

CONCOURS BLANC

► Exercice 1 : inégalité de Bennett

Dans tout l'exercice, on considère un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathbf{P})$, $n \in \mathbf{N}^*$, et $a \in \mathbf{R}_+^*$.

Soient alors $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[-a, a]$.

On suppose en outre que les X_i sont centrées réduites, c'est-à-dire que $\mathbf{E}(X_i) = 0$ et $\mathbf{V}(X_i) = 1$.

On pose alors $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Enfin, on fixe $\varepsilon > 0$.

Le but de l'exercice est de majorer $\mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon)$, et ce de deux manières différentes.

1. Calculer $\mathbf{E}(M_n)$ et $\mathbf{V}(M_n)$. En déduire que $\mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$.

Dans la suite de l'exercice, on note $\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}^* & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \end{cases}$.

2. Justifier que φ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbf{R}$. On note alors encore φ ce prolongement.

3. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(x) = \int_0^1 (1-t)e^{tx} dt$. En déduire que φ est croissante sur $\mathbf{R}$.

4. Prouver que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{E}(e^{tX_i}) \leq 1 + t^2\varphi(ta)$.

5. Soit $t > 0$. Justifier que $[M_n \geq \varepsilon] = [e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \geq e^{nt\varepsilon}]$.

En déduire que $\mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) \leq e^{-nt\varepsilon} \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(e^{tX_i})$.

6. Prouver alors que pour tout $t > 0$, $\mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) \leq e^{nt^2\varphi(ta) - nt\varepsilon}$.

7. On note $\psi : \begin{cases} \mathbf{R}_+ & \longrightarrow \mathbf{R} \\ x & \longmapsto x \ln(x) - x + 1 \end{cases}$.

- a. À l'aide d'une étude de fonction, justifier que $\mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\psi(1+a\varepsilon)}{a^2}n\right)$.

- b. En déduire que $\mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\psi(1+a\varepsilon)}{a^2}n\right)$.

Comparer cette majoration à celle de la question 1.

► Exercice 2 : matrices de trace nulle et matrices de diagonale nulle

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite de diagonale nulle si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[M]_{i,i} = 0$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Prouver que si A est semblable à une matrice de diagonale nulle, alors $\text{tr}(A) = 0$.

Le but de ce problème est de prouver le résultat suivant, qui est une réciproque de la question précédente : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice de trace nulle, alors A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Partie I. Quelques résultats préparatoires

Dans cette partie, E est un espace euclidien de dimension n , dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de trace nulle.

On fixe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , et on note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\langle f(e_i), e_i \rangle$ en fonction des coefficients de la matrice A .

En déduire que A est de diagonale nulle si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle f(e_i), e_i \rangle = 0$.

3. On suppose dans cette question que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,i} \neq 0$.

- a. Justifier qu'il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $\langle f(e_i), e_i \rangle > 0$ et $\langle f(e_j), e_j \rangle < 0$.
On se fixe dans la suite de la question de tels entiers i et j .
- b. Montrer que $\varphi : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto \langle te_i + (1-t)e_j, f(te_i + (1-t)e_j) \rangle \end{cases}$ est continue.
- c. En déduire qu'il existe un vecteur $x \in E \setminus \{0_E\}$, tel que $\langle x, f(x) \rangle = 0$.
4. Prouver qu'il existe toujours un vecteur $x \in E$, unitaire, tel que $\langle x, f(x) \rangle = 0$.

Partie II. Une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante :

«pour tout espace euclidien E de dimension n , si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\text{tr}(f) = 0$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit de diagonale nulle.»

5. Prouver $\mathcal{P}(1)$.
6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et on souhaite prouver $\mathcal{P}(n+1)$.
Soit donc E un espace euclidien de dimension $n+1$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de trace nulle.
- a. À l'aide de la question 4 justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_{n+1})$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ soit de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $\text{tr}(A) = 0$.
- b. Jusqu'à la fin de la question 6, on note $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.
On note également p le projecteur orthogonal sur F , et on pose $g = p \circ f|_F$.
Justifier que g est un endomorphisme de F et que sa matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est A .
- c. Justifier qu'il existe une base orthonormée $(e'_1, \dots, e'_n)$ de F telle que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle g(e'_j), e'_j \rangle = 0$.
- d. Montrer que $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n, e_{n+1})$ est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de f est de diagonale nulle, ce qui achève de prouver $\mathcal{P}(n+1)$.
7. Prouver finalement que toute matrice réelle de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

► Problème : développement en série de la cotangente

Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, on note $C(x) = \pi \cotan(\pi x)$, où $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.

