# Devoir surveillé 3

## ► Exercice 1 : échauffement

1. a. Résoudre le système $\begin{cases} X+Y=1+3i \\ XY=-2+2i \end{cases}$ d'inconnue $(X,Y)\in\mathbf{C}^2$.

   b. Soit $n\geqslant 1$. Déduire de la question précédente le nombre de solutions du système $\begin{cases} x^n+y^n=1+3i \\ x^ny^n=-2+2i \end{cases}$ d'inconnue $(x,y)\in\mathbf{C}^2$.

2. Soit $E$ un ensemble, et soient $A,B,C$ trois parties de $E$. Montrer l'équivalence suivante :

$$A\subset B\cup C \Leftrightarrow \exists X\in\mathscr{P}(A),\ X\subset B \text{ et } A\setminus X\subset C.$$

## ► Exercice 2 : sommes d'arctangentes

1. Soit $x\in\mathbf{R}_+^*$. Posons $\theta=\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

   a. Justifier que $\tan(\theta)$ est bien défini et en donner une expression en fonction de $x$.

   b. En déduire que $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

2. Pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, on pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ et $T_n=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Arctan}\left(2k^2\right)$.

   a. Justifier que pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $S_n=\operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

   b. En déduire que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et préciser sa limite.

   c. À l'aide de la question précédente, déterminer les limites des suites $(T_n)_{n\geqslant 1}$ et $\left(\frac{T_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

## ► Exercice 3 : droite d'Euler d'un triangle

Dans tout l'exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, et on note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique (de centre $O$ et de rayon 1).
On rappelle que si $ABC$ est un triangle (avec $A,B,C$ non alignés), on appelle :

— **médiatrice de** $[AB]$ l'ensemble des points équidistants de $A$ et $B$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M$ tels que $AM=MB$.

— **hauteur issue de** $C$ la droite perpendiculaire à $(AB)$ et passant par $C$.

— **médiane issue de** $C$ la droite passant par $C$ et par le milieu du segment $[AB]$.

**Partie I. Résultats préparatoires**

1. Soit $z\in\mathbf{C}$ tel que $|z|=1$. Exprimer $\overline{z}$ en fonction de $z$.

2. **Équation complexe d'une droite.** Soient $A,B$ deux points distincts de $\mathscr{C}$, d'affixes respectives $a$ et $b$. Soit également $M$ un point du plan, distinct de $A$ et de $B$, et soit $z$ son affixe.

   a. Que représente géométriquement $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$ ?

   b. Prouver que : $M\in(AB)\Leftrightarrow a\overline{z}+\overline{b}z+\overline{a}b=\overline{a}z+b\overline{z}+a\overline{b}$.

   c. En déduire alors que $M\in(AB)\Leftrightarrow z+ab\overline{z}=a+b$.

d. Vérifier que la relation précédente est encore vraie si $M = A$ ou si $M = B$.

3. **Une condition d'orthogonalité.** Soient $A, B, C, D$ quatre points de $\mathscr{C}$, avec $A \neq B$ et $C \neq D$, et soient $a, b, c, d$ leurs affixes respectives.

   a. Donner un complexe dont l'argument principal est congru à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ modulo $2\pi$.

   b. En déduire que $(AB)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires si et seulement si $ab = -cd$.

**Partie II. Droite d'Euler d'un triangle inscrit dans $\mathscr{C}$.**

Dans toute cette partie, $A, B$ et $C$ sont trois points de $\mathscr{C}$, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a, b, c$.
Toutes les médianes, hauteurs et médiatrices dont il est question dans cette partie sont celles du triangle $ABC$.

4. **Orthocentre de $ABC$.** Soit $D$ le point d'intersection, distinct de $C$, du cercle $\mathscr{C}$ et de la hauteur issue de $C$. On note alors $d$ l'affixe de $D$.

   a. Exprimer $d$ en fonction de $a, b$ et $c$.

   b. En déduire que la hauteur issue de $C$ est l'ensemble des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie $z - ab\bar{z} = c - \frac{ab}{c}$.

   c. Prouver que les trois hauteurs du triangle $ABC$ s'intersectent en un unique point, appelé l'orthocentre de ABC, et dont on déterminera l'affixe.

5. **Étude des médiatrices** : par un raisonnement géométrique simple, justifier que les trois médiatrices du triangle $ABC$ se coupent en un unique point dont on précisera l'affixe.

6. **Centre de gravité de $ABC$** : on appelle centre de gravité de $ABC$ le point $G$ d'affixe $\frac{a+b+c}{3}$.

   a. Montrer que $G$ est sur la médiane issue de $C$.

   b. En déduire que les trois médianes de $ABC$ sont concourantes en $G$.

7. Montrer que l'orthocentre de $ABC$, le centre de gravité de $ABC$ et le point de concours des médiatrices de $ABC$ sont alignés.
   *Si le triangle ABC n'est équilatéral, alors ces trois points ne sont pas confondus, et on appelle alors droite d'Euler l'unique droite qui les contient les trois.*

**Partie III. Cas général**

On suppose à présent que $A, B, C$ sont trois points non alignés du plan, d'affixes respectives $a, b$ et $c$.
On pourrait prouver qu'alors les trois médiatrices du triangle $ABC$ se coupent en un unique point $\Omega$, qui est alors le centre du cercle circonscrit au triangle.

