Devoir surveillé 2

▸ Exercice : étude d'une fonction — 1h

Dans tout l'exercice, on note $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^{\frac{x}{x+1}} \end{array}\right.$, et $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x)+x+1 \end{array}\right.$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, exprimer $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ en fonction de $g(x)$.
   En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
2. Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$, et que ce α est dans $]0,1[$. *On ne demande pas de valeur exacte de α.*
3. En déduire le tableau de variations de f, sans les limites.
4. Montrer que f est prolongeable en une fonction $\widetilde{f} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, continue sur $\mathbf{R}_+$.
5. Justifier que $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$. En utilisant cette limite, étudier la dérivabilité de $\widetilde{f}$ en 0.
6. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
7. La courbe représentative de f possède-t-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner l'équation de cette asymptote. *Indication : on pourra de nouveau faire apparaître la limite de la question 5.*

▸ Problème 1 : une équation fonctionnelle — 1h30

Dans ce problème, on cherche à déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles que

$$\forall a, b \in \mathbf{R},\ f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}. \qquad (\star)$$

Partie I. Fonction argument tangente hyperbolique

1. Justifier que th réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-1,1[$.
   Dans la suite, on note Argth sa bijection réciproque.
2. Prouver que Argth est dérivable sur $]-1,1[$ et que $\forall x \in]-1,1[$, $\mathrm{Argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b, que l'on déterminera, tels que $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1}$.
4. En utilisant la question précédente, prouver que pour tout $x \in]-1,1[$, $\mathrm{Argth}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
5. Montrer que pour tous $u, v \in]-1,1[$, $-1 < \dfrac{u+v}{1+uv} < 1$ et que
$$\mathrm{Argth}(u) + \mathrm{Argth}(v) = \mathrm{Argth}\left(\frac{u+v}{1+uv}\right).$$
6. En déduire que th vérifie $(\star)$. *On pourra poser $u = \mathrm{th}(a)$ et $v = \mathrm{th}(b)$.*

Partie II. Analyse du problème posé

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ fixée, dérivable, et satisfaisant $(\star)$.

7. Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
8. Justifier que s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = 1$, alors $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 1$.
   Que peut-on dire s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = -1$?

Jusqu'à la fin de la partie II, on suppose que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \neq \pm 1$.

9. Soit $x \in \mathbf{R}$. Exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$. En déduire que $f(x) \in]-1, 1[$.
10. Soit $a \in \mathbf{R}$.
    a. Montrer que pour tout $h \in \mathbf{R}^*$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{f(h)}{h}(1 - f(a+h)f(a))$.
    b. En déduire que $f'(a) = f'(0)\left(1 - f(a)^2\right)$.
11. Soit $g = \operatorname{Argth} \circ f$. Justifier que g est dérivable sur $\mathbf{R}$, puis déterminer une expression simple de g.

Partie III. Conclusion

12. Déterminer l'ensemble des fonctions dérivable sur $\mathbf{R}$ satisfaisant $(\star)$.

▸ Problème 2 — 1h30

Partie I. Une formule du binôme pour les polynômes factoriels descendants

Pour $x \in \mathbf{R}$, on pose $x^{\underline{0}} = 1$ et pour $n \in \mathbf{N}^*$, $x^{\underline{n}} = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)$.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Exprimer $x^{\underline{n+1}}$ en fonction de $x^{\underline{n}}$.

On souhaite à présent prouver une formule similaire à celle du binôme, à savoir que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ et tout $n \in \mathbf{N}$, $(x+y)^{\underline{n}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n-k}}$.

2. Soient x et y deux réels fixés. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{P}(n)$ la proposition $\mathscr{P}(n) : (x+y)^{\underline{n}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n-k}}$.
    a. Prouver que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
    b. Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
    Prouver que $(x+y)^{\underline{n+1}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n-k}}(x-k) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n-k}}(y-n+k)$.
    c. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Partie II. Un cas particulier de la formule de Vandermonde

3. Pour k et n deux entiers naturels, exprimer $n^{\underline{k}}$ en fonction de $\dbinom{n}{k}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Partie III. Une inégalité optimale

5. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dbinom{2n}{n} \leqslant 4^n$.
6. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tous réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$, on a $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leqslant 2^n\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k^2}$.