Partie I. Préliminaires

1. Montrer que la fonction C est bien définie sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, continue, impaire, et qu'elle est 1-périodique.
2. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
- a. Montrer que $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$ sont encore dans $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.
- b. Montrer que $C\left(\frac{x}{2}\right) + C\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2C(x)$.
3. a. Déterminer un équivalent simple, au voisinage de 0, de $\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)$.
- b. Déterminer un réel K tel que $C(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} Kx$.
En déduire la limite en 0 de $C(x) - \frac{1}{x}$.

Partie II. Définition de S

4. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{2x}{x^2 - k^2}$ est bien définie et qu'elle est convergente.

Dans la suite, pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, on pose $S(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$, et pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{2x}{x^2 - k^2}$.

5. Montrer que S est impaire.
6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

- a. Montrer que $S_n(x) = \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+k}$.
- b. Prouver que $S_n(x+1) - S_n(x) = \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n}$.
- c. En déduire que la fonction S est 1-périodique.
- d. Montrer que $S(1-x) = -S(x)$. En déduire la valeur de $S\left(\frac{1}{2}\right)$.

7. Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

- a. En utilisant la formule de la question 6.a, prouver que pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$S_n\left(\frac{x}{2}\right) + S_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}.$$

- b. En déduire que $S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x)$.

Partie III. Continuité de S .

8. Soient a, x deux éléments de $]0, 1[$.

- a. Soit $k \in \mathbf{N}$, avec $k \geq 2$. Montrer que $0 \leq \frac{1}{k^2 - x^2} \leq \frac{1}{k^2 - 1}$.
- b. Pour $n \geq 2$, justifier que

$$\left| \sum_{k=2}^n \frac{2x}{x^2 - k^2} - \sum_{k=2}^n \frac{2a}{a^2 - k^2} \right| \leq 2|x - a| \sum_{k=2}^n \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2}.$$

- c. En déduire que $|S(x) - S(a)| \leq \left| \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2 - 1} \right| + 2|x - a| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2}$
en prenant soin de justifier l'existence de cette dernière somme.
- d. Prouver enfin que S est continue sur $]0, 1[$, puis qu'elle l'est sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

9. a. Pour $x \in]0, 1[$, prouver que $\left| S(x) - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - 1} \right| \leq 2x \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$.

- b. En déduire la limite de $S(x)$ en 0^+ et en 0^- .
- c. Déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de 0.

Partie IV. Simplification de S .

Pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, on note $f(x) = C(x) - S(x)$.

10. a. Vérifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, continue, impaire, et qu'elle est 1-périodique.
- b. Montrer que pour $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$.
- c. Prouver que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
- d. En déduire que f est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$.
11. On note encore f le prolongement par continuité de f à $\mathbf{R}$ tout entier.
- a. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$.
- b. Justifier que f possède un maximum M sur $[0, 1]$.
- c. Soit $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = M$. Montrer que $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = M$, puis que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = M$.
- d. En déduire que $f(0) = M$. Que dire alors du signe de f sur $[0, 1]$?
- e. Montrer que f est nulle sur $\mathbf{R}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, on a $C(x) = S(x)$, soit encore $\pi \cotan(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$ (EULER, 1748).

CORRECTION DU CONCOURS BLANC

► Exercice 1 : inégalité de Bennett

1. Par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(M_n) = \mathbf{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}(X_i) = \boxed{0}$.

Par ailleurs, par indépendance des X_i , $\mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{V}(X_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$, si bien que

$$\mathbf{V}(M_n) = \mathbf{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{n}{n^2} = \boxed{\frac{1}{n}}.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a alors

$$\mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(|M_n - \mathbf{E}(M_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(M_n)}{\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}.$$

2. Par quotient de fonctions continues, φ est continue sur $\mathbf{R}^*$.

Et à l'aide d'un développement limité d'ordre 2, $e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}$ si bien que $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \frac{1}{2}$.

Donc φ est prolongeable par continuité en 0, et son prolongement par continuité est continu sur $\mathbf{R}$.