8. Montrer qu'il existe une similitude directe $s$ telle que $s(A), s(B)$ et $s(C)$ soient sur $\mathscr{C}$. Préciser alors l'image de $\Omega$ par $s$, ainsi que le rapport de $s$.

9. Justifier que tout élément $z \in \mathbf{C}$ possède un unique antécédent par $s$, que l'on notera $s^{-1}(z)$. Prouver alors que $s^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & s^{-1}(z) \end{array} \right.$ est encore une similitude directe.

10. Expliquer brièvement comment en déduire, à l'aide de la partie précédente, que le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité de $ABC$ sont alignés.

## ▸ Exercice 4 : théorème de Niven

Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose alors $T_0(x) = 2$, $T_1(x) = x$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_{n+2}(x) = xT_{n+1}(x) - T_n(x)$.
On définit ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, une fonction $T_n$ définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

1. Déterminer une expression simple des fonctions $T_2$ et $T_3$.

2. Soit $\theta \in \mathbf{R}$. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.

3. On souhaite prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n$ est une fonction polynomiale de degré au plus $n$, à coefficients entiers.
   On notera alors $\mathscr{P}(n) : \exists a_{0,n}, a_{1,n}, \dots, a_{n,n} \in \mathbf{Z}, \forall x \in \mathbf{R},\ T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{k,n}x^k$.

**a.** Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Dans la suite, conformément à la notation ci-dessus, on notera, pour $n \in \mathbf{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, $a_{k,n}$ le coefficient de degré $k$ de $T_n$.

**b.** Pour $n \in \mathbf{N}^*$, déterminer la valeur de $a_{n,n}$, le coefficient de degré $n$ de $T_n$.

**4.** Soit $\theta \in \mathbf{R}$ un angle tel que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbf{Q}$ et $\cos(\theta) \in \mathbf{Q}$.
Le but de cette question est de prouver le théorème de Niven (publié en 1956 par Ivan Niven, même si un résultat plus fort avait déjà été prouvé dès 1933 par Dick Lehmer) qui affirme que, sous les hypothèses ci-dessus,

$$\cos\theta \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Notons $\ell, m$ deux entiers, avec $m \in \mathbf{N}^*$, tels que $\theta = \frac{2\ell}{m}\pi$.

**a.** Calculer $T_m(2\cos\theta)$.

**b.** Soient $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ deux entiers premiers entre eux tels que $2\cos\theta = \frac{p}{q}$.
Montrer que

$$p^m = 2q^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,m} p^k q^{m-k}.$$

**c.** En déduire que $2\cos\theta$ est entier.

**d.** Conclure, en prouvant que $\cos\theta \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

*En d'autres termes, on a prouvé que les angles qui sont des multiples rationnels de $\pi$ (comme $\frac{\pi}{3}$, $\frac{-5\pi}{6}$ ou $\frac{4\pi}{17}$) et qui ont un cosinus rationnel sont ceux que l'on connaissait déjà, à savoir $0$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ et leurs multiples.*

## ▸ Question subsidiaire

*Cet exercice n'est à aborder que si vous estimez avoir très bien réussi tout le reste du devoir.* Représenter graphiquement l'ensemble des points $(a, b) \in [-1, 1]^2$ tels que l'équation

$$\operatorname{Arcsin}(x) = \operatorname{Arcsin}(a) + \operatorname{Arcsin}(b)$$

d'inconnue $x \in [-1, 1]$ possède une solution.

# CORRECTION DU DEVOIR SURVEILLÉ 3

## ▸ Exercice 1 : échauffement

**1.a.** Il a été prouvé dans le cours que $(X, Y)$ est solution du système si et seulement si $\{X, Y\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 - (1+3i)z - 2 + 2i = 0$.
Mais retrouvons-le par une méthode légèrement différente et sûrement un peu plus facile à comprendre :

$$\begin{cases} X+Y = 1+3i \\ XY = -2+2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 1+3i-X \\ XY = -2+2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 1+3i-X \\ X(1+3i-X) = -2+2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 1+3i-X \\ X^2-(1+3i)X-2+2i = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation nécessite donc de déterminer les solutions de $z^2-(1+3i)z-2+2i = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = (1+3i)^2 - 4(-2+2i) = -8+6i+8-8i = -2i$.

Il nous faut des racines carrées de $-2i$. S'il est tout à fait possible de les chercher directement sous forme algébrique, avec la méthode habituelle, ici, il est plus facile de passer par la forme exponentielle, en notant que $\Delta = 2e^{-\frac{i\pi}{2}}$, si bien qu'une racine carrée de $\Delta$ est $\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1-i$.
Et donc les solutions de l'équation $z^2-(1+3i)z-2+2i = 0$ sont

$$\frac{1+3i+1-i}{2} = 1+i \text{ et } \frac{1+3i-1+i}{2} = 2i.$$

Si $X = 1+i$, alors $Y = 1+3i-X = 2i$, et si $X = 2i$, alors $Y = 1+3i-X = 1+i$.
Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions du système est } \{(2i, 1+i), (1+i, 2i)\}.}$

