Devoir maison 9

Vous traiterez au choix : soit les deux exercices, soit le problème (au moins jusqu'à la question 8).

▸ Exercice 1 : une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants

On cherche dans cet exercice à déterminer l'ensemble des fonctions $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) = 1. \qquad (E)$$

1. Soit $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fois dérivable. On pose $z = y' - y$.
   Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $(E') : xz'(x) - z(x) = 1$.
2. Résoudre (E') sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$.
3. En justifiant soigneusement votre raisonnement, déterminer les solutions de (E') sur $\mathbf{R}$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbf{R}$.

▸ Exercice 2 : fonctions presque doublement surjectives

Soient E et F deux ensembles non vides. On dit que f est :

- **presque surjective** si tout élément de F, sauf peut-être un, possède au moins un antécédent par f.
- **doublement surjective** si tout élément de F possède au moins deux antécédents (distincts) par f.
- **presque doublement surjective** si tout élément de F, sauf peut-être un, possède au moins deux antécédents par f.
  On notera que l'éventuel élément qui n'a pas deux antécédents peut tout à fait ne pas avoir du tout d'antécédent.

1. Soient E, F, G trois ensembles non vides, et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
   a. Montrer que si f est doublement surjective et g surjective, alors $g \circ f$ est doublement surjective.
   b. Montrer que si f est surjective et g presque doublement surjective, alors $g \circ f$ est presque doublement surjective.
   c. Montrer que si f et g sont presque doublement surjectives, alors $g \circ f$ est presque doublement surjective.
2. Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}\right.$. Est-ce que f est surjective ? Presque surjective ? Doublement surjective ? Presque doublement surjective ?
3. Soient $a \in \mathbf{C}^*$, $b, c \in \mathbf{C}$, et soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & az^2 + bz + c \end{array}\right.$. Est-ce que f est surjective ? Presque surjective ? Doublement surjective ? Presque doublement surjective ?
4. Soit $f : \mathbf{R} \to]0,1[$. Montrer que si f est continue et presque surjective, alors f est surjective.
5. Donner un exemple de fonction continue $f : \mathbf{R} \to [0,1[$ presque surjective mais pas surjective.

▸ Problème : ensembles équipotents, et théorème de Cantor-Bernstein

On rappelle que deux ensembles E et F sont dits équipotents s'il existe une bijection de E dans F (ou, ce qui est équivalence, une bijection de F dans E).

1. **Premiers exemples** : à l'aide de la fonction th montrer que $\mathbf{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents.
En déduire que pour tous réels $a < b$, $]a,b[$ et $\mathbf{R}$ sont équipotents.

Partie I. $\mathbf{N}^p$ est équipotent à $\mathbf{N}$

2. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{N}\times\mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{N}^* \\ (p,q) & \longmapsto & 2^p(2q+1) \end{array} \right.$.
Nous avons déjà montré, dans le deuxième DM de l'année, que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $(p,q) \in \mathbf{N}^2$ tels que $n = 2^p(2q+1) = f(p,q)$. En d'autre termes, nous avons déjà prouvé la surjectivité de f.
Justifier que f est en fait une bijection de $\mathbf{N}^2$ sur $\mathbf{N}^*$.
3. En déduire que $\mathbf{N}^2$ est équipotent à $\mathbf{N}$.
4. On souhaite prouver par récurrence sur $p \in \mathbf{N}^*$ qu'il existe une bijection de $\mathbf{N}^p$ sur $\mathbf{N}$.
Le cas $p = 1$ est trivial, et le cas $p = 2$ vient d'être traité à la question précédente.
On suppose donc que pour $p \in \mathbf{N}^*$, il existe une bijection $\varphi_p : \mathbf{N}^p \to \mathbf{N}$, et on définit une application $\varphi_{p+1} : \mathbf{N}^{p+1} \to \mathbf{N}$ en posant :
$$\forall (n_1,\dots,n_p,n_{p+1}) \in \mathbf{N}^{p+1},\ \varphi_{p+1}(n_1,\dots,n_p,n_{p+1}) = f\left(\varphi_p(n_1,\dots,n_p), n_{p+1}\right)$$
où $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ est une bijection (puisque la question 3 justifie qu'il existe de telles bijections).
Prouver que φ_{p+1} est bijective.

Partie II. Théorème du point fixe de Knaster-Tarski

Un ensemble ordonné non vide $(E,\leqslant)$ est appelé un **treillis complet** si toute partie non vide de E possède une borne supérieure et une borne inférieure.

5. Soit E un ensemble. Montrer que $(\mathscr{P}(E),\subset)$ est un treillis complet.
6. Soit $(E,\leqslant)$ un treillis complet, et soit $f : E \to E$ une application croissante.
On note $A = \{x \in E \mid x \leqslant f(x)\}$.
   a. Montrer que E admet un plus petit élément.
   b. Prouver que A n'est pas vide, et donc admet une borne supérieure, que l'on notera dans la suite α.
   c. Prouver que $f(\alpha)$ est un majorant de A.
   d. En déduire que $\alpha \in A$, puis que α est un point fixe de f (c'est-à-dire tel que $f(\alpha) = \alpha$).
   Mieux : montrer que α est le plus grand point fixe de f (c'est-à-dire le plus grand élément de l'ensemble des points fixes de f).
   Ce résultat est connu sous le nom de théorème du point fixe de Knaster-Tarski.

Partie III. Le théorème de Cantor-Bernstein

Dans cette partie, on cherche à prouver le théorème de Cantor-Bernstein qui affirme que si E et F sont deux ensembles tels qu'il existe deux injections $f : E \to F$ et $g : F \to E$, alors il existe une bijection de E sur F.

7. Soient E et F deux ensembles, tels qu'il existe deux applications injectives $f : E \to F$ et $g : F \to E$.
On souhaite prouver le théorème de Cantor-Bernstein, qui affirme qu'alors il existe une bijection $E \to F$.
   a. En utilisant le théorème de Knaster-Tarski, prouver que l'application
   $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & \overline{g\left(\overline{f(A)}\right)} = \complement_E\left(g\left(\complement_F f(A)\right)\right) \end{array} \right.$ admet au moins un point fixe.

