
Et donc par croissance de l'intégrale,

$$I_k(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t} \leqslant 2^k \int_0^x e^{-kt}\,dt \leqslant 2^k \left[-\frac{e^{-kt}}{k}\right]_0^x = \frac{2^k}{k} - \frac{2^k e^{-kx}}{k} \leqslant \frac{2^k}{k}.$$

Et donc on a bien prouvé que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, $I_k(x) \leqslant \dfrac{2^k}{k}$.

Partie III. Étude de la suite $(J_k)_{k\geqslant 1}$

6. On a donc, d'après la question 2.a, $J_1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2\operatorname{Arctan}(e^x) - \dfrac{\pi}{2}\right) = 2\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = \boxed{\dfrac{\pi}{2}.}$
Et de même, $J_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} I_2(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \boxed{1.}$

7. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, puisque $\operatorname{ch}(t) \geqslant 1$, on a $\frac{1}{\operatorname{ch} t} \leqslant 1$ et donc $\frac{1}{\operatorname{ch}^{k+1} t} \leqslant \frac{1}{\operatorname{ch}^k t}$.

> ⚠ Attention !
> Pour $x \in [0,1]$, la suite $(x^n)_n$ est décroissante, alors qu'elle est croissante pour $x \geqslant 1$.

Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, par croissance de l'intégrale,

$$I_{k+1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^{k+1} t} \leqslant \int_0^x \frac{dt}{\operatorname{ch}^k t} = I_k(x).$$

Par passage à la limite[6] lorsque $x \to +\infty$, il vient donc $J_{k+1} \leqslant J_k$, si bien que $(J_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante.

[6] Ce qui est légitimie puisque nous savons que ces deux limites existent.

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On a alors $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^{k+1}(x)} = \dfrac{\operatorname{th}(x)}{\operatorname{ch}^k(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Et donc

$$J_{k+2} = \lim_{x\to+\infty} I_{k+2}(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{k+1}\frac{\operatorname{th}(x)}{\operatorname{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1} I_k(x)\right) = \frac{k}{k+1} \lim_{x\to+\infty} I_k(x) = \boxed{\frac{k}{k+1} J_k.}$$

9. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Alors en utilisant la question précédente, on a

$$(k+1)J_{k+1}J_{k+2} = (k+1)J_{k+1}\frac{k}{k+1}J_k = kJ_kJ_{k+1}.$$

Et donc la suite $(kJ_kJ_{k+1})_{k\geqslant 1}$ est constante, nécessairement égale à son premier terme qui vaut

$$1J_1J_2 = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$$

10. Par décroissance de (J_k), on a, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $J_{k+2} \leqslant J_{k+1} \leqslant J_k$, et donc $\dfrac{J_{k+2}}{J_k} \leqslant \dfrac{J_{k+1}}{J_k} \leqslant 1$.
Or nous venons de prouver que $\dfrac{J_{k+2}}{J_k} = \dfrac{k}{k+1}$, si bien que $\dfrac{k}{k+1} \leqslant \dfrac{J_k}{J_{k+1}} \leqslant 1$.
En passant à l'inverse, il vient $1 \leqslant \dfrac{J_k}{J_{k+1}} \leqslant \dfrac{k+1}{k} = 1 + \dfrac{1}{k}$.
Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{J_k}{J_{k+1}} = 1.}$

11. Nous allons en fait prouver que $\lim\limits_{k\to+\infty} J_k^2 2k = \pi$, il suffira ensuite de passer à la racine[7] pour en déduire le résultat annoncé.
Mais pour $k \in \mathbf{N}^*$, on a $2kJ_k^2 = 2kJ_kJ_{k+1}\dfrac{J_k}{J_{k+1}} = 2(kJ_kJ_{k+1})\dfrac{J_k}{J_{k+1}} = \pi\dfrac{J_k}{J_{k+1}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \pi$.
Et donc on a bien $\lim\limits_{k\to+\infty} 2kJ_k^2 = \pi$, si bien que $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} J_k\sqrt{2k} = \sqrt{\pi}.}$

[7] Car la fonction racine carrée est continue en π.