**1.b.** Soit $(x, y) \in \mathbf{C}^2$. Alors $(x, y)$ est solution du système si et seulement si $(x^n, y^n)$ est solution du système de la question précédente.
Donc si et seulement si $\begin{cases} x^n = 1+i \\ y^n = 2i \end{cases}$ **ou** $\begin{cases} x^n = 2i \\ y^n = 1+i \end{cases}$
Puisque $2i$ et $1+i$ sont non nuls, ils possèdent chacun exactement $n$ racines $n^{\text{èmes}}$.
Bien que ce ne soit pas vraiment nécessaire, on peut les préciser : $2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$ possède pour racines $n^{\text{èmes}}$ les $\sqrt[n]{2}e^{i\frac{\pi}{2n}}\omega$, $\omega \in \mathbf{U}_n$ et $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ a pour racines $n^{\text{èmes}}$ les $\sqrt[2n]{2}e^{i\frac{\pi}{4n}}\omega$, $\omega \in \mathbf{U}_n$.
Et donc l'ensemble des solutions du système est

$$\left\{\left(\sqrt[n]{2}e^{i\frac{\pi}{2n}}\omega_1, \sqrt[2n]{2}e^{i\frac{\pi}{4n}}\omega_2\right), (\omega_1, \omega_2) \in \mathbf{U}_n^2\right\} \cup \left\{\left(\sqrt[2n]{2}e^{i\frac{\pi}{4n}}\omega, \sqrt[n]{2}e^{i\frac{\pi}{2n}}\omega_2\right), (\omega_1, \omega_2) \in \mathbf{U}_n^2\right\}.$$

Les deux ensembles qui composent cette union sont de cardinal $n^2$ car $\mathbf{U}_n$ est de cardinal $n$, et que deux choix différents de $(\omega_1, \omega_2)$ conduisent à deux solutions distinctes.
Il se pourrait encore qu'une même solution apparaissent dans chacun des deux ensembles[1], mais ce n'est pas possible pour des raisons de module : les $\sqrt[n]{2}e^{i\frac{\pi}{2n}}\omega_1$ sont de module $\sqrt[n]{2}$ quand les $\sqrt[2n]{2}e^{i\frac{\pi}{4n}}\omega$ sont de module $\sqrt[2n]{2}$.

[1] Autrement dit que ces ensembles de soient pas disjoints.

Donc au final, on a $\boxed{2n^2 \text{ solutions distinctes au système.}}$

**2.** Procédons par double implication.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A \subset B \cup C$.
Soit alors $X = A \cap B$, qui est bien une partie de $A$, incluse également dans $B$.
Alors $A \setminus X = A \cap \overline{X} = A \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \underbrace{(A \cap \overline{A})}_{=\emptyset} \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{B}$.

Mais $A \cap \overline{B} \subset (B \cup C) \cap \overline{B} \subset (B \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{B}) \subset \overline{B} \cap C \subset C$.
Donc on a bien prouvé l'existence d'une partie $X$ de $A$ telle que $X \subset B$ et $A \setminus X \subset C$.

$\boxed{\Leftarrow}$. Supposons qu'il existe $X \in \mathscr{P}(A)$ tel que $X \subset B$ et $A \setminus X \subset C$, et considérons un tel $X$.
Alors $A \subset X \cup (A \setminus X) \subset B \cup C$.
Par double implication, on a bien prouvé que

$$\boxed{A \subset B \cup C \Leftrightarrow \exists X \in \mathscr{P}(A), X \subset B \textbf{ et } A \setminus X \subset C.}$$

## ▸ Exercice 2 : sommes d'arctangentes

**1.a.** Commençons par noter que puisque $\frac{1}{x^2} > 0$, par croissance de l'arctangente $0 < \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) < \frac{\pi}{2}$.
Et de même, $0 < \frac{x}{x+1}$, donc $0 < \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) < \frac{\pi}{2}$, si bien que $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.
Et donc $\tan(\theta)$ est bien défini. Avec la formule d'addition des tangentes, il vient donc

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\tan\text{Arctan}\,\frac{1}{2x^2} - \tan\text{Arctan}\,\frac{x}{x+1}}{1+\tan\text{Arctan}\,\frac{1}{2x^2}\tan\text{Arctan}\,\frac{x+1}{x}}\\ &= \frac{\frac{1}{2x^2}-\frac{x}{x+1}}{1+\frac{1}{2x^2}\frac{x}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-2x^3}{2x^2(x+1)}}{\frac{2x^2+2x+1}{2x(x+1)}}\\ &= \frac{-2x^3+x+1}{2x^2+2x+1}\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Mais 1 est une racine évidente du polynôme $-2X^3+X+1$, si bien qu'il se factorise par $x-1$, $-2x^3+x+1 = (x-1)(-2x^2-2x-1)$.
Et donc $\dfrac{-2x^3+x+1}{2x^2+2x+1} = 1-x$.
On en déduit que $\boxed{\tan\theta = \dfrac{1-x}{x}}$.

**1.b.** Puisque $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\theta = \text{Arctan}\left(\frac{1-x}{x}\right) = -\text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$.
Et donc $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$, si bien que

$$\boxed{\text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{x+1}{x}\right)}.$$

> **⚠ Attention !**
> Un réel $\theta$ tel que $\tan\theta = x$ n'est égal à $\text{Arctan}(x)$ que s'il est de plus dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Il est donc important de le mentionner ici.

**2.a.** Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Par la question précédente,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left(\text{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)\\ &= \text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1-1}{1}\right) = \boxed{\text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right)}.\end{aligned}$$

> **Détails**
> On aura reconnu une somme télescopique.