3. Pour $x = 0$, on a $\int_0^1 (1-t)e^{tx} dt = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2} = \varphi(0)$.

Soit $x \neq 0$. Alors par intégration par parties, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)e^{tx} dt &= \left[(1-t) \frac{e^{tx}}{x} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{tx}}{x} dt \\ &= -\frac{1}{x} + \left[\frac{e^{tx}}{x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{x} + \frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \boxed{\varphi(x)}. \end{aligned}$$

Soient à présent $a \leq b$ deux réels. Alors pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)e^{ta} \leq (1-t)e^{tb}$, si bien que par croissance de l'intégrale, $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est croissante sur } \mathbf{R}}$.

4. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $t > 0$. Alors par la formule de transfert, $\mathbf{E}(e^{tX_i}) = \sum_{x \in X_i(\Omega)} e^{tx} \mathbf{P}(X_i = x)$.

Mais pour tout $x \in X_i(\Omega)$, on a $x \leq a$, si bien que $tx \leq ta$, et donc $\varphi(tx) \leq \varphi(ta)$.

Ainsi, $\frac{e^{tx} - 1 - tx}{t^2 x^2} \leq \varphi(ta)$, et donc $e^{tx} \leq 1 + tx + \varphi(ta)t^2 x^2$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e^{tX_i}) &\leq \sum_{x \in X_i(\Omega)} (1 + tx + t^2 x^2 \varphi(ta)) \mathbf{P}(X_i = x) \\ &\leq \sum_{x \in X_i(\Omega)} \mathbf{P}(X_i = x) + t \sum_{x \in X_i(\Omega)} x \mathbf{P}(X_i = x) + t^2 \varphi(ta) \sum_{x \in X_i(\Omega)} x^2 \mathbf{P}(X_i = x) \\ &\leq 1 + t \underbrace{\mathbf{E}(X_i)}_{=0} + t^2 \varphi(ta) \mathbf{E}(X_i^2) \\ &\leq 1 + t^2 \varphi(ta) (\underbrace{\mathbf{V}(X_i)}_{=1} + \underbrace{\mathbf{E}(X_i)^2}_{=0}) \leq \boxed{1 + t^2 \varphi(ta)}. \end{aligned}$$

5. Puisque $t > 0$, $[M_n \geq \varepsilon] = [ntM_n \geq nt\varepsilon] = [t(X_1 + \dots + X_n) \geq nt\varepsilon]$, et par stricte croissance de l'exponentielle, $[tM_n \geq t\varepsilon] = [e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \geq e^{t\varepsilon}]$.

Or $e^{t(X_1 + \dots + X_n)}$ est une variable aléatoire à valeurs positives, donc par l'inégalité de Markov

$$\mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{t(X_1 + \dots + X_n)} \geq e^{nt\varepsilon}) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{t(X_1 + \dots + X_n)})}{e^{nt\varepsilon}}.$$

Rappel

Rappelons que l'indépendance est l'une des hypothèses sous lesquelles on sait affirmer que la variance de la somme est la somme des variances.

¹ On a supposé que X_i était à valeurs dans $[-a, a]$.

La dernière somme est égale à $\mathbf{E}(X_i^2)$ par formule de transfert.

Formule de Huygens.

Stricte croissance

Pour une fonction seulement croissante (et pas strictement), on n'a qu'une implication $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$, ce qui ne prouverait qu'une inclusion entre événements, pas une égalité.

Mais $e^{t(X_1+\dots+X_n)} = e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}$, et par le lemme des coalitions, les e^{tX_i} sont mutuellement indépendantes, si bien que

$$\mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E} (e^{tX_i}).$$

Ainsi, il vient bien

$$\mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) \leq e^{-nt\varepsilon} \prod_{i=1}^n \mathbf{E} (e^{tX_i}).$$

6. Par la question 3, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mathbf{E} (e^{tX_i}) \leq 1 + t^2\varphi(at)$.
Et par l'inégalité de convexité classique $1 + x \leq e^x$, $1 + t^2\varphi(at) \leq e^{t^2\varphi(at)}$ et donc

$$\mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) \leq e^{-nt\varepsilon} \prod_{i=1}^n e^{t^2\varphi(at)} \leq e^{nt^2\varphi(at) - nt\varepsilon}.$$

- 7.a. Pour $t > 0$, notons $\theta(t) = t^2\varphi(at) - \varepsilon t = \frac{e^{at} - 1 - at}{a^2} - \varepsilon t$.

Alors θ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, avec $\theta' : t \mapsto \frac{e^{at}}{a} - \frac{1}{a} - \varepsilon$.

