DEVOIR MAISON 8

▸ Problème : intégrales de Wallis, intégrale de Gauss et $\zeta(2)$

La dernière partie est facultative.

Dans tout le problème, pour $n \in \mathbf{N}$, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$.

Partie I. Intégrales de Wallis

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_n > 0$.
3. Prouver que la suite $(W_n)_n$ est décroissante.
4. À l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
5. Prouver que la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ est constante.
6. En notant que pour tout $n \geqslant 1$, $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$, prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$.
   En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{n}W_n$.

Partie II. Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette partie, on note $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ qui s'annule en 0.

Le but de la partie est de calculer la limite de F en $+\infty$, qu'on note généralement $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, et qu'on appelle l'intégrale de Gauss.

7. Prouver que $\forall x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t}\,dt$.
   En déduire que F possède une limite finie en $+\infty$.
8. Prouver que pour tout $y \in \mathbf{R}$, $1+y \leqslant e^y$.
9. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $u \in [0,n]$,
$$\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant e^{-u^2} \leqslant \left(1+\frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2}.$$
10. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = n\tan t$, exprimer $\displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2} t\,dt$.
11. En utilisant les deux questions précédentes, ainsi qu'un changement de variable de la forme $u = n\sin t$, prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$nW_{2n^2+1} \leqslant F(n) \leqslant nW_{2n^2-2}.$$
12. Prouver enfin que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie III. Calcul de $\zeta(2)$ (a.k.a. la somme des inverses des carrés des entiers).

Le but de cette partie est de calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Pour $p \in \mathbf{N}$, on pose $J_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p} t\,dt$ et $K_p = \dfrac{4^p(p!)^2}{(2p)!}J_p$.

13. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.

14. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $W_{2p} = p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p$.

15. En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, $K_{p-1} - K_p = \dfrac{\pi}{4p^2}$.

16. À l'aide de la question précédente, exprimer S_n à l'aide de K_n, pour $n \in \mathbf{N}^*$.

17. Prouver que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x \leqslant \frac{\pi}{2} \sin x$.

18. En déduire que pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, on a $0 \leqslant J_p \leqslant \dfrac{\pi^2 W_{2p}}{8(p+1)}$.

19. Prouver alors que (S_n) converge et déterminer sa limite.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 8

► Problème : intégrales de Wallis, intégrale de Gauss et $\zeta(2)$

Partie I. Intégrales de Wallis

1. On a $W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$ Puis $W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = \boxed{1.}$
Enfin, $W_2 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}.}$

2. Par la relation de Chasles, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t)^n\,dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,dt$.
Mais par positivité de l'intégrale, $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,dt \geqslant 0$. Et pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $(\cos t)^n \geqslant \frac{1}{2^n}$ de sorte que par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{2^n} \geqslant \frac{\pi}{3 \times 2^n} > 0$.

Remarque
On aurait envie d'utiliser une «stricte croissance de l'intégrale», et nous aurons un résultat qui va dans ce sens là en fin d'année.
Pour l'instant la croissance de l'intégrale telle que nous l'avons énoncée ne donne que des inégalités larges, il faut se débrouiller avec.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$, et donc $\cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$.
Par croissance de l'intégrale, on a donc $W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\,dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = W_n$.
Et donc $\boxed{(W_n) \text{ est bien décroissante.}}$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Procédons à une intégration par parties dans
$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (\cos t)^{n+1}\,dt$, en posant $u(t) = \sin t$ et $v(t) = (\cos t)^{n+1}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $u'(t) = \cos t$ et $v'(t) = (n+1)(\sin t)(\cos t)^n$.
Alors

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[\sin t (\cos t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (\cos t)^n\,dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)(\cos t)^n\,dt = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

Et donc, comme annoncé, $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors en utilisant la question précédente,

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+1)W_{n+1}W_n.$$

Une récurrence évidente prouve alors que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ (n+1)W_{n+1}W_n = (0+1)W_1W_0 = \frac{\pi}{2}.}$

6. Soit $n \in N^*$. La double inégalité $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-}$ est une simple conséquence de la décroissance de (W_n). Après multiplication par W_n, il vient

$$W_nW_{n+1} \leqslant W_n^2 \leqslant W_nW_{n-1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)W_{n+1}W_n}{n+1} \leqslant W_n^2 \leqslant \frac{nW_nW_{n-1}}{n} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\frac{n}{n+1} \leqslant nW_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

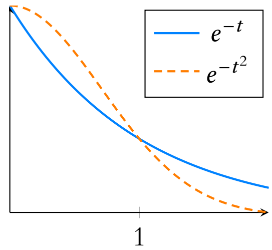
Donc lorsque $n \to +\infty$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$.
Et donc en passant à la racine carrée, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$

Partie II. Calcul de l'intégrale de Gauss

7. Soit $x \geqslant 1$. Par la relation de Chasles, $\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t^2}\,dt$.
Or, pour $t \geqslant 1$, $t^2 \geqslant t$, de sorte que $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\int_1^x e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_0^x e^{-t}\,dt$.

Danger !
L'inégalité $t^2 \geqslant t$ n'est pas vraie pour $t \in]0,1[$.