**2.b.** Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{n+1} = 1$ et que la fonction arctangente est continue[2] en 1,

$$\lim_{n\to+\infty}\text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \text{Arctan}(1) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

[2] Car dérivable.

**2.c.** Rappelons que pour tout $x > 0$, $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$.

Et donc en particulier, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, $\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{2k^2}\right) = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(2k^2\right)$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right)\right) = n\frac{\pi}{2} - S_n.$$

Donc déjà, par somme de limites $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty}$.

Et puisque $\dfrac{T_n}{n} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{S_n}{n}$, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{T_n}{n} = \dfrac{\pi}{2}}$.

## ▸ Exercice 3 : droite d'Euler d'un triangle

**Partie I. Résultats préliminaires**

1. C'est du cours : si $|z| = 1$, alors $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, et donc $\boxed{\bar{z} = \frac{1}{z}.}$

2. **Équation complexe d'une droite**

2.a. Là encore c'est du cours : $\arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \quad [2\pi]$.

2.b. On a $M \in (AB) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv 0 \;\; [\pi]$.
Or un complexe non nul a un argument congru à 0 modulo $\pi$ si et seulement si il s'agit d'un réel. .
Enfin, un complexe est réel si et seulement si il est égal à son propre conjugué.
Donc

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv 0 \quad [\pi] \Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a} \in \mathbf{R} \\ &\Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a} = \overline{\left(\frac{z-b}{z-a}\right)} \Leftrightarrow \frac{z-b}{z-a} = \frac{\bar{z}-\bar{b}}{\bar{z}-\bar{a}} \\ &\Leftrightarrow (z-b)(\bar{z}-\bar{a}) = (z-a)\left(\bar{z}-\bar{b}\right) \\ &\Leftrightarrow \cancel{z\bar{z}} - \bar{a}z - b\bar{z} + \bar{a}b = \cancel{z\bar{z}} - a\bar{z} - \bar{b}z + a\bar{b} \\ &\Leftrightarrow \boxed{a\bar{z} + \bar{b}z + \bar{a}b = \bar{a}z + b\bar{z} + a\bar{b}.} \end{aligned}$$

Mieux
Un complexe d'argument congru à 0 modulo $2\pi$ est un réel positif, un complexe d'argument congru à $\pi$ modulo $2\pi$ est un réel négatif.

2.c. On en déduit que

$$\begin{aligned} M \in (AB) &\Leftrightarrow z\left(\bar{b}-\bar{a}\right) + \bar{z}(a-b) = a\bar{b} - \bar{a}b \\ &\Leftrightarrow z\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \bar{z}(a-b) = \frac{a}{b} - \frac{b}{a} \\ &\Leftrightarrow z\frac{a-b}{ab} + \bar{z}(a-b) = \frac{a^2-b^2}{ab} \\ &\Leftrightarrow \boxed{z + \bar{z}ab = a+b.} \end{aligned}$$

Rappel
$a$ et $b$ sont dans $\mathbf{U}$, donc leurs inverses et leurs conjugués sont égaux (question 1).

Détails
On a multiplié les deux membres de l'égalité par $\frac{ba}{b-a}$.

2.d. Si $z = a$, alors $a + ab\bar{a} = a + |a|^2 b = a + b$.
Et de même pour $z = b$.
Ainsi, on a prouvé que pour tout point $M$ d'affixe $z$, $M \in (AB) \Leftrightarrow z + ab\bar{z} = a + b$.

3. **Une condition d'orthogonalité**

3.a. C'est du cours : un tel complexe est $\boxed{\frac{d-c}{b-a}.}$

3.b. Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} \;\; [\pi]$.
Soit si et seulement si $\frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur. Mais

$$\begin{aligned} \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbf{R} &\Leftrightarrow \frac{d-c}{b-a} = -\overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)} \\ &\Leftrightarrow (d-c)\left(\bar{b}-\bar{a}\right) = -\left(\bar{d}-\bar{c}\right)(b-a) \\ &\Leftrightarrow (d-c)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = -\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)(b-a) \\ &\Leftrightarrow (d-c)(a-b)cd = -(c-d)(b-a)ab \\ &\Leftrightarrow \boxed{cd = -ab}. \end{aligned}$$

Détails
Les imaginaires purs sont les complexes $z$ tels que $\bar{z} = -z$.

On a tout multiplié par $abcd \neq 0$.

*On notera que bien que ce critère soit d'une formulation plutôt élégante, il n'est valable que pour $A, B, C, D$ dans le cercle trigonométrique, et n'est pas un moyen simple de tester si deux droites quelconques sont perpendiculaires.*

**Partie II. Droite d'Euler d'un triangle inscrit dans $\mathscr{C}$.**

4. **Orthocentre de $ABC$**

4.a. Puisque les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont perpendiculaires par définition, et que $A, B, C$ et $D$ sont dans $\mathscr{C}$, alors $ab = -cd$. Et donc $\boxed{d = -\frac{ab}{c}.}$

4.b. La hauteur issue de $C$ est donc la droite $(DC)$. Et alors pour $M$ un point du plan, d'affixe $z$, on a, d'après la question 2,

$$M \in (DC) \Leftrightarrow z + cd\bar{z} = d + c \Leftrightarrow \boxed{z - ab\bar{z} = c - \frac{ab}{c}.}$$