Et donc $\theta'(t) \geq 0 \Leftrightarrow e^{at} \geq 1 + a\varepsilon \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln(1 + a\varepsilon)}{a}$.

Ainsi², θ atteint un minimum en $t_0 = \frac{\ln(1 + a\varepsilon)}{a}$, et ce minimum vaut

$$\theta(t_0) = \frac{(1 + a\varepsilon) - 1 - \ln(1 + a\varepsilon)}{a^2} - \varepsilon \frac{\ln(1 + a\varepsilon)}{a} = \frac{a\varepsilon - (1 + a\varepsilon) \ln(1 + a\varepsilon)}{a^2} = -\frac{\psi(1 + a\varepsilon)}{a^2}.$$

Et donc en choisissant $t = t_0$ dans l'inégalité de la question 6, il vient

$$\mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) \leq \exp \left(-\frac{\psi(1 + a\varepsilon)}{a^2} n \right).$$

- 7.b. Notons que $[|M_n| \geq \varepsilon] = [M_n \geq \varepsilon] \cup [M_n \leq -\varepsilon]$ et donc³

$$\mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) + \mathbf{P}(M_n \leq -\varepsilon) = \mathbf{P}(M_n \geq \varepsilon) + \mathbf{P}(-M_n \geq \varepsilon).$$

Mais $-M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-X_i)$, où les $-X_i$ sont encore indépendantes, centrées, réduites, et à valeurs dans $[-a, a]$.

Et donc tout ce qui vient d'être dit au sujet de M_n reste valable pour $-M_n$.

Donc par la question 7.a, $\mathbf{P}(-M_n \geq \varepsilon) \leq \exp \left(-\frac{\psi(1 + a\varepsilon)}{a^2} n \right)$, si bien que

$$\mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon) \leq 2 \exp \left(-\frac{\psi(1 + a\varepsilon)}{a^2} n \right).$$

Ce majorant de $\mathbf{P}(|M_n| \geq \varepsilon)$ est bien plus précis que celui de la question 1, au moins lorsque n est grand, puisque $2 \exp \left(-\frac{\psi(1 + a\varepsilon)}{a^2} n \right) = 2 \left(\exp \left(-\frac{\psi(1 + a\varepsilon)}{a^2} \right) \right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique qui tend vers 0, et donc est négligeable devant le $\frac{1}{n\varepsilon}$ obtenu à la question 1.

Encore faut-il s'assurer que la suite géométrique évoquée ci-dessus est de limite nulle, mais il est classique que ψ est une primitive de la fonction $\ln$, et donc strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Puisque $\psi(1) = 0$, alors $\psi(1 + \varepsilon) > 0$, et donc $0 \leq \exp \left(-\frac{\psi(1 + a\varepsilon)}{a^2} \right) < 1$.

► Exercice 2 : matrices de trace nulle et matrices de diagonale nulle.

1. Il est évident qu'une matrice de diagonale nulle possède une trace nulle.
Or deux matrices semblables ont même trace.

Astuce

Puisque l'inégalité de la question précédente est valable pour tout t , l'idée est d'aller chercher la valeur de t qui minimise le majorant obtenu.

² θ est décroissante sur $]0, t_0]$, croissante sur $[t_0, +\infty[$.

³ Ces deux événements sont incompatibles.

Remarque

En y regardant de plus près, jusqu'à présent nous n'avons utilisé que le fait que les X_i prennent des valeurs inférieures à a . C'est ici que nous allons utiliser le fait qu'elles prennent des valeurs supérieures à $-a$.

Partie I. Quelques résultats préparatoires

2. On a $f(e_i) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k$, et donc

$$\langle f(e_i), e_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{k,i} e_k, e_i \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{k,i} \langle e_k, e_i \rangle.$$

Mais $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, donc $\langle e_k, e_i \rangle = \delta_{i,k}$, si bien que $\langle f(e_i), e_i \rangle = a_{i,i}$.

Et donc A est de diagonale nulle si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle f(e_i), e_i \rangle = 0$.

- 3.a. Puisque $\text{tr}(f) = 0$, alors $\text{tr}(A) = 0$.

Donc $\sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0$. Ainsi, les $a_{i,i}$ ne peuvent être tous strictement positifs, ni tous strictement négatifs. Et étant tous non nuls, au moins l'un d'entre eux est strictement positif et l'un au moins est strictement négatif.