Et donc $\boxed{F(x) \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t}\,dt.}$



Il est aisé de constater que $\displaystyle\int_1^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_1^x = 1 - e^{-x} \leqslant 1$.

Et donc pour tout $x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant 1 + \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$.
Mais cette dernière quantité est une constante, indépendante de x, et donc nous venons de prouver que F est majorée sur $[1, +\infty[$.
Par ailleurs, F est croissante, puisqu'il s'agit, par le théorème fondamental de l'analyse, d'une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$, qui est positive.
Donc F est croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle admet nécessairement une limite finie en $+\infty$.

8. Soit φ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(y) = e^y - 1 - y$. Alors φ est dérivable, et pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\varphi'(y) = e^y - 1$, qui est du signe de y.
Donc φ admet un minimum en 0, égal à $\varphi(0) = 0$.
Et donc pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\varphi(y) \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{1 + y \leqslant e^y.}$

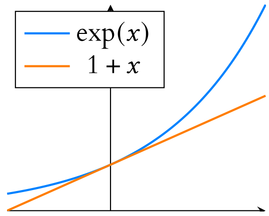


FIGURE 0.1– La fonction exponentielle est au-dessus de sa tangente en 0.

9. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $u \in [0, n]$. Alors $e^{-u^2} = \left(e^{-\frac{u^2}{n^2}}\right)^{n^2}$.

Or, par la question précédente, $1 - \dfrac{u^2}{n^2} \leqslant e^{-\frac{u^2}{n^2}}$.

Et donc par croissance de $t \mapsto t^{n^2}$, il vient $\left(1 - \dfrac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant e^{-u^2}$.

De même, on a $e^{u^2} = \left(e^{\frac{u^2}{n^2}}\right)^{n^2} \geqslant \left(1 + \dfrac{u^2}{n^2}\right)^{n^2}$.

Et donc par passage à l'inverse[1], $e^{-u^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2}$.

[1] Tout est positif.

10. Utilisons le changement de variable indiqué, en posant $u = n\tan t$, de sorte que pour $t = 0$, $u = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{4}$, $u = n$.
On a alors $du = n(1 + \tan^2 t)\,dt$. Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du &= \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 t)^{-n^2} n(1+\tan^2 t)\,dt = n\int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 t)^{1-n^2}\,dt \\ &= n\int_0^{\pi/4} \left(\cos^2 t\right)^{n^2-1} dt = \boxed{n\int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2} t\,dt.}\end{aligned}$$

Rappel
Pour tout t non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π,
$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

11. Soit $n > 1$. Par croissance de l'intégrale, l'inégalité de la question 9 devient

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du \leqslant \underbrace{\int_0^n e^{-u^2}\,du}_{=F(n)} \leqslant \int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du. \qquad (\star)$$

Mais par la question précédente,

$$\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du = n\int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2} t\,dt = n\left(W_{2n^2-2} - \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{2n^2-2} t\,dt}_{\geqslant 0}\right) \leqslant nW_{2n^2-2}.$$

Par ailleurs, calculons l'intégrale de gauche de $(\star)$ en utilisant le changement de variable $u = n\sin t$. Lorsque $t = \frac{\pi}{2}$, $u = n$, et $du = n\cos t\,dt$, de sorte que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right)^{n^2} n\cos t\,dt = n\int_0^{\pi/2} \cos^{2n^2+1}\,dt = nW_{2n^2+1}.$$

Et donc nous avons bien prouvé que

$$\boxed{nW_{2n^2+1} \leqslant F(n) \leqslant nW_{2n^2-2}.}$$

12. Pour $n > 1$, nous avons $nW_{2n^2-2} = \dfrac{n}{\sqrt{2n^2-2}}\sqrt{2n^2-2}W_{2b^2-2}$.

Mais nous savons par la question 6 que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2-2}W_{2n^2-2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Et par ailleurs, $\dfrac{n}{\sqrt{2n^2-2}} = \dfrac{n}{n\sqrt{2-\frac{2}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2-\frac{2}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_{2n^2-2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On prouve de la même manière que $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_{2n^2-1} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Puisque par ailleurs, on a déjà prouvé qu'il existait un réel ℓ tel que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = \ell$, et donc $\ell = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. *Cette intégrale joue un rôle très important en probabilités, et vous l'avez déjà rencontrée sous une forme un petit peu différente, c'est la source* $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ *qui apparaît dans la densité de la loi normale centrée réduite.*

Remarque

On utilise ici le fait que si la **fonction** F possède une limite en $+\infty$, alors la **suite** $(F(n))$ a la même limite.
On notera que si on ne sait pas si F admet une limite, il se peut que la suite $(F(n))$ possède une limite sans que la fonction F n'en possède une.
Par exemple pour $F : x \mapsto \cos(2\pi x)$.
Tout ceci sera clarifié dans le chapitre dédié aux limites de fonctions.

Partie III. Calcul de $\zeta(2)$.

13. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

Pour $n = 0$, nous avons déjà établi que $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{4^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors, par la question 4,

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{4(n+1)^2 4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}.}$

Remarque : notons que la forme de l'énoncé se prêtait bien à une récurrence car le résultat y était donné.
Mais nous aurions pu faire sans, en remarquant que

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \cdots = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{2n-1}{2n}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}W_0 = \frac{(2n+1)\cdots 1}{(2n+2)\cdots 2}\frac{\pi}{2}.$$

Et alors des formules déjà rencontrées sur le produit des nombres pairs/produit des nombres impairs nous auraient conduits au résultat.

14. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Dans l'intégrale définissant W_{2p}, procédons à une intégration par parties en posant $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \cos^{2p} t$, de sorte que u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $u' : t \mapsto 1$ et $v' : t \mapsto -2p\sin t\cos^{2p-1} t$. Il vient alors

$$W_{2p} = \underbrace{\left[t\cos^{2p} t\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + p\int_0^{\pi/2} 2t\sin t\cos^{2p-1} t\,dt.$$

Dans cette seconde intégrale, procédons de nouveau à une intégration par parties, en posant $u_1(t) = t^2$ et $v_1(t) = \sin t\cos^{2p-1} t$, de sorte que $u_1(t) = 2t$ et $v_1'(t) = -(2p-1)\sin^2 t\cos^{2p-2} t + \cos^{2p} t$.

$$\begin{aligned} W_{2p} &= p\underbrace{\left[t^2\sin t\cos^{2p-1} t\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - p\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p} t\,dt + p(2p-1)\int_0^{\pi/2} t^2\sin^2 t\cos^{2p-2} t\,dt \\ &= -pJ_p + p(2p-1)\int_0^{\pi/2} t^2\left(1-\cos^2 t\right)\cos^{2p-2} t\,dt \end{aligned}$$

$$= -pJ_p + p(2p-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p-2} t\,dt - p(2p-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p} t\,dt$$
$$= -pJ_p + p(2p-1)J_{p-1} - p(2p-1)J_p = \boxed{p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p.}$$

15. Il vient donc, pour $p \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} K_{p-1} - K_p &= \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p-2)!}J_{p-1} - \frac{4^p(p!)^2}{(2p)!}J_p \\ &= \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}\left[(2p-1)(2p)J_{p-1} - 4p^2 J_p\right] \\ &= \frac{2\cdot 4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}\left[p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p\right] \\ &= \frac{2\cdot 4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}W_{2p} \\ &= \frac{2\cdot 4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!}\frac{(2p)!}{4^p(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4p^2}.} \end{aligned}$$

16. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En sommant les égalités de la question précédente pour p allant de 1 à n, on obtient[2]

$$\sum_{p=1}^{n}(K_{p-1} - K_p) = \sum_{p=1}^{n}\frac{\pi}{4p^2} \Leftrightarrow K_0 - K_n = \frac{\pi}{4}S_n.$$

Or, $K_0 = J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$.

On en déduit que $\boxed{S_n = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{4}{\pi}K_n.}$

[2] On reconnaît une somme télescopique.

17. Soit φ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \frac{\pi}{2}\sin(x) - x$.
Alors φ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car somme de fonctions dérivables, et on a $\varphi' : x \mapsto \frac{\pi}{2}\cos x - 1$.
Donc φ' ne s'annule qu'en $\alpha = \operatorname{Arccos}\frac{2}{\pi}$, et est positive sur $[0, \alpha]$, négative sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$.
On en déduit que φ possède un maximum en α.
Mais $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, de sorte que φ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Et donc $\boxed{\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ x \leqslant \sin x.}$

18. Soit $p \in \mathbf{N}$. Par la question précédente, on a donc, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant t^2\cos^{2p} t \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2 t\cos^{2p} t.$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant J_p \leqslant \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^{2p} t\,dt.$$

Mais cette dernière intégrale vaut

$$\int_0^{\pi/2}\left(1 - \cos^2 t\right)\cos^{2p} t\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^{2p} t\,dt - \int_0^{\pi/2}\cos^{2p+2} t\,dt = W_{2p} - W_{2p+2}.$$

En utilisant alors le résultat de la question 5, on obtient

$$W_{2p} - W_{2p+2} = W_{2p} - \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} = \left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right)W_{2p} = \frac{1}{2(p+1)}W_{2p}.$$

Et donc nous avons bien l'encadrement souhaité : $\boxed{0 \leqslant J_p \leqslant \dfrac{\pi^2}{8(p+1)}W_{2p}.}$

19. De la question précédente, on déduit que pour $p \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqslant K_p \leqslant \frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \frac{\pi^2}{8(p+1)} W_{2p} \leqslant \frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{\pi^2}{8(p+1)} \leqslant \frac{\pi^3}{16(p+1)}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n = 0$.
Et donc par le résultat de la question 16,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6} - \lim_{n \to +\infty} \frac{4}{\pi} K_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Commentaires *: la formule* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *fut énoncée par Euler en 1735 et prouvée correctement six ans plus tard, alors que la question[3] de la valeur de cette limite était sans réponse depuis presque un siècle.*
On en connaît aujourd'hui de nombreuses démonstrations (et l'une d'entre elles a été donnée dans le DM4).

[3] Connue sous le nom de problème de Bâle.