Dans la suite, on fixe X un point fixe de φ, et on note $Y = E \setminus X$.

b. Prouver que pour tout $x \in Y$, il existe un unique $y \in F$, qui appartient à $\overline{f(X)}$, tel que $x = g(y)$.
On note alors $g_1 : Y \to F$ l'application qui à $x \in Y$ associe son unique antécédent par g.

c. Prouver que l'application $h : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X \\ g_1(x) & \text{si } x \in Y \end{cases} \end{array} \right.$ est une bijection, ce qui achève de prouver le théorème de Cantor-Bernstein.

8. Construire une application injective $\mathbf{Q} \to \mathbf{N}$ et en déduire que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Q}$ sont équipotents.

La suite du problème est assez longue et difficile à rédiger. Son but principal est de faire réfléchir ceux d'entre vous qui se posent des questions sur la «taille» des différents ensembles infinis.
Si vous l'abordez, essayez surtout de comprendre les grandes lignes des raisonnements, quitte à ne pas tout rédiger parfaitement.

Dans la suite, on admet que tout réel $x \in [0, 1[$ possède un unique **développement décimal propre**, c'est-à-dire s'écrit de manière unique $x = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ ce que l'on note $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ où $(a_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite (dépendant bien entendu de x) à valeurs dans $[\![0, 9]\!]$, qui n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang.
Ce résultat n'est pas particulièrement difficile et sera prouvé en cours en fin d'année.

Notons qu'il s'agit bien là de l'écriture décimale dont vous avez l'habitude : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k} = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$.

Si on demande à ce que les a_k ne soient pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang, c'est afin de garantir l'unicité d'un tel développement, car

$$0,0999999\dots = \sum_{k=2}^{+\infty} 9 \times 10^{-k} = \lim_{n\to+\infty} 9 \sum_{k=2}^{n} 10^{-k} = \lim_{n\to+\infty} 9 \times 10^{-2} \times \frac{1 - 10^{2-n}}{1 - \frac{1}{10}} = 10^{-1} = 0,100000\dots$$

9. Argument diagonal de Cantor : on prouve dans cette question qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$. Par la question 1, cela revient à prouver qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbf{N}$ dans $]0, 1[$.
À cet effet, on suppose par l'absurde qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbf{N}^* \to]0, 1[$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\left(a_k^{(n)}\right)_{k\geqslant 1} \in [\![0, 9]\!]^{\mathbf{N}^*}$ l'unique suite telle que le développement décimal propre de $\varphi(n)$:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(n)} 10^{-k} = 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} \dots$$

On note alors x le nombre de $]0, 1[$ défini par $x = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k^{(k)} 10^{-k} = 0, a_1^{(1)} a_2^{(2)} a_3^{(3)} \dots$.
Vous pourrez admettre ou prouver que la forme ci-dessus est bien un développement décimal propre, c'est-à-dire que les $a_k^{(k)}$ ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang.
Pour tout $k \geqslant 1$, notons $b_k \in [\![0, 9]\!]$ le chiffre de $[\![0, 9]\!]$ défini par $b_k = a_k^{(k)} + 1$ si $a_k^{(k)} \leqslant 8$ et $b_k = 0$ sinon.
Soit alors $y = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k} = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$. Prouver que y n'admet pas d'antécédent par φ. Conclure.

10. R est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbf{N})$.

a. En utilisant les fonctions indicatrices, donner une bijection de $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ sur $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$.

b. Soit $u = (u_n)_n$ une suite à valeurs dans $\{0, 1\}$. Montrer que la suite $(\psi_n(u))_n$ définie par $\psi_n(u) = \frac{1}{3} + \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{u_k}{3^{k+2}}$ est convergente. On note $\psi(u)$ sa limite.

c. Montrer que $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \{0, 1\}^{\mathbf{N}} & \longrightarrow &]0, 1[\\ u & \longmapsto & \psi(u) \end{array} \right.$ est injective.

d. Montrer que la fonction qui à un réel $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ de $]0,1[$ associe l'ensemble $\left\{2^i 3^{a_i},\ i \in \mathbf{N}^*\right\}$ est une injection de $]0,1[$ dans $\mathscr{P}(\mathbf{N})$.

e. Déduire de ce qui précède que $\mathbf{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ sont équipotents. Retrouver que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{N}$ ne sont pas équipotents.

11. Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ sont équipotents. On pourra à cet effet utiliser l'application définie sur $]0,1[^2$, qui à deux réels $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ et $y = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}$ associe $\sum_{k=1}^{+\infty} (10a_k + b_k)\, 10^{-2k} = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \dots$

Partie IV. Nombres algébriques, nombres transcendants

Un réel x est dit **algébrique** s'il existe un polynôme non nul $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ **à coefficients dans Z** dont x est racine. Par exemple, tout rationnel $r = \frac{a}{b}$ est algébrique car r est racine de $bX - a$.
Mais certains nombres irrationnels sont également algébriques, par exemple $\sqrt{2}$ est racine de $X^2 - 2$.
Un nombre qui n'est pas algébrique est appelé **transcendant**.

12. Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il existe une injection de E dans $\mathbf{N}$. Par exemple, un ensemble fini $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est au plus dénombrable puisqu'à chaque élément $x \in E$, on peut associer l'unique $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x = x_i$.
On peut montrer, mais ce n'est pas utile dans la suite, que les ensembles au plus dénombrables sont les ensembles finis ou équipotents à $\mathbf{N}$.

a. Montrer que si E_1 et E_2 sont deux ensembles au plus dénombrables, alors $E_1 \cup E_2$ est encore au plus dénombrable.
En déduire qu'une union finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

b. Soit E un ensemble, et soit $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de parties de E telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$, E_n soit au plus dénombrable.
Prouver que $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ est au plus dénombrable.

13. Soit $k \in \mathbf{N}$. Prouver que l'ensemble des polynômes de degré k à coefficients entiers est équipotent à $\mathbf{N}$.

14. Prouver que l'ensemble des nombres algébriques est équipotent à $\mathbf{N}$.

15. En déduire qu'il existe des nombres transcendants, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas au plus dénombrable.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 9

► Exercice 1 : une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients non constants

1. On a z qui est dérivable, avec $z'' = y'' - y'$.
Alors y est solution de (E) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbf{R},\ xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) = 1.$$

Mais pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) = 1 &\Leftrightarrow x(z'(x) + y'(x)) - (1+x)y'(x) + y(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow xz'(x) - y'(x) + y(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow xz'(x) - z(x) = 1. \end{aligned}$$

Et donc y est solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$, $xz'(x) - z(x) = 1$, donc si et seulement si z est solution de (E').

2. Sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, (E') est équivalente à $z'(x) - \frac{1}{x}z(x) = \frac{1}{x}$.
L'équation homogène associée est $z'(x) - \frac{z(x)}{x} = 0$, qui a pour ensemble de solutions

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{\ln|x|},\ \lambda \in \mathbf{R}\right\} = \{x \mapsto \lambda|x|,\ \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Sur $\mathbf{R}_+^*$, on a $|x| = x$.
Et sur $\mathbf{R}_-^*$, $|x| = -x$, si bien que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E') est $\{x \mapsto -\lambda x, x \in \mathbf{R}\}$.
Mais quitte à changer λ en son opposé, on retrouve $\{x \mapsto \lambda x,\ \lambda \in \mathbf{R}\}$.
Une variation de la constante nous permettrait de trouver une solution particulière, mais plus simplement ici, constatons que la fonction constante égale à -1 est solution de (E').

Et donc sur chacun des intervalles $\mathbf{R}_+^*$ et $\mathbf{R}_-^*$, l'ensemble des solutions de (E') est

$$\boxed{\{x \mapsto \lambda x - 1,\ \lambda \in \mathbf{R}\}.}$$

3. Comme souvent pour ces problèmes de raccordement de solutions, procédons par analyse-synthèse.
Analyse : soit z une solution de (E') sur $\mathbf{R}$.
Alors pour $x = 0$, on obtient $z'(0) = -1$, et puisque z est solution de (E') sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$, il existe deux réels λ, μ tels que

$$z : x \mapsto \begin{cases} \lambda x - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \\ \mu x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Puisque z est dérivable en 0, $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{z(x) - z(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{z(x) - z(0)}{x - 0}$.
Mais pour $x > 0$,

$$\frac{z(x) - z(0)}{x - 0} = \frac{\mu x - 1 + 1}{x} = \mu \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \mu.$$

Et de même, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{z(x) - z(0)}{x - 0} = \lambda$, si bien que $\lambda = \mu$.
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $z(x) = \lambda x - 1$.

Synthèse : soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors la fonction $z : x \mapsto \lambda x - 1$ est évidemment dérivable sur $\mathbf{R}$, avec pour tout $x \in \mathbf{R}$, $z'(x) = \lambda$, et donc

$$xz'(x) - z(x) = \lambda x - (\lambda x - 1) = 1.$$

Donc z est solution de (E'), si bien que l'ensemble des solutions de (E') sur $\mathbf{R}$ est

$$\boxed{\{x \mapsto \lambda x - 1, \lambda \in \mathbf{R}\}.}$$

Détails

Un tel λ existe car z est en particulier solution de (E') sur $\mathbf{R}_-^*$, donc de la forme obtenue à la question précédente.
Idem pour l'existence de μ en travaillant sur $\mathbf{R}_+^*$. En revanche, il n'y a aucune raison évidente de supposer que $\lambda = \mu$.

Méthode

Pour voir apparaître d'éventuelles contraintes sur λ et μ, on regarde d'abord si la continuité de z en 0 impose quelque chose. Ici ce n'est pas le cas car quelles que soient les valeurs de λ et μ, les limites de z en 0^+ ou en 0^- sont toujours égales à -1. Puisque ceci ne nous apprend rien, il est inutile de le rédiger.

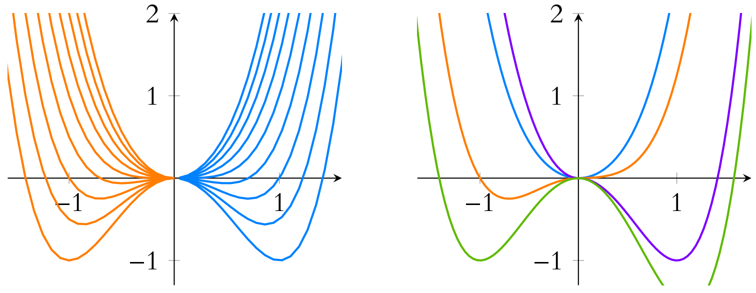


FIGURE 0.1 – Question 1 : toute solution sur $\mathbf{R}_+^*$ se raccorde en 0 à toute solution sur $\mathbf{R}_-^*$.

4. Une fonction y est solution de (E) sur $\mathbf{R}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $y'(x) - y(x) = \lambda x - 1$.
Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, notons donc (E_λ) l'équation différentielle $y'(x) - y(x) = \lambda x - 1$.
Les solutions de l'équation homogène associée sont les $x \mapsto \mu e^x, \mu \in \mathbf{R}$.
Par ailleurs, nous avons garanti en cours qu'il existe une solution de cette équation sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 1.
Cherchons donc une telle solution sous la forme $y : x \mapsto ax + b$.
Alors y est solution de (E_λ) si et seulement si pour tout $x \in \mathbf{R}$, $a - (ax + b) = \lambda x - 1$, ce qui est par identification des coefficients[1] est le cas si et seulement si

$$\begin{cases} -a = \lambda \\ a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\lambda \\ b = 1 - \lambda \end{cases}$$

Donc $y : x \mapsto -\lambda(1 + x) + 1$ est une solution particulière de (E_λ), si bien que l'ensemble des solutions de (E_λ) est

$$\{x \mapsto \mu e^x - \lambda(1 + x) + 1,\ \mu \in \mathbf{R}\}.$$

Et donc une fonction y est solution de (E) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que y est solution de (E_λ), donc si et seulement si il existe deux réels λ, μ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $y(x) = \mu e^x - \lambda(1 + x) + 1$.

Pour conclure, l'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\left\{x \mapsto \mu e^x - \lambda(1 + x) + 1,\ (\lambda, \mu) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Remarque
Si vous n'avez pas reconnu que ce résultat s'appliquait ici, il est tout à fait correct de procéder à une variation de la constante.

[1] Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients.

Remarque
Comme d'habitude, quitte à changer λ en son opposé, on pourrait ne garder qu'un $+\lambda$ à la place du $-\lambda$.