4.c. Notons $(\mathscr{D}_C)$ la hauteur issue de $C$, et notons $(\mathscr{D}_A)$, $(\mathscr{D}_B)$ les hauteurs issues respectivement de $A$ et $B$.
Sur le même principe que ci-dessus, $(\mathscr{D}_A)$ possède pour équation complexe $z - bc\bar{z} = a - \frac{bc}{a}$.
Soit alors $M$ un point du plan d'affixe $z$. Alors

$$M \in (\mathscr{D}_A) \cap (\mathscr{D}_C) \Leftrightarrow \begin{cases} z - ab\bar{z} = c - \frac{ab}{c} \\ z - bc\bar{z} = a - \frac{bc}{a} \end{cases}$$

Si $z$ est une solution, alors en multipliant la première équation par $c$, et en lui retranchant la seconde multipliée par $a$, il vient $(c-a)z = c^2 - ab - a^2 + bc$ et donc

$$z = \frac{c^2 - a^2}{c - a} + \frac{bc - ba}{c - a} = c + a + b = a + b + c.$$

Ceci prouve donc déjà qu'il existe au plus un point d'intersection de $(\mathscr{D}_A)$ et $(\mathscr{D}_C)$.
Il est aisé de vérifier que le point d'affixe $a + b + c$ est dans $(\mathscr{D}_)$, car

$$a + b + c - ab\left(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}\right) = a + b + c - b|a|^2 - a|b|^2 - \frac{ab}{c} = c - \frac{ab}{c}.$$

Et pour les mêmes raisons, ce point est aussi dans $(\mathscr{D}_A)$ et $(\mathscr{D}_B)$, si bien que les trois hauteurs de $ABC$ sont concourantes en un unique point, $\boxed{\text{d'affixe } a + b + c.}$

5. **Étude des médiatrices**
L'existence d'un point de concours des médiatrices est évident puisque $A, B$ et $C$ sont dans $\mathscr{C}$, si bien que $OA = OB = OC = 1$, et donc $O$ est sur les trois médiatrices du triangle $ABC$.

Le seul obstacle à ce que $O$ soit l'**unique** point de concours des médiatrices serait que ces trois médiatrices soient confondues.
Supposons par l'absurde que ce soit le cas, et quitte à renommer les sommets du triangle, supposons que $AB$ est le plus petit des trois côtés.
Alors le milieu $I$ de $[AB]$, qui a pour affixe $\frac{a+b}{2}$ étant équidistant de $A$ et $B$, il doit aussi être équidistant de $A$ et $C$.
Autrement dit, $\left|\frac{a+b}{2} - c\right| = \left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \left|\frac{b-a}{2}\right|$.
Puisque $c - a = c - \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} - a$, par inégalité triangulaire

$$|c - a| \leqslant \left|c - \frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a+b}{2} - a\right| = \left|\frac{a-b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| = |a - b|.$$

Donc $AC \leqslant AB$, et puisque $AB$ est le plus petit des trois côtés, $AB = AC$.
Ainsi, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, si bien qu'il existe un réel positif $\lambda$ tel que $\frac{a-b}{2} = \lambda(c - a)$.
Et donc $a - b = 2\lambda(c - a)$, si bien que $\dfrac{a-b}{c-a} = 2\lambda \in \mathbf{R}$, et donc $A, B$ et $C$ sont alignés, ce qui est absurde par hypothèse.

Et donc $O$ est bien l'unique point de concours des trois médiatrices du triangle $ABC$.

6. **Centre de gravité**

**6.a.** Notons $C'$ le milieu de $[AB]$, d'affixe $c' = \frac{a+b}{2}$.
On souhaite donc prouver que $C, C'$ et $G$ sont alignés. Soit encore que $\frac{g-c}{c'-c} \in \mathbf{R}$. Or

$$\frac{g-c}{c'-c} = \frac{\frac{a+b+c}{3} - c}{\frac{a+b}{2} - c} = \frac{\frac{a+b-2c}{3}}{\frac{a+b-2c}{2}} = \frac{2}{3} \in \mathbf{R}.$$

Et donc $C, C'$ et $G$ sont bien alignés, de sorte que $G$ est sur la droite $(CC')$, qui est bien la médiane issue de $C$.

**6.b.** Puisque le même raisonnement montre que $G$ est également sur les deux autres médianes de $ABC$, $\boxed{\text{ces trois médianes sont concourantes en } G.}$

**7.** Notons $H$ l'orthocentre de $ABC$. Alors son affixe est égale à $h = a+b+c$, pendant que celle de $G$ est $g = \frac{a+b+c}{3}$, et celle du point de concours des médiatrices[3] est égale à 0.
Il est alors évident que $\dfrac{g-0}{h-0} = 3 \in \mathbf{R}$, et donc $\boxed{H, G \text{ et } O \text{ sont alignés.}}$

[3] Le centre du cercle circonscrit.