On cherche à présent à prouver que la constante 2 de la question précédente est optimale, au sens où on ne peut pas remplacer le facteur 2^n par λ^n avec $\lambda < 2$.

On suppose dans la suite que $\lambda \in \mathbf{R}$ est tel que $: \forall n \in \mathbf{N}, \forall (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}, \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leqslant \lambda^n\sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k^2}$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{n!}{k!} \leqslant \dfrac{(2n-k)!}{n!}$.
8. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $\dbinom{2n}{k} \leqslant \dbinom{2n}{n}$, puis que $\dbinom{2n}{n} \geqslant \dfrac{4^n}{2n+1}$.
9. Conclure.

Correction du Devoir surveillé 2

▸ Exercice 1 : étude de fonction

1. Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a $f(x) = \exp\left(\frac{x}{x+1}\ln(x)\right)$.
Par composition et produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et alors

$$\forall x > 0,\ f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\frac{1}{x} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2}\ln(x)\right)\exp\left(\frac{x}{x+1}\ln(x)\right) = \frac{f(x)}{(x+1)^2}\left(x+1+\ln(x)\right) = \frac{f(x)}{(x+1)^2}g(x).$$

Et donc $\boxed{\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}.}$

Notons qu'il y a un moyen d'aller plus vite en remarquant que $\frac{f'}{f}$ est la dérivée de $\ln(f)$.
Or pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln(f(x)) = \frac{x}{x+1}\ln(x)$, et donc en dérivant,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{x+1}\frac{1}{x} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2}\ln(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\ln(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(x+1)^2 > 0$ et $f(x) > 0$, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

2. La fonction g est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+^*$ puisque somme de fonctions qui le sont, et elle est continue[1].
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$.
Et par conséquent, il existe un unique $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Par ailleurs, on a $g(1) = 2 > 0 = g(\alpha)$, et donc par stricte croissance de g, $1 > \alpha$, si bien que $\alpha \in]0,1[$.

[1] Car dérivable puisque somme de fonctions dérivables.

3. On a donc le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. Nous savons que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$, et puisque $x+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, alors par quotient $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x\ln(x)}{x+1} = 0$.
Et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\exp\left(\frac{x\ln(x)}{x+1}\right) = 1$.
Donc $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$
Posons alors $\tilde{f} : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}\end{array}\right.$
Alors $\tilde{f}$ est continue en 0, et puisque f était continue (car dérivable) sur $\mathbf{R}_+^*$, et que f et $\tilde{f}$ coïncident sur $\mathbf{R}_+^*$, alors $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.
Ainsi, $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbf{R}_+$ tout entier.

5. On a, pour $u \neq 0$,

$$\frac{e^u - 1}{u} = \frac{e^u - e^0}{u - 0} \underset{u\to 0}{\longrightarrow} \exp'(0) = \boxed{1.}$$

Détails
On a reconnu le taux d'accroissement en 0 de la fonction exponentielle, dont la limite est, par définition d'une dérivée, $\exp'(0)$.

Donc pour $x \in]0,1[$,

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{\frac{x}{x+1}\ln(x)} - 1}{x} = \frac{e^{\frac{x}{x+1}\ln(x)} - 1}{\frac{x}{x+1}\ln(x)}\,\frac{\frac{x}{x+1}\ln(x)}{x}.$$

Autrement dit, si on note $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ u & \longmapsto & \frac{e^u-1}{u} \end{array} \right.$, alors

$$\frac{\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(0)}{x} = h\left(\frac{x}{x+1}\ln(x)\right)\frac{\frac{x}{x+1}\ln(x)}{x} = h\left(\frac{x}{x+1}\ln(x)\right)\frac{\ln x}{x+1}.$$

