Devoir maison 8

▸ Exercice 1 : solutions périodiques d'équations différentielles

Dans cet exercice, on considère un réel non nul a, et $b : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et T-périodique (avec $T > 0$).
On s'intéresse alors à l'équation différentielle $(E) : y'(t) + ay(t) = b(t)$.

1. Montrer que si y est une solution de (E), alors la fonction $y_T : x \mapsto y(x+T)$ est aussi une solution de (E).
2. Soit y une solution de (E). Montrer que y est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.
3. En déduire qu'il existe une unique solution T-périodique de (E).

▸ Exercice 2 : conjugaison d'applications

Soit E un ensemble non vide.
Pour $f : E \to E$ bijective, on appelle conjugaison par f l'application $\Phi_f : \left| \begin{array}{ccc} E^E & \longrightarrow & E^E \\ \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \circ f^{-1} \end{array} \right.$.
Dans la suite, on notera $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ les parties de E^E formées respectivement des injections et des bijections.

1. Que vaut Φ_{id_E} ?
2. Soient $f, g \in E^E$ deux bijections. Que vaut $\Phi_f \circ \Phi_g$.
3. En déduire que pour toute bijection $f \in E^E$, Φ_f est bijective, et déterminer sa bijection réciproque.
4. Soit $f \in E^E$ bijective.
   a. Montrer que $\mathscr{I}$ et $\mathscr{S}$ sont stables par Φ_f.
   b. Prouver que $\phi_f(\mathscr{I}) = \mathscr{I}$ et que $\Phi_f(\mathscr{S}) = \mathscr{S}$.
   c. En déduire que si $\varphi \in E^E$ est bijective, alors il en est de même de $\Phi_f(\varphi)$. Que vaut alors sa bijection réciproque $\left(\Phi_f(\varphi)\right)^{-1}$?