Et donc il existe $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $a_{i,i} > 0$ et $a_{j,j} < 0$, ce qui par la question 2 implique $\langle f(e_i), e_i \rangle > 0$ et $\langle f(e_j), e_j \rangle < 0$.

- 3.b. Par linéarité de f , pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\varphi(t) = \langle te_i + (1-t)e_j, tf(e_i) + (1-t)f(e_j) \rangle.$$

Puis par bilinéarité du produit scalaire,

$$\varphi(t) = t^2 \langle e_i, f(e_i) \rangle + t(1-t) \langle e_j, f(e_i) \rangle + t(1-t) \langle e_i, f(e_j) \rangle + (1-t)^2 \langle e_j, f(e_j) \rangle.$$

Et donc φ est une fonction polynomiale⁴ et donc φ est continue sur $[0, 1]$.

- 3.c. On a $f(0) = \langle e_j, f(e_j) \rangle < 0$ et $\varphi(1) = \langle e_i, f(e_i) \rangle > 0$.

Et donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\varphi(t_0) = 0$.

Si on pose alors $x = t_0 e_i + (1-t_0)e_j$, alors $\langle x, f(x) \rangle = f(t_0) = 0$.

Notons que x n'est pas le vecteur nul car

$$\|x\|^2 = \|t_0 e_i + (1-t_0)e_j\|^2 = t_0^2 + (1-t_0)^2 \neq 0.$$

4. S'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_{i,i} = 0$, alors e_i est unitaire et $\langle f(e_i), e_i \rangle = a_{i,i} = 0$.

Sinon, par la question précédente, il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\langle x, f(x) \rangle = 0$.

Et alors si on pose $y = \frac{x}{\|x\|}$, le vecteur y est unitaire et

$$\langle y, f(y) \rangle = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\rangle = \frac{1}{\|x\|^2} \langle x, f(x) \rangle = 0.$$

Partie II. Une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

5. Il n'y a pas grand chose à dire : si f est un endomorphisme de trace nulle d'un espace euclidien E de dimension 1, alors dans toute base orthonormée de E , la matrice de f est de trace nulle. Mais une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ de trace nulle est nécessairement égale à la matrice nulle. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- 6.a. D'après la question 4, il existe $e_{n+1} \in E$ unitaire vérifiant $\langle e_{n+1}, f(e_{n+1}) \rangle = 0$.

Puisque la famille formée du seul vecteur e_{n+1} est orthonormée, par le théorème de la base orthonormée incomplète, on peut la compléter en une base orthonormée $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ de E .

Notons alors $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$.

Et alors puisque $\langle f(e_{n+1}), e_{n+1} \rangle = 0$, par la question 2, $[M]_{n+1, n+1} = 0$. Et donc M est bien de la forme indiquée dans l'énoncé : il existe $C \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

telles que $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$.

Et alors $0 = \text{tr}(f) = \text{tr}(M) = 0 + \text{tr}(A) = \text{tr}(A)$.

- 6.b. Puisque g et $p|_F$ sont linéaires, il en est de même de leur composée.

Et puisque $F = \text{Im } p$, pour tout $x \in F$, $g(x) = p(f(x)) \in F$, donc g est bien un endomorphisme de F .

Soit à présent $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors, en notant toujours $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n+1} [M]_{i,j} e_i = \sum_{i=1}^n [M]_{i,j} e_i + [M]_{n+1,j} e_{n+1} = \sum_{i=1}^n [A]_{i,j} e_i + [M]_{n+1,j} e_{n+1}.$$

Rappel

La trace d'un endomorphisme est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base.

⁴ De degré au plus 2.

Rappel

Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée,

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Mais $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim E - \dim F = 1$, et qui contient e_{n+1} car $\mathcal{B}_1$ est orthonormée.

Donc $F^\perp = \text{Vect}(e_{n+1})$, si bien que $g(e_j) = p(f(e_j)) = \sum_{i=1}^n [A]_{i,j} e_i$.

Ainsi, la matrice de g dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est bien égale à A .