12. Puisque le résultat est donné, procédons par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$.
Pour $k = 1$, $\dfrac{4^k}{2k}\dfrac{1}{\binom{2k}{k}} = \dfrac{4}{2}\dfrac{1}{\binom{2}{1}} = 1 = J_2$.
Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $J_k = \dfrac{4^k}{2k}\dfrac{1}{\binom{2k}{k}}$. Alors

$$J_{2(k+1)} = J_{2k+2} = \frac{2k}{2k+1}\frac{4^k}{2k}\frac{1}{\dbinom{2k}{k}} = \frac{4^k}{2k+1}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$$

$$= \frac{4^k}{2k+1}\frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!}\frac{2k+2}{(k+1)^2} = \frac{4^{k+1}}{2(k+1)}\frac{((k+1)!)^2}{(2k+2)!} = \frac{4^{k+1}}{2(k+1)}\frac{1}{\binom{2k+2}{k+1}}.$$

Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N}^*,\ J_{2k} = \frac{4^k}{2k}\frac{1}{\binom{2k}{k}}.}$

On en déduit alors que puisque $2kJ_{2k}J_{2k+1} = \dfrac{\pi}{2}$,

$$J_{2k+1} = \frac{\pi}{4k}\frac{1}{J_{2k}} = \frac{\pi}{4k}\binom{2k}{k}\frac{2k}{4^k} = \boxed{\frac{\pi}{2\cdot 4^k}\binom{2k}{k}.}$$

13. Notons que le résultat annoncé est évident pour $k = 1$, puisque $J_1 = \frac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt$.

Soit donc $k \geqslant 2$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$. Dans l'intégrale $I_k(x)$, procédons au changement de variable $u = \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}$, de sorte que $du = -\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\,dt$.

Rappelons que pour $t \geqslant 0$, on a

$$\mathrm{sh}(t) = \sqrt{\mathrm{sh}^2(t)} = \sqrt{\mathrm{ch}^2(t) - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,t}\right)^2} - 1}.$$

Et donc

$$I_k(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^{k-2}t}\frac{1}{\mathrm{sh}\,t}\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\,dt = \int_{\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}}^1 \frac{u^{k-2}}{\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}}\,du = \int_{\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}}^1 \frac{u^{k-1}}{u\sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}}\,du = \int_{\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}}^1 \frac{u^{k-1}}{\sqrt{1-u^2}}\,du.$$

Puisque $\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} \in [0, 1[$, posons, pour $u \in [0, 1]$, $\theta = \mathrm{Arccos}(u)$, de sorte que $u = \cos(\theta)$. On a alors $du = -\sin(\theta)d\theta$.

Mais $\theta \in [0, \pi]$, si bien que $\sin(\theta) \geqslant 0$, et donc $\sin(\theta) = \sqrt{\sin^2(\theta)} = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)}$. Donc

$$I_k(x) = \int_0^{\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)} \frac{\cos^{k-1}(\theta)}{\sin(\theta)}\sin(\theta)\,d\theta = \int_0^{\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)} \cos^{k-1}(\theta)\,d\theta.$$

Par conséquent, $J_k = \lim\limits_{x\to+\infty} I_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^{\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)} \cos^{k-1}(\theta)\,d\theta$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)} = 0$, par continuité[8] de Arccos en 0,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right) = \mathrm{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Reste à comprendre quel effet a le passage à la limite «dans la borne de l'intégrale».

La fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^t \cos^{k-1}\theta\,d\theta$ est une primitive de $\cos^{k-1}$. Donc en particulier elle est dérivable, et donc continue en $\frac{\pi}{2}$, si bien que

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \int_0^t \cos^{k-1}\theta\,d\theta = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k-1}\theta\,d\theta.$$

Et donc $\boxed{J_k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{k-1}\theta\,d\theta.}$

Commentaires *: ceux d'entre vous qui ont fait le DM sur les intégrales de Wallis auront peut-être reconnu que toutes les formules prouvées dans cette partie sur les intégrales J_k sont semblables à des formules concernant les intégrales de Wallis, ce qui est légitimé par cette dernière question.*
En raison de leur lien avec les intégrales de Wallis, les intégrales J_k sont appelées intégrales de Futuna[9].

[8] Car Arccos est dérivable sur $]1, 1[$.

Évident ?
On aimerait bien sûr pouvoir remplacer la borne par sa limite, mais ceci mérite peut-être quelques justifications.

[9] Et ceux d'entre vous qui connaissent un peu de géographie auront compris la blague.