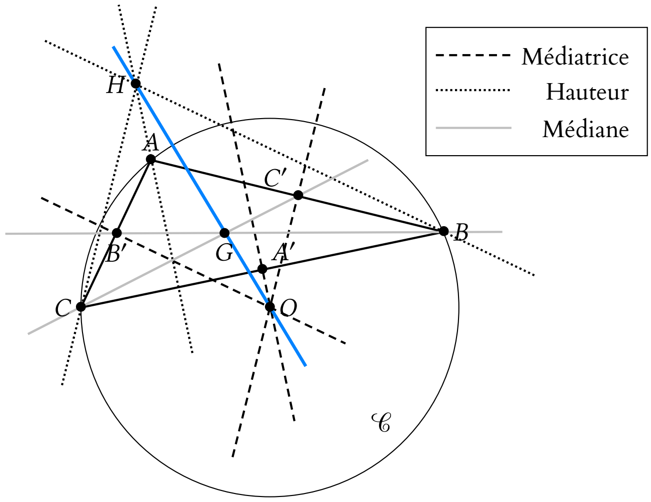


Figure 0.1 – $H$ est l'orthocentre de $ABC$, et $G$ son centre de gravité.

**Partie III. Cas général**

**8.** Notons $r = \Omega A$ (qui est égal à $\Omega B$ et à $\Omega C$ puisque $\Omega$ est équidistant de $A$, $B$ et $C$) et notons $\omega$ l'affixe de $\Omega$.
Considérons alors la translation $t$ de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$, qui envoie alors $\Omega$ sur $O$. Elle envoie alors $A, B, C$ sur trois points du cercle de centre $O$ et de rayon $r$.
Si on applique alors l'homothétie $h$ de centre $O$ et de rapport $\frac{1}{r}$, alors le cercle en question est envoyé sur $\mathscr{C}$.
Notons donc $s = h \circ t : z \mapsto \frac{1}{r}(z-\omega)$ la composée[4] de la translation et de l'homothétie précédemment décrites. Alors $|s(a)| = \frac{1}{r}|a-\omega| = 1$, si bien que $s(A) \in \mathscr{C}$.
Sur le même principe, $s(B)$ et $s(C)$ sont également dans $\mathscr{C}$.

[4] Voir la figure page suivante.

Enfin, $s$ est bien une similitude directe, puisque composée de similitudes directes, on a $s(\Omega) = O$ et $s$ est de rapport $\frac{1}{r}$.

**9.** Soit $y \in \mathbf{C}$. Alors pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a

$$s(z) = y \Leftrightarrow \frac{1}{r}(z-\omega) = y \Leftrightarrow z - \omega = ry \Leftrightarrow z = ry + \omega.$$

Et donc $s^{-1}(z) = ry + \omega$ est l'unique antécédent de $y$ par $s$.
Puisque $s^{-1}$ est encore de la forme $z \mapsto az + b$, avec $(a,b) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$, c'est encore une similitude directe.

**Remarque**

Plus généralement, l'existence d'un tel $s^{-1}(z)$ est valable quelle que soit la similitude directe $s$ considérée. On dira bientôt qu'une similitude directe réalise une bijection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$ et que $s^{-1}$ est sa bijection réciproque.

**10.** Notons $A' = s(A)$, $B' = s(B)$ et $C' = s(C)$.
La similitude directe $s^{-1}$ envoie donc le triangle $A'B'C'$ sur $ABC$.
Une similitude directe préservant l'alignement, elle envoie une droite sur une droite.
Puisqu'une similitude directe préserve les rapports de distance et l'alignement, $s^{-1}$ envoie

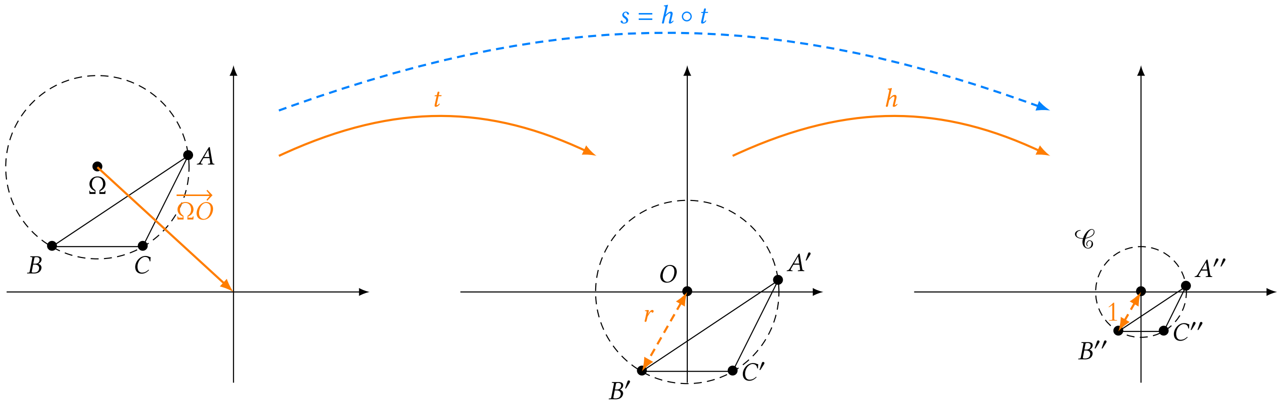


FIGURE 0.2 – $A'B'C'$ est l'image de $ABC$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{\Omega O}$, $A''B''C''$ celle de $A'B'C'$ par l'homothétie de rapport $\frac{1}{r}$. Ce dernier triangle est inscrit dans $\mathscr{C}$.

le milieu de $[A'B']$ sur le milieu de $[AB]$. Et donc envoie la médiane de $A'B'C'$ issue de $C'$ sur la médiane de $ABC$ issue de $C$.
Et de même pour chacune des autres médianes, si bien que le centre de gravité de $A'B'C'$ est envoyé sur celui de $ABC$.
De même, puisque $s^{-1}$ préserve les angles, elle envoie deux droites perpendiculaires sur deux droites perpendiculaires, et donc envoie les hauteurs de $A'B'C'$ sur les hauteurs de $ABC$.
Et donc l'orthocentre de $A'B'C'$, qui est le point commun aux trois hauteurs, est envoyé par $s^{-1}$ sur l'orthocentre de $ABC$.
Enfin, on sait déjà que $s^{-1}(O) = \Omega$.