- 6.c. Puisque F est de dimension n , l'hypothèse de récurrence s'applique à g , qui est donc un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n , avec $\text{tr}(g) = \text{tr}(A) = 0$. Il existe donc une base orthonormée $(e'_1, \dots, e'_n)$ de F dans laquelle la matrice de g est de diagonale nulle. Ce qui d'après la question 2 signifie que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle e'_j, g(e'_j) \rangle = 0$.
- 6.d. Puisque $(e'_1, \dots, e'_n)$ est orthonormée, $e'_1, \dots, e'_n$ sont 2 à 2 orthogonaux. De plus, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, puisque $e'_i \in F$ et $e_{n+1} \in F^\perp$, $\langle e'_i, e_{n+1} \rangle = 0$. Et donc $(e'_1, \dots, e'_n, e_{n+1})$ est orthogonale, et étant formée de vecteurs unitaires, elle est orthonormée. Et en particulier elle est libre, et étant de cardinal $n + 1 = \dim E$, c'est une base de E .

Nous savons déjà que $\langle f(e_{n+1}), e_{n+1} \rangle = 0$.

Soit alors $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\langle f(e'_i), e'_i \rangle = \langle f(e'_i) - p(f(e'_i)) + p(f(e'_i)), e'_i \rangle = \underbrace{\langle f(e'_i) - p(f(e'_i)), e'_i \rangle}_{\in F^\perp} + \underbrace{\langle p(f(e'_i)), e'_i \rangle}_{\in F} = \langle g(e'_i), e'_i \rangle = 0.$$

Et donc par la question 2, la matrice de f dans la base $(e'_1, \dots, e'_n, e_{n+1})$ est de diagonale nulle.

7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de trace nulle. Soit alors f l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A . Alors $\text{tr}(f) = 0$. Et donc par ce qui précède, il existe une base orthonormée⁵ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice B de f est de diagonale nulle. Mais alors par la formule de changement de base, A et B sont semblables, et donc A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

⁵ Pour le produit scalaire canonique.

► Problème : développement en série de la cotangente

Partie I. Préliminaires

1. La fonction $\sin$ ne s'annule qu'en les multiples entiers de π , donc pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \pi x \notin \pi\mathbb{Z}$, si bien que $C(x)$ est bien défini.

Sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, C est le quotient de deux fonctions continues, donc C est continue.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, -x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $C(-x) = \pi \frac{\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} = \pi \frac{\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = -C(x)$.

Donc C est impaire.

Enfin, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, x + 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et

$$C(x + 1) = \pi \frac{\cos(\pi(x + 1))}{\sin(\pi(x + 1))} = \pi \frac{-\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = C(x).$$

Et donc C est 1-périodique.

- 2.a. On ne peut pas avoir $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$, faute de quoi on aurait $x = 2\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$, et de même, si on avait $\frac{x+1}{2} \in \mathbb{Z}$, alors $x = 2\frac{x+1}{2} - 1 \in \mathbb{Z}$, ce qui est absurde.
- 2.b. On a

$$\begin{aligned} C\left(\frac{x}{2}\right) + C\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x + \pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x + \pi}{2}\right)} \\ &= \pi \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \pi \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\ &= \pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \\ &= \pi \frac{\cos(\pi x)}{\frac{\sin(\pi x)}{2}} = 2C(x). \end{aligned}$$

Projecteur

Rappelons que projeter sur F parallèlement à $F^\perp$ c'est «retirer la composante dans $F^\perp$ », ici égale à $[M]_{n+1,j} e_{n+1}$.

Plus généralement

Si F est un sev d'un espace euclidien E , alors la concaténation d'une base orthonormée de F et d'une base orthonormée de $F^\perp$ est une base orthonormée de E .

Trigo

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

3.a. À l'aide d'un développement limité d'ordre 3, il vient

$$\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \pi x \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2) \right) - \pi x + \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{\pi^3}{3} x^3 + o(x^3) \boxed{\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^3}{3} x^3}.$$

3.b. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$C(x) - \frac{1}{x} = \frac{\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x \sin(\pi x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi^3}{3} \frac{x^3}{\pi x^2} \boxed{\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\pi^2}{3} x}.$$

On en déduit notamment que $C(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Partie II. Définition de S

4. Puisque que x n'est pas entier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $x^2 \neq k^2$, et donc $\frac{2x}{x^2 - k^2}$ est bien défini.

Par ailleurs $\frac{2x}{x^2 - k^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-2x}{k^2}$.

Cette dernière série est de signe constant⁶, et puisque la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, par critère d'équivalence, il en est de même de $\sum \frac{2x}{x^2 - k^2}$.

⁶ De signe opposé à celui de x .

5. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$S(-x) = \frac{1}{-x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-x}{(-x)^2 - k^2} = -\frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2} = -S(x).$$

Et donc $\boxed{S \text{ est impaire.}}$

6.a. Partons plutôt du membre de droite :

$$\sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+k} = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k} \right) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n \frac{x-k+x+k}{x^2 - k^2} = \boxed{S_n(x)}.$$

6.b. En utilisant la question précédente, il vient

$$\begin{aligned} S_n(x+1) - S_n(x) &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+1+k} - \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+k} \\ &= \sum_{j=-n+1}^{n+1} \frac{1}{x+j} - \sum_{k=-n}^n \frac{1}{x+k} \\ &= \boxed{\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n}}. \end{aligned}$$

Chgt d'indice
 $j = k + 1.$

6.c. Puisque $S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$, un passage à la limite⁷ dans l'égalité de la question précédente donne $S(x+1) - S(x) = 0$, si bien que $S(x) = S(x+1)$. Donc $\boxed{S \text{ est 1-périodique.}}$

⁷ Légitime car les limites existent.

6.d. En utilisant la 1-périodicité et l'imparité, il vient $S(1-x) = S(-x) = -S(x)$.

En particulier, pour $x = \frac{1}{2}$, $S\left(\frac{1}{2}\right) = -S\left(\frac{1}{2}\right)$, si bien que $\boxed{S\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$.

7.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} S_n\left(\frac{x}{2}\right) + S_n\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\frac{x}{2} + k} + \sum_{k=-n}^n \frac{1}{\frac{x+1}{2} + k} \\ &= \sum_{k=-n}^n \frac{2}{x+2k} + \sum_{k=-n}^n \frac{2}{x+1+2k} \\ &= 2 \sum_{\substack{p=-2n \\ p \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{x+p} + 2 \sum_{\substack{p=-2n+1 \\ p \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{x+p} \\ &= 2 \sum_{p=-2n}^{2n} \frac{1}{x+p} + \frac{2}{x+2n+1} = \boxed{2S_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}}. \end{aligned}$$

- 7.b. Comme à la question 6.c, en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ dans la question précédente, il vient $S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x)$.

Partie III. Continuité de S .

- 8.a. Puisque $x^2 \leq 1$, alors $k^2 - x^2 \geq k^2 - 1 \geq 3$, si bien que par passage à l'inverse, $0 \leq \frac{1}{k^2 - x^2} \leq \frac{1}{k^2 - 1}$.

- 8.b. Soit $k \geq 2$. Alors

$$\frac{2x}{x^2 - k^2} - \frac{2a}{a^2 - k^2} = \frac{2xa^2 - 2xk^2 - 2ax^2 + 2ak^2}{(x^2 - k^2)(a^2 - k^2)} = \frac{2ax(a - x) + 2k^2(a - x)}{(x^2 - k^2)(a^2 - k^2)}.$$

Et donc

$$\left| \frac{2x}{x^2 - k^2} - \frac{2a}{a^2 - k^2} \right| \leq \frac{2|x - a|(ax + k^2)}{(k^2 - 1)^2} \leq 2|x - a| \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2}.$$

Et donc il vient, pour $n \geq 2$,

$$\left| \sum_{k=2}^n \frac{2x}{x^2 - k^2} - \sum_{k=2}^n \frac{2a}{a^2 - k^2} \right| \leq \sum_{k=2}^n \left| \frac{2x}{x^2 - k^2} - \frac{2a}{a^2 - k^2} \right| \leq 2|x - a| \sum_{k=2}^n \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2}.$$

- 8.c. Commençons par justifier de l'existence de la série de l'énoncé : $0 \leq \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, donc par critère d'équivalence, $\sum_{k \geq 2} \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2}$ converge.

Par passage à la limite⁸ dans l'inégalité de la question précédente, on a donc

$$\left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2} \right| \leq 2|x - a| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2}.$$

Et alors

$$\begin{aligned} |S(x) - S(a)| &= \left| \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2} - \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2 - 1} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2 - 1} \right| + \left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2} - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} - \frac{1}{a} - \frac{2a}{a^2 - 1} \right| + 2|x - a| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

- 8.d. Lorsque $x \rightarrow a$, $\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{a} + k \frac{2a}{a^2 - 1}$, et $|x - a| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Et donc par l'inégalité de la question précédente et par le théorème d'encadrement, $|S(x) - S(a)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, si bien que $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} S(a)$.

Et donc S est continue en a .

Ceci étant vrai pour tout $a \in]0, 1[$, S est continue sur $]0, 1[$. Et alors par 1-périodicité, S est continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

- 9.a. Soit $x \in]0, 1[$. Alors $S(x) - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - 1} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$.