Or $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+1}\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{u\to 0} h(u) = 1$, si bien que $\lim\limits_{x\to 0} h\left(\frac{x}{x+1}\ln(x)\right) = 1$.
Et par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{x+1} = -\infty$, donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\widetilde{f}(x)-\widetilde{f}(0)}{x} = -\infty$.
Ainsi, $\boxed{\widetilde{f} \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

6. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{x}{x+1}}}{x} = x^{\frac{x}{x+1}-1} = x^{-\frac{1}{x+1}} = \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x+1}\right).$$

Mais $\frac{\ln(x)}{x+1} = \frac{\ln x}{x}\frac{x}{x+1} = \frac{\ln x}{x}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée.
Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1.}$

7. Il s'agit donc de déterminer si $f(x)-x$ possède ou non une limite finie en $+\infty$.
Or pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x)-x = x^{\frac{x}{x+1}} - x &= x\left(x^{-\frac{1}{x+1}}-1\right) \\ &= x\left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x+1}\right)-1\right) \\ &= -\frac{x\ln(x)}{x+1}\,\frac{\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x+1}\right)-1}{-\frac{\ln(x)}{x+1}} \\ &= -\frac{x\ln(x)}{x+1}h\left(-\frac{\ln x}{x+1}\right). \end{aligned}$$

Puisque $-\frac{\ln(x)}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $\lim\limits_{u\to 0} h(u) = 1$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} h\left(-\frac{\ln(x)}{x+1}\right) = 1$.
Et par ailleurs, $-\frac{x\ln x}{x+1} = \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1}\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si bien que par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = -\infty$.
On en déduit donc que $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ ne possède pas d'asymptote au voisinage de } +\infty.}$

▸ Problème 1 : une équation fonctionnelle

Partie I. Fonction argument tangente hyperbolique

1. Il a déjà été prouvé en cours que th est continue[2], strictement croissante, avec $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{th}(x) = 1$.
Par le théorème de la bijection, $\boxed{\text{elle réalise donc une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur }]-1,1[.}$

[2] Puisque dérivable.

2. La dérivée de th est $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$, qui ne s'annule pas. Et donc $\mathrm{th}' \circ \mathrm{Argth}$ ne s'annule pas non plus sur $\mathbf{R}$, si bien que Argth est dérivable sur $\mathbf{R}$ tout entier.
On a alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{Argth}(x))} = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{Argth}(x))} = \boxed{\frac{1}{1-x^2}}.$$

Rappel
On connaît deux formes pour la dérivée de th, à savoir $\frac{1}{\mathrm{ch}^2}$ et $1-\mathrm{th}^2$.

3. Supposons que de tels réels a et b existent, et considérons donc a, b tels que $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.
Alors pour $x = 0$, $1 = a - b$. Et pour $x = \frac{1}{2}$, il vient

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{4}{3} = \frac{a}{1+\frac{1}{2}} + \frac{b}{\frac{1}{2}-1} = \frac{2}{3}a - 2b.$$

Et donc on a $\begin{cases} a-b=1 \\ 2a-6b=4 \end{cases}$ ce qui après calcul nous donne $b = -\frac{1}{2}$ et $a = \frac{1}{2}$.

Vérifions à présent que ces deux réels satisfont aux conditions requises : soit $x \in]-1,1[$.
Alors

$$\frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\frac{x-1-x-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Et donc on a bien

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right).}$$

4. Soit $x \in]-1,1[$. Alors $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = [\mathrm{Argth}(t)]_0^x = \mathrm{Argth}(x) - \mathrm{Argth}(0)$.
Puisque $\mathrm{th}(0) = 0$, alors $\mathrm{Argth}(0) = 0$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} &= \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\left[(\ln(t+1) - \ln(1-t))\right]_0^x = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(1-x)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).\end{aligned}$$

Danger ! Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ est $t \mapsto -\ln(1-t)$, et pas $t \mapsto \ln(1-t)$.

Et donc $\boxed{\mathrm{Argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$

Alternative : il est également possible de remarquer que $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.
Et donc que Argth et $x \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ sont deux primitives de la même fonction, donc diffèrent d'une constante. Et puisqu'elles coïncident en 0, cette constante est nulle.