▸ Exercice 2 : fonctions presque doublement surjectives

1.a. Soit $z \in G$. Alors par surjectivité de f, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Et puisque f est doublement surjective, il existe x_1, x_2 deux éléments distincts de E tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. Et alors $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = z$, si bien que z possède au moins deux antécédents par $g \circ f$. $\boxed{\text{Donc } g \circ f \text{ est doublement surjective.}}$

1.b. Notons $A = \{z \in g \mid y \text{ possède au moins deux antécédents par } g\}$.
·Par définition de «presque doublement surjective», $G \setminus A$ contient au plus un élément.
Soit alors $z \in A$. Alors il existe $y_1, y_2 \in F$, distincts, tels que $g(y_1) = g(y_2) = z$. Et puisque f est surjective, il existe un antécédent x_1 de y_1 par f et un antécédent x_2 de y_2 par f.
Notons que $x_1 \neq x_2$ puisque ces deux éléments n'ont pas même image par f. Donc $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) = z$, si bien que z possède au moins deux antécédents par $g \circ f$.
Et donc tous les éléments de G, sauf peut-être un[2] possèdent deux antécédents par $g \circ f$, qui est donc $\boxed{\text{presque doublement surjective.}}$

[2] L'éventuel élément de $G \setminus A$.

1.c. Notons comme précédemment A l'ensemble des éléments de G qui ont au moins deux antécédents par g.
Soit alors $z \in A$. Il existe donc y_1, y_2 deux éléments distincts de F tels que $g(y_1) = g(y_2) = z$.
Et puisque f est doublement surjective, l'un au moins de ces deux éléments possède au moins deux antécédent par f. Quitte à échanger y_1 et y_2, supposons qu'il s'agit de y_1, et

soient x_1, x_2 deux antécédents distincts de y_1 par f. Alors $(g \circ f)(x_1) = g(y_1) = z$, et de même $(g \circ f)(x_2) = z$.
Donc tout élément de G, sauf peut-être un[3] possède au moins deux antécédents par $g \circ f$, si bien que $\boxed{g \circ f \text{ est presque doublement surjective.}}$

[3] L'éventuel élément de $G \setminus A$.

2. Pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0$, donc $e^z \neq 0$. Et donc 0 ne possède pas d'antécédent par f, si bien que f n'est pas surjective.
En revanche, soit $z \in \mathbf{C}^*$. Notons θ un argument de z, de sorte que

$$z = |z|e^{i\theta} = e^{\ln|z|}e^{i\theta} = f(\ln|z| + i\theta),$$

si bien que $\ln|z| + i\theta$ est un antécédent de z par f.
Donc tous les complexes, sauf 0, possèdent au moins un antécédent par f : f est presque surjective.

Puisque f n'est pas surjective, elle n'est pas doublement surjective.

Enfin, si $z = |z|e^{i\theta}$ est non nul, alors non seulement $\ln|z| + i\theta$ est un antécédent de z par f, mais pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\ln|z| + i(\theta + 2k)$ est un antécédent de z par f. Donc z possède une infinité d'antécédents, et en particulier deux antécédents.
Donc $\boxed{f \text{ est presque doublement surjective}}$: seul 0 ne possède pas d'antécédent.

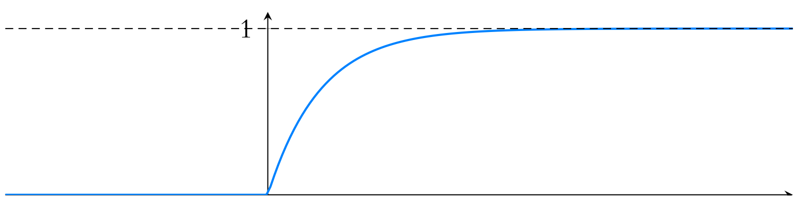
3. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Alors l'équation $az^2 + bz + c = \alpha$, qui s'écrit encore $az^2 + bz + c - \alpha = 0$ possède toujours au moins une solution, qui est alors un antécédent de α par f.
Donc $\boxed{f \text{ est surjective}}$ et par conséquent $\boxed{f \text{ est presque surjective.}}$

Par ailleurs, α possède un unique antécédent si et seulement si le discriminant de l'équation ci-dessus est nul, soit si et seulement si $b^2 - 4a(c - \alpha) = 0$, donc si et seulement si $\alpha = \frac{b^2}{4a} - c$.
Donc tout complexe, sauf $\frac{b^2}{4a} - c$ possède exactement deux antécédents, si bien que $\boxed{f \text{ est presque doublement surjective.}}$

4. Soit $f : \mathbf{R} \to]0,1[$ presque surjective et continue. Supposons par l'absurde que f ne soit pas surjective. Il existe donc un réel $a \in]0,1[$, unique, qui n'a pas d'antécédent par f.
Mais puisque $0 < \frac{a}{2} < a < \frac{1+a}{2} < 1$, alors $\frac{a}{2}$ et $\frac{1+a}{2}$ possèdent des antécédents par f : il existe deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = \frac{a}{2}$ et $f(x_2) = \frac{1+a}{2}$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c compris entre x_1 et x_2 tel que $f(c) = a$, ce qui est absurde.
Donc f est surjective.

5. La fonction $f : \left| \begin{array}{ccl} \mathbf{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \end{array} \right.$ convient.
En effet, il est clair qu'elle est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et sur $\mathbf{R}_-^*$ par opérations usuelles sur les fonctions continues.
Et puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - e^{-x} = 1 - 1 = 0$ et que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, et donc f est continue en 0.

Il est alors clair que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \in [0,1[$ et donc f n'est pas surjective (car 1 n'a pas d'antécédent).
Et par ailleurs, si $y \in [0,1[$, alors $x = -\ln(1-y)$ est un antécédent de y par f, puisque $f(-\ln(1-y)) = 1 - e^{\ln(1-y)} = 1 - (1-y) = y$.
Et donc tout élément de $[0,1]$, sauf 1 possède un antécédent par f : il s'agit bien une fonction presque surjective.



▸ Problème : ensembles équipotents et théorème de Cantor-Bernstein

1. Par le théorème de la bijection, th réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]-1,1[$.
Soit donc $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}(\mathrm{th}(x)+1)$.
Alors f est continue, strictement croissante car th l'est, et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}(-1+1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]0,1[$.
Et donc $\boxed{\mathbf{R} \text{ et }]0,1[\text{ sont équipotents.}}$
Soient à présent $a < b$ deux réels. Alors $g : x \mapsto (b-a)x + a$ réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]a,b[$. Et donc par composition, l'application $x \mapsto (g\circ f)(x)$ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $]a,b[$, si bien que $\mathbf{R}$ et $]a,b[$ sont équipotents.