Par la partie II, l'orthocentre de $A'B'C'$, son centre de gravité et $O$ sont alignés. Donc leurs images par $s^{-1}$, qui sont l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit de $ABC$ sont encore alignées.

## ▸ Exercice 4 : théorème de Niven

**1.** Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors $T_2(x) = xT_1(x) - T_0(x) = \boxed{x^2 - 2.}$
Puis $T_3(x) = xT_2(x) - T_1(x) = x^3 - 2x - x = \boxed{x^3 - 3x.}$

**2.** Fixons $\theta \in \mathbf{R}$, et prouvons par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}$ que $T_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$.
Pour $n = 0$, on a $T_0(2\cos\theta) = 2 = 2\cos(0\theta)$.
Et pour $n = 1$, $T_1(2\cos\theta) = 2\cos(\theta)$. Donc la récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $T_n(2\cos\theta) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(2\cos\theta) = 2\cos((n+1)\theta)$. Alors

$$\begin{aligned} T_{n+2}(2\cos\theta) &= 2\cos(\theta) \times T_{n+1}(2\cos\theta) - T_n(2\cos\theta) \\ &= 2\big(2\cos\theta\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)\big). \end{aligned}$$

Il s'agit donc de prouver que $\cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$, soit encore que $\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)$.
Or on sait que

$$2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) = \cos\big(\theta + (n+1)\theta\big) + \cos\big((n+1)\theta - \theta\big) = \cos\big((n+2)\theta\big) + \cos(n\theta).$$

Et donc on a bien $T_{n+2}(2\cos\theta) = 2\cos\big((n+2)\theta\big)$.
Donc par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ T_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta).}$

> **Rappel**
>
> $\cos a \cos b =$
> $\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$
>
> Notons que ceci peut se retrouver à l'aide de l'exponentielle complexe et des formules d'Euler.

**3.a.** Procédons de nouveau par récurrence double, sachant que l'initialisation est claire : $T_0 : x \mapsto 2$ et $T_1 : x \mapsto x$ sont des fonctions polynomiales, de degrés respectifs 0 et 1, à coefficients entiers.
Soit donc $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies.
Soient alors $a_{0,n}, \dots, a_{n,n}$ et $a_{0,n+1}, \dots, a_{n+1,n+1}$ des entiers tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}x^k \text{ et } T_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{k,n+1}x^k.$$

Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} T_{n+2}(x) = xT_{n+1}(x) - T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_{k,n+1}x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+2} a_{k-1,n+1}x^k - \sum_{k=0}^{n} a_{k,n}x^k \\ &= a_{n+1,n+1}x^{n+2} + \sum_{k=1}^{n+1} \left(a_{k-1,n+1} - a_{k,n}\right) x^k - a_{0,n}. \end{aligned}$$

Posons $a_{n+2,n+2} = a_{n+1,n+1}$, $a_{0,n+2} = -a_{0,n}$, et pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $a_{k,n+2} = a_{k-1,n+1} - a_{k,n}$.
Alors $a_{0,n+2}, \dots, a_{n+2,n+2}$ sont des entiers car les $a_{k,n}$ et les $a_{k,n+1}$ le sont, et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$T_{n+2}(x) = \sum_{k=0}^{n+2} a_{k,n+2}x^k.$$

Et donc $T_{n+2}$ est bien une fonction polynomiale de degré au plus $n+2$, à coefficients entiers.
Par le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n$ est polynomiale de degré au plus $n$ à coefficient entiers.

**3.b.** La formule donnée ci-dessus nous indique que pour $n \geqslant 0$, $a_{n+2,n+2} = a_{n+1,n+1}$.
Or $a_{1,1} = 1$, et alors une récurrence simple sans difficulté prouve que pour tout $n \geqslant 1$, $a_{n,n} = 1$.

> **Remarque**
> On pourrait adapter un peu la preuve pour obtenir une expression simple de $a_{0,n}$, le coefficient constant de $T_n$, en utilisant la relation $a_{0,n+2} = -a_{0,n}$.
> Il nous faudrait tout de même distinguer deux cas suivant la parité de $n$.

**4.a.** On a donc $T_m(2\cos\theta) = 2\cos(m\theta) = 2\cos(2\ell\pi) = 2$.

**4.b.** Rappelons que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $T_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m}x^k = x^m + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,m}x^k$.