5. Soient $u, v \in]-1,1[$. Alors $1 + uv > 0$, si bien que

$$-1 < \frac{u+v}{1+uv} < 1 \Leftrightarrow -1-uv < u+v < 1+uv \Leftrightarrow \begin{cases} 1+uv-u-v > 0 \\ 1+u+v+uv > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-u)(1-v) > 0 \\ (1+u)(1+v) > 0 \end{cases}$$

Or cette dernière assertion est vraie[3], donc $-1 < \frac{u+v}{1+uv} < 1$.
Il vient alors

$$\mathrm{Argth}(u) + \mathrm{Argth}(v) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\frac{1+v}{1-v}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u+v+uv}{1-u-v+uv}\right).$$

Par ailleurs, on a également

$$\mathrm{Argth}\left(\frac{u+v}{1+uv}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{u+v}{1+uv}}{1-\frac{u+v}{1+uv}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{1+u+v+uv}{1+uv}}{\frac{1+uv-u-v}{1+uv}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u+v+uv}{1-u-v+uv}\right) = \boxed{\mathrm{Argth}(u) + \mathrm{Argth}(v).}$$

[3] Puisque les 4 nombres $1+u, 1+v, 1-u, 1-v$ sont strictement positifs.

6. Soient $a, b \in \mathbf{R}$. Utilisons la question précédente avec $u = \mathrm{th}(a)$ et $v = \mathrm{th}(b)$. Alors

$$a + b = \mathrm{Argth}(\mathrm{th}(a)) + \mathrm{Argth}(\mathrm{th}(b)) = \mathrm{Argth}\left(\frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}\right).$$

En appliquant la fonction th aux deux membres de l'égalité, il vient donc

$$\mathrm{th}(a+b) = \mathrm{th}\left(\mathrm{Argth}\left(\frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}\right)\right) = \frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\,\mathrm{th}(b)}.$$

Et donc $\boxed{\text{th vérifie bien la propriété } (\star).}$

Partie II. Analyse du problème posé

7. On a $f(0) = f(0+0) = \dfrac{f(0)+f(0)}{1+f(0)f(0)} = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$.
Et donc $f(0)\left(1+f(0)^2\right) = 2f(0)$, soit encore $f(0)\left(f(0)^2-1\right) = 0$.
Ainsi, $f(0)$ est une solution de l'équation $x(x^2-1) = 0$.
Et donc $\boxed{f(0) \in \{-1, 0, 1\}}$.

8. Supposons qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = 1$, et considérons un tel a.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(x) = f(a+(x-a)) = \frac{f(a)+f(x-a)}{1+f(a)f(x-a)} = \frac{1+f(x-a)}{1+f(x-a)} = 1.$$

Et donc $\boxed{f \text{ est constante égale à } 1}$.

Remarque

L'équation $(\star)$ implique (implicitement) que pour tout a, b, $1+f(a)+f(b) \neq 0$, donc il n'y a pas de risque de division par 0, ici.

Sur le même principe, s'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(a) = -1$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) = f(a+(x-a)) = \frac{-1+f(x-a)}{1-f(x-a)} = -1.$$

Et donc $\boxed{f \text{ est constante égale à } -1}$.

9. On a

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \boxed{\frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2}}.$$

Mais rappelons que pour tout $a \in \mathbf{R}$, on a $(1+a)^2 \geqslant 0$, et donc $1+2a+a^2 \geqslant 0$, si bien que $-2a \leqslant 1+a^2$ et donc $\dfrac{2a}{1+a^2} \geqslant -1$.
Et de même, on a $(1-a)^2 \geqslant 0$ et

$$(1-a)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2a \leqslant 1+a^2 \Leftrightarrow \frac{2a}{1+a^2} \leqslant 1.$$

Autrement dit, pour tout $a \in \mathbf{R}$, $-1 \leqslant \dfrac{2a}{1+a^2} \leqslant 1$.
Et en particulier, pour $a = f\left(\frac{x}{2}\right)$, il vient $-1 \leqslant \dfrac{f\left(2\frac{x}{2}\right)}{1+f\left(\frac{x}{2}\right)^2} \leqslant 1$ et donc $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
Puisque de plus on a supposé $f(x) \neq \pm 1$, alors $\boxed{f(x) \in]-1, 1[}$.