Partie I. Quelques ensembles équipotents à N

2. Soient $(p,q),(p',q')$ tels que $f(p,q) = f(p',q')$. On a donc $2^p(2q+1) = 2^{p'}(2q'+1)$.
Quitte à échanger (p,q) et (p',q'), supposons $p \leqslant p'$. Alors $2q+1 = 2^{p'-p}(2q'+1)$.
Puisque $2q+1$ est impair, on a donc nécessairement $p'-p = 0 \Leftrightarrow p = p'$.
Et alors $2q+1 = 2q'+1$, si bien que $q = q'$.
Nous venons donc de prouver que $f(p,q) = f(p',q') \Rightarrow (p,q) = (p',q')$, et donc f est injective, et donc bijective.

> **Remarque**
> Si on n'avait pas pris soin de supposer $p \leqslant p'$, la relation ci-contre ne ferait pas apparaître que des entiers.

3. Puisque l'application $g : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^* & \longrightarrow & \mathbf{N} \\ n & \longmapsto & n-1 \end{array}\right.$ est bijective, alors $g\circ f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ est bijective, car composée de bijections. Et donc $\boxed{\mathbf{N}^2 \text{ et } \mathbf{N} \text{ sont équipotents.}}$

4. Il s'agit donc de prouver que l'application $\tau : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{N}^{p+1} & \longrightarrow & \mathbf{N}\times\mathbf{N} \\ (n_1,\dots,n_{p+1}) & \longmapsto & (\varphi_p(n_1,\dots,n_p), n_{p+1}) \end{array}\right.$
est bijective. En effet, $\varphi_{p+1} = f\circ\tau$.
Mais pour $(p,q) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}$, l'unique antécédent de (p,q) par τ est $(\varphi_p^{-1}(p),q) \in \mathbf{N}^p\times\mathbf{N} = \mathbf{N}^{p+1}$.
Et donc τ est bijective, de sorte que φ_{p+1} l'est également, car composée de deux bijections.

Partie II. Théorème du point fixe de Knaster-Tarski

5. Pour bien comprendre, commençons peut-être par manipuler des parties non vides de $\mathscr{P}(E)$ qui ne soient pas trop compliquées. Par exemple des parties de la forme $\{A,B\}$.
Soient donc A, B deux parties de E. Alors une partie C de E est un majorant de $\{A,B\}$ si et seulement si $A\subset C$ et $B\subset C$. Soit si et seulement si $A\cup B\subset C$.
Et donc $A\cup B$ est un majorant de $\{A,B\}$, plus petit[4] que tout autre majorant de $\{A,B\}$.
C'est donc le plus petit des majorants de $\{A,B\}$, donc la borne supérieure de $\{A,B\}$.
Sur le même principe, C est un minorant de $\{A,B\}$ si et seulement si $C\subset A\cap B$, et donc $A\cap B$ est le plus grand minorant de $\{A,B\}$ et donc sa borne inférieure.

Passons à présent au cas général : soit $\mathscr{F}$ une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$.
Alors si C est un majorant (pour l'inclusion) de $\mathscr{F}$, pour tout $F\in\mathscr{F}$, $F\subset C$.
Et donc $\bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}} F \subset C$.
inversement, $\bigcup\limits_{F\in\mathscr{F}} F$ est un élément de $\mathscr{P}(E)$, plus grand (=qui contient) que tous les $F\in\mathscr{F}$, donc est un majorant de $\mathscr{F}$.
C'est donc le plus petit des majorants de $\mathscr{F}$, et donc la borne supérieure de $\mathscr{F}$.

On prouve sur le même principe que $\mathscr{F}$ possède une borne inférieure, qui est $\bigcap\limits_{F\in\mathscr{F}} F$.

Et donc $\boxed{(\mathscr{P}(E),\subset) \text{ est un treillis complet}}$.

6.a. Puisque E est un treillis complet, E tout entier possède une borne inférieure a.
Puisque $a\in E$, c'est donc $\boxed{\text{le plus petit élément de } E.}$

6.b. Si $a = \min E$, alors $f(a)\in E$, et donc nécessairement $a \leqslant f(a)$, et donc $a\in A$.
Donc A est non vide, et par conséquent[5] $\boxed{\text{possède une borne supérieure } \alpha.}$

[4] Au sens de l'inclusion.

[5] Car E est un treillis complet.

6.c. Il s'agit donc de prouver que pour tout $x \in A$, $x \leqslant f(\alpha)$.
Mais pour tout $x \in A$, $x \leqslant \alpha$ (une borne supérieure est un majorant), et donc par croissance de f, $f(x) \leqslant f(\alpha)$.
Mais $x \leqslant f(x)$, donc par transitivité de la relation d'ordre $x \leqslant f(\alpha)$.
Ainsi, pour tout $x \in A$, $x \leqslant f(\alpha)$, de sorte que $\boxed{f(\alpha) \text{ est un majorant de } A.}$

6.d. Puisque α est une borne supérieure, c'est le plus petit des majorants de A, et donc en particulier[6], $\alpha \leqslant f(\alpha)$.
On a donc $\alpha \leqslant f(\alpha)$, et par conséquent, $\alpha \in A$.
Donc α est à la fois un élément de A et un majorant[7] de A, c'est donc le plus grand élément de A. Et donc $\alpha \in A$, de sorte que $\alpha \leqslant f(\alpha)$.
Mais par croissance de f, $f(\alpha) \leqslant f(f(\alpha))$, et donc $f(\alpha) \in A$. Puisque α est le plus grand élément de A, on en déduit que $f(\alpha) \leqslant \alpha$, et donc par anti-symétrie de la relation d'ordre $\alpha = f(\alpha)$, donc $\boxed{\alpha \text{ est un point fixe de } f.}$

Notons que si x est un point fixe de f alors $x = f(x)$ et donc $x \leqslant f(x)$, de sorte que $x \in A$. Et donc α étant le plus grand élément de A, $x \leqslant \alpha$. Donc $\boxed{\alpha \text{ est le plus grand point fixe de } f.}$

[6] $f(\alpha)$ est un majorant de A.

[7] Car borne supérieure.