En particulier, pour $x = \frac{p}{q}$, il vient

$$2 = T_m(2\cos\theta) = T_m\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,m}\left(\frac{p}{q}\right)^k.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité ci-dessus par $q^m$, afin de faire apparaître une égalité entre entiers :

$$p^m + \sum_{0=1}^{m-1} a_{k,m}p^kq^{m-k} - 2q^m = 0.$$

Et donc

$$\boxed{p^m = 2q^m - \sum_{k=0}^{m-1} a_{k,m}p^kq^{m-k}.}$$

**4.c.** On en déduit que

$$p^m = -\sum_{k=0}^{m-1} a_{k,m}p^kq^{m-k} + 2q^m = q\left(-\sum_{k=0}^{m-1} a_{k,m}p^kq^{m-1-k} + 2q^{m-1}\right),$$

si bien que $p^m$ est divisible par $q$.
Or $p^m = pp^{m-1}$ et $p$ et $q$ étant premiers entre eux, par le lemme de Gauss, $q$ divise $p^{m-1}$.
Sur le même principe, on en déduit que $q$ divise $p^{m-2}$, etc, et une récurrence sans difficulté nous conduit alors au fait que $q$ divise $p$.
Et donc $q$ étant un diviseur commun de $p$ et $q$, c'est un diviseur de leur PGCD, qui vaut 1.
Puisque $q \in \mathbf{N}^*$, alors $q = 1$. Et donc $\boxed{2\cos\theta = p \text{ est un entier.}}$

> **Plus généralement**
> Le même raisonnement s'adapte pour prouver qu'une racine rationnelle d'un polynôme à coefficients entiers et dont le coefficient de plus haut degré vaut 1 est nécessairement un entier.
> On peut par exemple retrouver ainsi l'irrationnalité de $\sqrt[k]{p}$, avec $p$ premier et $k \geqslant 2$, puisqu'il s'agit d'une racine de $X^k - p$, qui est bien de la forme ci-dessus. Puisque $\sqrt[k]{p}$ n'est pas entier, il ne peut pas s'agir d'un nombre rationnel.

**4.d.** Puisque $-2 \leqslant 2\cos\theta \leqslant 2$, et que $2\cos\theta \in \mathbf{Z}$, nécessairement, $2\cos\theta \in [\![-2, 2]\!]$.
Et donc $\boxed{\cos\theta \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}.}$

## ▸ Question subsidiaire

Puisque la fonction Arcsin réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation $\mathrm{Arcsin}(x) = \mathrm{Arcsin}(a) + \mathrm{Arcsin}(b)$ possède une solution si et seulement $\mathrm{Arcsin}(a) + \mathrm{Arcsin}(b) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et dans ce cas la solution est unique.

A priori, on sait seulement que $\mathrm{Arcsin}(a)$ et $\mathrm{Arcsin}(b)$ sont tous deux dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et donc que leur somme est dans $[-\pi, \pi]$.

► Si $ab \leqslant 0$, alors quitte à les échanger, on peut supposer que $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
Alors $-\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Arcsin}(a) \leqslant 0$ et $0 \leqslant \mathrm{Arcsin}(b) \leqslant \frac{\pi}{2}$, si bien que $-\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Arcsin}(a) + \mathrm{Arcsin}(b) \leqslant \frac{\pi}{2}$, et donc l'équation possède une solution.

► Si $a$ et $b$ sont de même signe, alors supposons par exemple que $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
Alors $0 \leqslant \mathrm{Arcsin}(a) + \mathrm{Arcsin}(b)$, et il s'agit donc de déterminer à quelle condition

$$\mathrm{Arcsin}(a) + \mathrm{Arcsin}(b) \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Mais

$$\mathrm{Arcsin}(a) + \mathrm{Arcsin}(b) \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Arcsin}(a) \leqslant \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}(b) \Leftrightarrow \mathrm{Arcsin}(a) \leqslant \mathrm{Arccos}(b).$$

Mais $\mathrm{Arcsin}(a)$ et $\mathrm{Arccos}(b)$ sont tous deux dans $[0, \pi]$ (et même $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$), intervalle sur lequel la fonction sin est strictement croissante. Donc

$$\mathrm{Arcsin}(a) \leqslant \mathrm{Arccos}(b) \Leftrightarrow \sin(\mathrm{Arcsin}(a)) \leqslant \sin(\mathrm{Arccos}\, b) \Leftrightarrow a \leqslant \sqrt{1-b^2} \Leftrightarrow a^2 \leqslant 1-b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \leqslant 1.$$

Et donc pour $a, b \geqslant 0$, l'équation $\mathrm{Arcsin}(x) = \mathrm{Arcsin}(a) + \mathrm{Arcsin}(b)$ possède une solution si et seulement si $a^2 + b^2 \leqslant 1$.

**Géométriquement**
Cette condition signifie que le point $(a, b)$ est à l'intérieur du cercle trigonométrique.

► Reste à traiter le cas où $a$ et $b$ sont tous deux négatifs. Mais alors $-a$ et $-b$ sont positifs, et par imparité du sinus,

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Arcsin}(a)+\mathrm{Arcsin}(b) \Leftrightarrow \mathrm{Arcsin}(-a)+\mathrm{Arcsin}(-b) \leqslant \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (-a)^2+(-b)^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 \leqslant 1.$$

Au final, $\boxed{\text{l'équation possède des solutions si et seulement si } ab \leqslant 0 \textbf{ ou } a^2 + b^2 \leqslant 1.}$
Et donc l'ensemble des tels couples $(a, b)$ est celui représenté sur la figure ci-dessous.