Pus généralement

Sur le même principe, pour $a, b \in \mathbf{R}$,

$$-1 \leqslant \frac{2ab}{a^2+b^2} \leqslant 1.$$

10.a. Soit $h \in \mathbf{R}^*$. Procédons par équivalences : on a

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(h)}{h}\left(1-f(a+h)f(a)\right) &\Leftrightarrow f(a+h)-f(a) = f(h)\left(1-f(a+h)f(a)\right)\\ &\Leftrightarrow f(a+h) = f(h)-f(a)f(a+h)f(h)+f(a)\\ &\Leftrightarrow f(a+h)\left(1+f(a)f(h)\right) = f(a)+f(h)\\ &\Leftrightarrow f(a+h) = \frac{f(a)+f(h)}{1+f(a)f(h)}\end{aligned}$$

Remarque

Puisque f est à valeurs dans $]-1,1[$, $f(a)f(h) \in]-1,1[$, et donc $1+f(a)f(h) \neq 0$.

Or cette dernière relation est vraie puisque f vérifie $(\star)$, et donc

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(h)}{h}\left(1-f(a+h)f(a)\right).$$

10.b. Puisque f est dérivable en a, on a $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.
Et par ailleurs, f étant dérivable, elle est continue en a, et donc $f(a+h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(a)$.
Reste à noter que puisque $f(0) \neq \pm 1$, on a nécessairement, d'après la question 7, $f(0) = 0$, et donc

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(0).$$

Si bien que par passage à la limite lorsque $h \to 0$ dans l'égalité de la question précédente,

$$f'(a) = f'(0)(1-f(a)^2).$$

11. Puisque f est dérivable sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $]-1,1[$, et que Argth est dérivable sur $]-1,1[$, par composition, g est dérivable sur $\mathbf{R}$, et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = f'(x)\mathrm{Argth}'(f(x)) = \frac{f'(x)}{1-f(x)^2} = f'(0).$$

Donc la fonction g' est constante, égale à $f'(0)$.
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = f'(0)x + \lambda$.
Puisque par ailleurs, $g(0) = \mathrm{Argth}(f(0)) = \mathrm{Argth}(0) = 0$, alors $\lambda = 0$.
Et donc $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbf{R},\ g(x) = f'(0)x.}$

Remarque

Notons que $g = \mathrm{Argth} \circ f$, est bien définie puisque f est à valeurs dans $]-1,1[$.

Partie III. Conclusion

12. Nous venons de dire que si f est une solution du problème posé, qui ne prend pas les valeurs -1 et 1, alors il existe une constante α, égale à $f'(0)$, telle que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Argth}(f(x)) = \alpha x$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \mathrm{th}(\alpha x)$.
Par ailleurs, si une solution prend la valeur 1 ou -1, alors elle est constante, égale à 1 ou -1.
Inversement, si $\alpha \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto \mathrm{th}(\alpha x)$ est dérivable, et vérifie $(\star)$ puisque th la vérifie.
Enfin, les fonctions constantes égales à 1 et -1 sont évidemment solution de $(\star)$, et donc les fonctions satisfaisant $(\star)$ sont les fonctions constantes égales à 1 ou -1, ainsi que toutes les $x \mapsto \mathrm{th}(\alpha x)$, pour $\alpha \in \mathbf{R}$.

▸ Problème 2

Partie I. Une formule du binôme pour les polynômes factoriels descendants.