Partie III. Le théorème de Cantor-Bernstein

7.a. Puisque $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est un treillis complet, nous allons prouver que φ est une application croissante pour l'inclusion.
Soient donc A, B deux parties de E avec $A \subset B$. Alors $f(A) \subset f(B)$.
Mais alors $\overline{f(B)} \subset \overline{f(A)}$, où les complémentaires s'entendent dans F.
Et donc $g\left(\overline{f(B)}\right) \subset g\left(\overline{f(A)}\right)$ et donc $\overline{g\left(\overline{f(A)}\right)} \subset \overline{g\left(\overline{f(B)}\right)}$. Soit encore $\varphi(A) \subset \varphi(B)$.
Donc φ est croissante, et par application du théorème de Knaster-Tarski, possède un point fixe X.

7.b. Notons que $X = \varphi(X)$, donc $X = \overline{g\left(\overline{f(X)}\right)} \Leftrightarrow \underbrace{\overline{X}}_{=Y} = g\left(\overline{f(X)}\right)$.

Et donc en particulier, tout élément de Y possède au moins un antécédent par g dans $\overline{f(X)}$, et donc notamment dans F.
Par injectivité de g, un tel antécédent est nécessairement unique.

7.c. Nous allons prouver que tout élément de F possède un unique antécédent par h.
Commençons par noter que $h_{|Y} = g_1$ est à valeurs dans $\overline{f(X)}$, puisque nous avons prouvé que l'unique antécédent par g d'un élément de Y est dans $\overline{f(X)}$.
Et $h_{|X} = f_{|X}$ est à valeurs dans $f(X)$.
Puisque $f(X) \cap \overline{f(X)} = \emptyset$, les éléments de $f(X)$ ne peuvent avoir d'antécédent par h que dans X, et ceux de $\overline{f(X)}$ ne peuvent avoir d'antécédent que dans Y.
Soit donc $y \in F$. Distinguons deux cas :

- **si** $y \in f(X)$: alors par définition de $f(X)$, y possède un antécédent par f dans X nécessairement unique puisque f est injective. Et donc y possède un unique antécédent par h dans X.
Donc y possède un unique antécédent par h.
- **si** $y \in \overline{f(X)}$: si un élément $x \in Y$ est un antécédent de y par h alors $g_1(x) = y$.
Par définition de g_1, ceci signifie que y est l'unique antécédent de x par g, donc que $x = g(y)$.
Inversement, on vérifie que $g(y) \in g\left(\overline{f(X)}\right) = \overline{X} = Y$.
Donc y est l'unique antécédent par g de $g(y) \in Y$. Autrement dit, $g_1(g(y)) = y$. Et donc $y = h(g(y))$. Donc y possède bien un unique antécédent[8] par h.

Donc tout élément de F possède un unique antécédent par h : $\boxed{h \text{ est bijective.}}$

Rappel
Par définition, $f(X)$ est
$$\{y \in F \mid \exists x \in X, y = f(x)\}$$
l'ensemble des éléments de F possédant au moins un antécédent dans X.

[8] Qui se trouve donc être $g(y)$.

8. Il y a de nombreuses manières de construire de telles injections, en voici une.
Tout nombre rationnel r s'écrit de manière unique $r = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$, p et q premiers entre eux.
Soit donc $g : \mathbf{Q} \to \mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ qui a un rationnel r sous forme irréductible $r = \frac{p}{q}$ associe (p, q). Notons que cette application est bien définie, justement car il y a unicité d'une telle

Premiers entre eux ?
Si vous n'avez pas fait d'arithmétique en terminale, gardez juste à l'esprit que cela signifie que p et q n'ont pas de facteur commun, autrement dit que $\frac{p}{q}$ est bien l'écriture irréductible de r.
Par exemple $\frac{2}{3}$ est bien sous forme irréductible, pas $\frac{2}{6}$.

écriture, et donc pas d'ambiguïté sur ce qu'est $g(r)$.
Alors g est clairement injective.
Mais en utilisant des bijections $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ et $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ on montre aisément que $(p, q) \mapsto f(p, \varphi^{-1}(q))$ réalise une bijection de $\mathbf{N} \times \mathbf{Z}$ sur $\mathbf{N}$.
Qui composée avec g nous donne une injection $\mathbf{Q} \to \mathbf{N}$.
Puisque l'application $n \mapsto n$ est une injection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Q}$, par le théorème de Cantor-Bernstein, $\boxed{\text{il existe une bijection entre } \mathbf{Q} \text{ et } \mathbf{N}.}$

Notons qu'ici, nous ne donnons pas de bijection explicite entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Q}$, car le théorème de Cantor-Bernstein ne construit pas explicitement[9] une telle bijection. Pourtant on connaît de telles fonctions, et à l'aide d'un peu d'arithmétique (en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers), il est possible d'en construire explicitement.

Par exemple, si $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\lfloor x \rfloor - x + 1}$, alors la suite définie[10] par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ prend une et seule fois chaque valeur rationnelle positive. Elle réalise donc une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Q}_+$.

[9] Notamment car le point fixe obtenu par Knaster-Tarski n'est pas explicitement construit, on garantit son existence, mais on n'en dit guère plus.

[10] Amusez-vous à calculer ses 10 premiers termes !

9. Argument diagonal de Cantor.
Procédons comme indiqué dans l'énoncé, en supposant qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbf{N}^* \to]0, 1[$, et posons $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^{(k)} 10^{-k}$, où $a_k^{(k)}$ est le $k^{\text{ème}}$ chiffre du développement décimal de $\varphi(k)$.
Notons qu'il s'agit bien là du développement décimal propre de x, c'est-à-dire que les $a_k^{(k)}$ ne peuvent pas tous être égaux à 9 à partir d'un certain rang.
En effet, il existe une infinité de nombres de $]0, 1[$ dont le développement décimal ne contient pas le chiffre 9, par exemple $0,1111\ldots, 0,011111\ldots, 0,011111\ldots$ etc.
Et donc il existe une infinité de k pour lesquels $a_k^{(k)} \neq 9$.
Soit alors y le nombre dont le développement décimal est donné par l'énoncé, à savoir $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}$ où $b_k = \begin{cases} a_k^{(k)} + 1 & \text{si } a_k^{(k)} \neq 9 \\ 0 & \text{si } a_k^{(k)} = 9 \end{cases}$.
Notons qu'il s'agit encore d'un développement décimal propre puisque le raisonnement ci-dessus prouve également qu'il existe une infinité de $a_k^{(k)}$ qui ne sont pas égaux à 8.
Puisque $\varphi : \mathbf{N}^* \to]0, 1[$ est bijective, il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\varphi(n) = y$.
Mais alors $a_n^{(n)}$ est le $n^{\text{ème}}$ chiffre du développement décimal de y. Or ce $n^{\text{ème}}$ chiffre est $b_n \neq a_n^{(n)}$.
On obtient donc une contradiction, et donc il n'existe pas de bijection $\varphi : \mathbf{N}^* \to]0, 1[$.
Et donc $\boxed{\mathbf{R} \text{ et } \mathbf{N} \text{ ne sont pas équipotents.}}$

Remarque
La transformation appliquée aux $a_k^{(k)}$ n'est pas très importante, l'essentiel étant qu'aucun de b_k ne soit égal à $a_k^{(k)}$ afin que l'argument ci-dessous reste valable.