Mais par la question 9.a, pour $k \geq 2$, $\left| \frac{1}{x^2 - k^2} \right| = \frac{1}{k^2 - x^2} \leq \frac{1}{k^2 - 1}$.

Et donc par l'inégalité triangulaire

$$\left| S(x) - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - 1} \right| = \left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2} \right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2x}{k^2 - x^2} \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2x}{k^2 - 1} \leq 2x \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1}.$$

Détails

Puisque a et x sont dans $]0, 1[$, $|ax| \leq 1$.

⁸ Toujours lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Remarque

On utilise ici le fait que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^2 + 1}{(k^2 - 1)^2}$ est une constante indépendante de x . Peu importe qu'on ne sache rien au sujet de la valeur de cette constante.

Limite

Nous avons utilisé là l'aspect local de la limite : l'inégalité de la question 8.c. n'est vraie que pour $x \in]0, 1[$, qui est un voisinage de a .

Convergence

Notons que l'inégalité triangulaire est bien légitime car la série $\sum \left| \frac{2x}{x^2 - k^2} \right|$ converge bien.

- 9.b. Lorsque $x \rightarrow 0$, le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0, et donc par le théorème d'encadrement,

$$S(x) - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Et donc⁹ $S(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

$$^9 \frac{2x}{x^2 - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

On en déduit donc que $S(x) = \left(S(x) - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et de même $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty$.

- 9.c. Puisque $S(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$, alors $S(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Partie IV. Simplification de S .

- 10.a. Puisque C et S sont toutes deux continues, impaires et 1-périodiques sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, il en est de même de f .
- 10.b. Découle directement des formules des questions 2.b et 8.b.
- 10.c. Par la question 3.b, $C(x) - \frac{1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\pi^3}{3}x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, et par la question 9, $S(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
Et donc par somme de limites,

$$f(x) = C(x) - S(x) = C(x) - \frac{1}{x} - \left(S(x) - \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

- 10.d. Par 1-périodicité, on a donc, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} f(x - k) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.
Et donc f est prolongeable par continuité en tout entier k .

Ainsi, la fonction $x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \mathbf{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$ est continue sur $\mathbf{R}$ tout entier.

- 11.a. Le résultat a déjà été prouvé pour x non entier, donc il suffit de le vérifier pour $x = 0$ et $x = 1$.
► Pour $x = 0$, notons que $f\left(\frac{1}{2}\right) = C\left(\frac{1}{2}\right) - S\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - 0 = 0 = f(0)$, et donc on a bien $f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f(0)$.
► Et pour $x = 1$, alors $f\left(\frac{1+1}{2}\right) = f(1) = f(0)$, si bien qu'il s'agit encore de noter que $f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f(0) = 2f(1)$.

- 11.b. C'est le théorème des bornes atteintes, qui s'applique puisque f est continue sur $[0, 1]$.

- 11.c. On a $f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = 2f(x_0) = 2M$.

Et donc

$$\left(M - f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right) + \left(M - f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right) = 0.$$

On a donc deux nombres positifs¹⁰ dont la somme est nulle : les deux sont nuls et en particulier $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = M$.

Sur le même principe, puisque f atteint son maximum sur $[0, 1]$ en $\frac{x_0}{2}$, alors elle l'atteint encore en $\frac{1}{2} \frac{x_0}{2} = \frac{x_0}{4}$.

Et une récurrence sans difficulté prouve que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbf{N}, f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = M.}$

- 11.d. On a $\frac{x_0}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Et donc par continuité¹¹ de f en 0, on a $f(0) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x_0}{2^k}\right) = M$.
Puisque par ailleurs, $f(0) = 0$, on en déduit que sur $[0, 1]$, f est à valeurs négatives.

- 11.e. Mais alors par imparité de f , f est positive sur $[-1, 0]$.

Et donc par 1-périodicité, f est positive sur $[0, 1]$.

Puisqu'elle y est déjà négative, f est nulle sur $[0, 1]$, et par 1-périodicité est donc nulle sur $\mathbf{R}$ tout entier.

¹⁰ Puisque M est le maximum de f sur $[0, 1]$ et que $\frac{x_0}{2}$ et $\frac{x_0+1}{2}$ sont encore dans cet intervalle.

¹¹ Plus exactement, c'est la caractérisation séquentielle de la continuité de f .