DM7 : Indications

Problème 1

► 1) Écrire $z = ia$ avec $a \in \mathrm{R}$, puis dans l'équation (E_1), utiliser l'égalité des parties réelles et des parties imaginaires pour arriver à deux équations vérifiées par a, dont l'une est de degré 2.

► 3)a) On a dit en cours qu'un système du type $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ a toujours des solutions (et on ne demande pas de trouver les solutions ici).

► 3)b) Pour $u^3 + v^3$, on pourra commencer par développer $(u + v)^3 = z^3$, et se souvenir que z est une solution de (E_2).

► 3)d) On trouve $(u^3, v^3) = (-1, i)$ ou $(u^3, v^3) = (i, -1)$.

Dans le premier cas, u est une racine cubique de -1. Or on sait qu'il y a trois telles racines cubiques, que l'on pourra déterminer (par exemple car l'une d'entre elles est -1).

Une fois la valeur de u choisie, il n'y a plus le choix pour celle de v car $uv = i$.

► 4) Les solutions de (E_2) sont forcément de la forme $u + v$ avec (u, v) l'un des couples précédentes. Cela ne laisse donc que 3 valeurs possibles pour z.

On n'oubliera pas de s'assurer que ces trois complexes sont bien solution de (E_2).

► 6) On pourra commencer par écrire $1 + i \tan \alpha$ sous forme exponentielle. Cela a quasiment été fait en TD dans la dernière question de l'exercice 7.4.

Problème 2

► 4.a. Si $|z| \in]0, 1[$, alors les zpn sont deux à deux distincts.

► 9. Utiliser la question 6 et montrer que si $\pm i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ avec $\omega_1, \omega_2 \in \mathrm{Z}[j]^*$, alors $\sqrt{3} \in \mathrm{Q}$.

► 10.b. Avec les notations de 10.a, deux valeurs de i différentes donnent deux valeurs de j différentes. Donc lorsque i parcourt $[\![1, n]\!]$, j prend une et une seule fois chaque valeur de $[\![1, n]\!]$.

► 10.d. La question précédente prouve que $B \subset \mathrm{U}_p$. Regarder alors le cardinal de ces deux ensembles.

► 12.b.i. $-1 \in \mathrm{U}_n$.

► 12.c. A contient notamment les $e^{2i\frac{k\pi}{n}} + 1$. Montrer que si $n \geqslant 5$, alors l'un de ces éléments est de module dans $]0, 1[$.

► 13.a. Montrer que $\{\omega^2, \omega \in \mathrm{U}_p\} = \mathrm{U}_p$.

► 13.c. Il s'agit donc de prouver que $p \neq 3$. On peut à cet effet prouver que si $A^* \cap \partial$ contient U_3, alors il contient aussi $1 + j^2 = -j$.

► 14. Reprendre soigneusement ce qui a été fait dans les questions 11 à 13.

► 15. Reprendre encore plus soigneusement ce qui a été dit dans les questions 11 à 13 pour prouver que si A est réticulé, alors $N(A) \in \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13\}$, et constater qu'on a déjà construit des ensembles réticulés de cette taille.