$\mathbf{N}$ ou $\mathbf{N}^*$?
Nous avons ici utilisé $\mathbf{N}^*$ à la place de $\mathbf{N}$ puisque nous avions numéroté les développements décimaux à partir de 1 et non de 0, mais rappelons que $n \mapsto n+1$ est une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}^*$.

10. $\mathbf{R}$ est équipotent à $\mathscr{P}(\mathbf{N})$.

10.a. C'est un résultat du cours, si on se rappelle qu'une suite à valeurs dans $\{0, 1\}$ n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbf{N}$ dans $\{0, 1\}$, la bijection en question est $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbf{N}) & \longrightarrow & \{0,1\}^{\mathbf{N}} \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array} \right.$.

10.b. La suite $(\psi_n(u))_n$ est croissante puisque pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\psi_{n+1}(u) - \psi_n(u) = \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{u_k}{3^{k+2}} - \frac{1}{3} - \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{3^{k+2}} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+3}} \geqslant 0.$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\psi_n(u) \leqslant \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k+2}} \leqslant \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{3^k} \leqslant \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}{\frac{2}{3}} \leqslant \frac{1}{2}$.
Donc $\boxed{(\psi_n(u))_n \text{ est majorée, et étant croissante, elle est convergente.}}$

10.c. Soient (u_n), (v_n) deux éléments distincts de $\{0, 1\}^{\mathbf{N}}$, et soit $k_0 = \min\{k \in \mathbf{N},\ u_k \neq v_k\}$.
Quitte à échanger u et v, on peut supposer que $u_{k_0} = 0$ et $v_{k_0} = 1$.
Alors pour tout $n \geqslant k_0 + 1$, on a

$$\begin{aligned}\psi_n(v) - \psi_n(u) &= \frac{1}{3} + \sum_{k=0}^{k_0} \frac{v_k}{3^{k+2}} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{v_k}{3^{k+2}} - \frac{1}{3} - \sum_{k=0}^{k_0} \frac{u_k}{3^{k+2}} - \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{u_k}{3^{k+2}} \\ &= \frac{1}{3^{k_0+2}} + \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{v_k - u_k}{3^{k+2}}\end{aligned}$$

Détails
Les premiers termes sont les mêmes, et pour $k = k_0$, seul reste le terme associé à v.

$$\geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}} - \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{3^{k+2}}$$

$$\geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}} - \frac{1}{3^{k_0+3}} \sum_{i=0}^{n-k_0-1} \frac{1}{3^i} \geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}} - \frac{1}{3^{k_0+3}} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k_0}}{\frac{2}{3}}$$

$$\geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{3^{k_0+2}} \geqslant \frac{1}{3^{k_0+2}}.$$

Dans le pire des cas, tous les $u_k, k > k_0$ valent 1 et les v_k sont nuls.

Et donc en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $\psi(v) - \psi(u) \geqslant \dfrac{1}{2 \cdot 3^{k_0+2}} > 0$.

Et en particulier, $\boxed{\psi(v) \neq \psi(u), \text{ de sorte que } \psi \text{ est injective.}}$

10.d. Supposons qu'à deux réels $x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 10^{-k}$ et $y = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k 10^{-k}$ soient associés les mêmes ensembles A et B.
Alors, pour tout $i \geqslant 1$, chacun de ces ensembles contient un unique entier qui soit divisible par 2^i et pas par 2^{i+1}.
Pour A, c'est $2^i 3^{a_i}$, et pour B, c'est $2^i 3^{b_i}$.
Si A et B sont égaux, alors nécessairement, ces deux nombres sont égaux, et donc $a_i = b_i$.
Ceci étant vrai pour tout $i \geqslant 1$, il vient donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} = \sum_{k=1}^{n} b_k 10^{-k}$,
ce qui après passage à la limite, nous donne $x = y$.
Et donc $\boxed{\text{la fonction de l'énoncé est injective.}}$

10.e. À l'aide des questions 10.a et 10.c, on construit une injection[11] de $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ dans $]0,1[$.
D'autre part, la fonction de la question 10.d est injective, de $]0,1[$ dans $\mathscr{P}(\mathbf{N})$.
Donc par le théorème de Cantor-Bernstein, il existe une bijection de $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ sur $]0,1[$.
Ce qui, composé avec la bijection de la question 1 donne une bijection de $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ sur $\mathbf{R}$ tout entier.
Et ainsi, comme annoncé, $\boxed{\mathscr{P}(\mathbf{N}) \text{ et } \mathbf{R} \text{ sont équipotents.}}$
Puisque par le théorème de Cantor[12], $\mathbf{N}$ et $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ ne sont pas équipotents, on retrouve le fait que $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ ne sont pas équipotents.

[11] Car composée d'injections.

[12] Vu en cours et qui affirme que pour tout ensemble E, E et $\mathscr{P}(E)$ ne sont pas équipotents.

11. Notons que si x et y sont deux réels de $]0,1[$, de développements décimaux respectifs $x = 0,a_1a_2\dots$ et $y = 0,b_1b_2\dots$, alors $0,a_1b_1a_2b_2\dots$ est un développement décimal propre.
Et par unicité d'un tel développement, il est évident que l'application
$\varphi : (x,y) \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} (10a_k + b_k) 10^{-2k}$ est une injection de $]0,1[^2 \to]0,1[$.
En revanche, $0,a_1b_1a_2b_2\dots$ peut être un développement décimal propre sans que $0,a_1a_2\dots$ le soit, penser par exemple à $0,91919191\dots$.
Donc φ n'est probablement pas bijective.
En revanche, il existe évidemment une injection de $]0,1[$ dans $]0,1^2[$, par exemple $x \mapsto \left(x, \frac{1}{2}\right)$, et donc par Cantor-Bernstein, il existe une bijection de $]0,1[^2$ dans $]0,1[$.
Mais à la question 1, nous avons prouvé qu'il existe une bijection de $]0,1[$ dans $\mathbf{R}$.
Et alors cette bijection, couplée à ce qui a été fait au-dessus prouve que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ sont équipotents.