1. On a $x^{\underline{n+1}} = \prod_{k=0}^{n}(x-k) = (x-n)\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) = \boxed{x^{\underline{n}}(x-n).}$

2.a. On a $(x+y)^{\underline{0}} = 1$ et $\sum_{k=0}^{0}\binom{n}{0}x^{\underline{k}}y^{\underline{0-k}} = \binom{0}{0}x^{\underline{0}}y^{\underline{0}} = 1$.
Donc $\boxed{\mathscr{P}(0) \text{ est vraie.}}$

2.b. D'après la question 1, on a $(x+y)^{\underline{n+1}} = (x+y)^{\underline{n}}(x+y-n)$.
Et donc en utilisant $\mathscr{P}(n)$, il vient

$$\begin{aligned}
(x+y)^{\underline{n+1}} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n-k}}(x+y-n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n-k}}\left[(x-k)+(y-n+k)\right]\\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n-k}}(x-k) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n-k}}(y-n+k).}
\end{aligned}$$

2.c. Terminons l'hérédité : toujours en supposant que n est tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, on a

$$\begin{aligned}
(x+y)^{\underline{n+1}} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k+1}}y^{\underline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n+1-k}}\\
&= \sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}x^{\underline{i}}y^{\underline{n-(i-1)}} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n+1-k}}\\
&= \binom{n}{0}x^{\underline{0}}y^{\underline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n+1-k}} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}x^{\underline{i}}y^{\underline{n+1-i}} + \binom{n}{n}x^{\underline{n+1}}y^{\underline{0}}\\
&= x^{\underline{0}}y^{\underline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right]x^{\underline{k}}y^{\underline{n+1-k}} + x^{\underline{n+1}}y^{\underline{0}}\\
&= x^{\underline{0}}y^{\underline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{\underline{k}}y^{\underline{n+1-k}} + x^{\underline{n+1}}y^{\underline{0}}
\end{aligned}$$

On a appliqué deux fois le résultat de 3.a.

Chgt d'indice

Dans la première somme, $i = k+1$.

Identité de Pascal.

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n+1-k}}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi, par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Détails
On a
$$\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+1}{n+1}.$$

Remarque : vous aurez sûrement reconnu que la structure générale de la preuve est très semblable à celle du binôme.

Partie II. Un cas particulier de la formule de Vandermonde

3. Soient n et k deux entiers naturels.

▶ Si $n < k$, alors $n^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$.

Mais pour $i = n$, on a $n - i = 0$, si bien que le produit est nul, donc $n^{\underline{k}} = 0 = \binom{n}{k}$.

▶ Si $n \geqslant k$, alors

$$n^{\underline{k}} = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \prod_{j=n-k+1}^{n} j = \frac{\prod_{j=1}^{n} j}{\prod_{j=1}^{n-k} j} = \frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}.$$

Notons que cette formule est encore valable pour $n < k$, si bien qu'on a toujours $\boxed{n^{\underline{k}} = k!\binom{n}{k}.}$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$, et prenons $x = y = n$. Alors d'une part,

$$(n+n)^{\underline{n}} = (2n)^{\underline{n}} = n!\binom{2n}{n}.$$

D'autre part, grâce à la formule établie à la partie précédente,

$$(n+n)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{\underline{k}} n^{\underline{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!\binom{n}{k}(n-k)!\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \cancel{k!}\cancel{(n-k)!}\frac{n!}{\cancel{(n-k)!}\cancel{k!}} = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Et donc il vient $n!\binom{2n}{n} = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ si bien que $\boxed{\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.}$

Partie III. Une inégalité optimale

5. Nous savons que[4] $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^k 1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n} = 4^n$.

Soit encore

$$\sum_{\substack{k=0\\k\neq n}}^{2n}\binom{2n}{k} + \binom{2n}{n} = 4^n.$$

Mais puisque pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$, $\binom{2n}{k} \geqslant 0$, on en déduit que $\boxed{\binom{2n}{n} \leqslant 4^n.}$

[4] C'est la somme des coefficients de la $(2n)^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal.

Alternative
L'inégalité demandée peut aussi se prouver par récurrence sur n.

6. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$.

Alors on a

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}a_k^2}.$$

Mais par la formule de Vandermonde de la partie II, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n} \leqslant 4^n$.

Et donc il vient bien comme annoncé

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leqslant \sqrt{4^n}\sqrt{\sum_{k=0}^{n}a_k^2} \leqslant \boxed{2^n\sqrt{\sum_{k=0}^{n}a_k^2}.}$$

7. Soit $n \in \mathbf{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

► Si $n = 0$, alors $k = 0$, et on a $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{1} = 1$ et $\dfrac{(2n-k)!}{n!} = \dfrac{1}{1} = 1$, donc l'inégalité annoncée est vraie.

► Si $n \geqslant 1$. Alors

$$\frac{\frac{n!}{k!}}{\frac{(2n-k)!}{n!}} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(k+1)}{(2n-k)(2n-k-1)\cdots(n+1)}.$$

Notons que les produits qui apparaissent au numérateur et au dénominateur ont tous deux le même nombre de termes, à savoir $n-k+1 = (2n-k)-n+1$.

Et donc

$$\frac{\frac{n!}{k!}}{\frac{(2n-k)!}{n!}} = \frac{n}{2n-k}\frac{n-1}{2n-k-1}\cdots\frac{k+2}{n+2}\frac{k+1}{n+1}.$$

Puisque $k \leqslant n$, $2n-k \geqslant n$, et donc chacune des fractions du produit ci-dessus est inférieure ou égale à 1, si bien que

$$\frac{\frac{n!}{k!}}{\frac{(2n-k)!}{n!}} \leqslant 1 \text{ et donc } \frac{n!}{k!} \leqslant \frac{(2n-k)!}{n!}.$$

Plus rigoureusement[5] : le changement d'indice $j = i-(n-k)$ prouve que

$$\frac{(2n-k)!}{k!} = \prod_{i=n+1}^{2n-k} i = \prod_{j=k+1}^{n}(j+(n-k)) \geqslant \prod_{j=k+1}^{n} j = \frac{n!}{k!}.$$

[5] Mais c'est le même argument.

8. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $k \in [\![0, 2n]\!]$.

► Si $k \in [\![0, n]\!]$, alors en multipliant par $(2n)!$ l'inégalité de la question précédente, on a

$$\frac{(2n)!n!}{k!} \leqslant \frac{(2n)!(2n-k)!}{n!} \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \leqslant \frac{(2n)!}{n!n!} \Leftrightarrow \binom{2n}{k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

► Et si $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, alors $2n-k \in [\![0, n-1]\!]$, si bien que

$$\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k} \leqslant \binom{2n}{n}.$$

On en déduit que

$$4^n = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}.$$

Et donc que $\boxed{\binom{2n}{n} \geqslant \dfrac{4^n}{2n+1}.}$

Interprétation

Ce que nous venons de prouver est en fait assez intuitif : le coefficient situé au milieu de la $(2n)^{\text{ème}}$ ligne du triangle de Pascal est plus grand que tous les autres.

En effet, la suite des $\binom{2n}{k}$ croit jusqu'à $\binom{2n}{n}$, puis décroit.

9. Notons dès à présent que $\lambda > 0$ car pour $n = 1$ et $a_0 = a_1 = 1$, on a

$$\left|\binom{1}{0}+\binom{1}{1}\right| \leqslant \lambda^1\sqrt{1^2+1^2} \text{ donc } \lambda \geqslant \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbf{N}$, en prenant pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = \binom{n}{k}$, on obtient

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\right| \leqslant \lambda^n\sqrt{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2} \Leftrightarrow \lambda^n \geqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2} \geqslant \sqrt{\binom{2n}{n}} \geqslant \frac{2^n}{\sqrt{2n+1}}.$$

En passant au logarithme, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$n \ln(\lambda) \geqslant n \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(2n+1) \Leftrightarrow \ln(\lambda) - \ln(2) \geqslant -\frac{\ln(2n+1)}{2n}.$$

Par croissances comparées[6], $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1} = 0$.
Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2n} = 1$, par produit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2n+1)}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}\frac{2n+1}{2n} = 0.$$

Et donc par passage à la limite, $\ln(\lambda) - \ln(2) \geqslant 0$ si bien que $\ln(\lambda) \geqslant \ln(2)$ et donc $\lambda \geqslant 2$.

Ainsi, 2 est bien **le plus petit réel** λ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tous réels $a_0, \dots, a_n$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k\right| \leqslant \lambda^n \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2}.$$

[6] Puisque $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.