Partie IV. Nombres algébriques, nombres transcendants

12.a. Notons $F_1 = E_1$ et $F_2 = E_2 \setminus E_1$, de sorte que $E_1 \cup E_2 = F_1 \cup F_2$, avec F_1, F_2 disjoints.
Alors F_1 est au plus dénombrable puisque E_1 l'est, et F_2 est également au plus dénombrable, puisque si $\varphi : E_2 \to \mathbf{N}$ est injective, alors $\varphi_{|F_2} : F_2 \to \mathbf{N}$ est également injective[13].
De plus, pour tout $x \in E_1 \cup E_2$, on a $x \in F_1$ ou $x \in F_2$, les deux ne pouvant se produit simultanément.
Notons alors $\varphi_1 : F_1 \to \mathbf{N}$ et $\varphi_2 : F_2 \to \mathbf{N}$ deux injections, et soit $f : E_1 \cup E_2 \to \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ définie par

$$\forall x \in E_1 \cup E_2,\ \varphi(x) = \begin{cases} (0, \varphi_1(x)) & \text{si } x \in F_1 \\ (1, \varphi_2(x)) & \text{si } x \in F_2 \end{cases}.$$

[13] La restriction d'une injection est toujours une injection.

Alors f est une injection de $E_1 \cup E_2$ dans $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, qui composée par une bijection de $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ nous fournit une injection de $E_1 \cup E_2$ dans $\mathbf{N}$, de sorte que $E_1 \cup E_2$ est au plus dénombrable.
Pour une union finie, il suffit ensuite de faire une récurrence sur le nombre d'ensembles.

12.b. Adaptons le principe de la question précédente.
Soient $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des ensembles au plus dénombrables, et pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit $\varphi_n : E_n \to \mathbf{N}$ une injection.
Pour $x \in \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$, posons $\iota(x) = \min\{k \in \mathbf{N} \mid x \in E_k\}$.
Et définissons alors une application $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n & \longrightarrow & \mathbf{N}\times\mathbf{N} \\ x & \longmapsto & (\iota(x), \varphi_{\iota(x)}(x)) \end{array} \right.$.
Alors il est aisé de constater que φ est injective, et donc composée avec une bijection de $\mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, nous fournit une injection de $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n$ sur $\mathbf{N}$.
Ainsi, $\boxed{\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \text{ est au plus dénombrable.}}$

Remarque
$\iota(x)$ est bien défini car $\{k \in \mathbf{N} \mid x \in E_k\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$, qui admet donc un plus petit élément.

13. Choisir un polynôme de degré k à coefficients entiers, c'est choisir $k+1$ éléments de $\mathbf{Z}$.
Donc l'ensemble des polynômes de degré k à coefficients entiers est équipotent à $\mathbf{Z}^{k+1}$.
Mais $\mathbf{Z}$ étant équipotent à $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}^{k+1}$ est équipotent à $\mathbf{N}^{k+1}$, qui est lui-même équipotent à $\mathbf{N}$.

14. Soit $k \in \mathbf{N}$ fixé. Notons $i \mapsto P_{i,k}$ une bijection entre $\mathbf{N}$ et l'ensemble des polynômes de degré k à coefficients entiers.
Pour $P \in \mathbf{R}[X]$ non nul, notons $\mathscr{C}(P)$ l'ensemble de ses racines réelles, qui est fini[14] et donc au plus dénombrable.

[14] Borné par le degré de P.

Alors l'ensemble des nombres algébriques est $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} \left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} \mathscr{C}(P_{i,k}) \right)$.
Mais par la question 12.b, à k fixé, $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} \mathscr{C}(P_{i,k})$ est au plus dénombrable.
Et donc $\bigcup_{k\in\mathbf{N}} \left(\bigcup_{i\in\mathbf{N}} \mathscr{C}(P_{i,k}) \right)$ est également au plus dénombrable.
Autrement dit, on a une injection de l'ensemble des algébriques dans $\mathbf{N}$.
Puisque $n \mapsto n$ est une injection de $\mathbf{N}$ dans l'ensemble des algébriques, par le théorème de Cantor-Bernstein, $\boxed{\text{l'ensemble des nombres algébriques est équipotent à } \mathbf{N}.}$

Puisque $\mathbf{R}$ n'est lui pas équipotent à $\mathbf{N}$, et qu'un réel est soit algébrique, soit transcendant, on n'a pas $\mathbf{R}$ égal à l'ensemble des algébriques, si bien qu'il existe des[15] nombres transcendants.

[15] Au moins un pour l'instant.

De plus l'ensemble des nombres transcendants ne saurait être au plus dénombrable, car alors $\mathbf{R}$ serait l'union de deux ensembles au plus dénombrables[16] et donc serait lui-même au plus dénombrable d'après la question 12.a.
Cela signifierait donc qu'il existe une injection de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{N}$, et puisqu'il existe une injection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, par le théorème de Cantor-Bernstein, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ seraient équipotents, ce qui n'est pas le cas d'après la question 10.

[16] Les algébriques et les transcendants.

Remarque
On peut en réalité prouver que l'ensemble des transcendants est équipotent à $\mathbf{R}$.

Commentaires *: si ce résultat garantit l'existence de nombres transcendants, on notera bien qu'il n'en construit pas explicitement. Une telle construction est difficile, et c'est* LIOUVILLE *qui fournit le premier exemple de nombre transcendant en 1844, en considérant*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k!}} = 0,110001000000000000000000100\dots$$

Depuis, on connaît des preuves de transcendance d'autres nombres, et notamment de e *(*HERMITE*, 1873) et* π *(*LINDEMANN*, 1882). À l'heure actuelle, il existe encore beaucoup de nombres dont on ne sait pas dire s'ils sont algébriques ou transcendants, c'est notamment le cas de* $e+\pi$, $e\pi$, e^e, π^e.