Devoir maison 7

Pour ce DM, vous avez le choix entre trois formules. Par ordre de difficulté :

- *option 1 (pour maîtriser les fondamentaux, notamment calculatoires) : l'exercice + la partie I du problème*
- *option 2 (plus théorique, difficulté moyenne) : les deux premières parties du problème*
- *option 3 (un petit peu plus dure, mais surtout plus longue que l'option 2) : l'intégralité du problème.*

► Exercice : quelques calculs

On note $I = \int_0^1 \operatorname{Arctan}\left(x^3\right)\, dx$.

1. En utilisant une intégration par parties, puis un changement de variable, montrer que $I = \frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{u}{1+u^3}\, du$.
2. Factoriser le polynôme X^3+1 en produit de facteurs irréductibles, puis en déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{X}{1+X^3}$.
3. Prouver que $I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\ln(2)}{2}$.

► Problème : intégrales de Wallis, application au calcul de l'intégrale de Gauss et au calcul de $\zeta(2)$

Dans tout le problème, pour $n \in \mathbf{N}$, on note $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$.
Les intégrales W_n sont appelées les intégrales de Wallis.

Partie I. Étude des intégrales de Wallis.

1. Calculer W_0, W_1 et W_2.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_n > 0$.
3. Justifier que la suite $(W_n)_n$ est décroissante.
4. À l'aide d'une intégration par parties, établir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
5. Montrer que la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_n$ est constante.
   En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la valeur de W_nW_{n+1}.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$.
7. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} nW_n^2 = \frac{\pi}{2}$, puis la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n$.

Partie II. Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette partie, on note $F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ la primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ qui s'annule en 0.

Le but de la partie est de calculer la limite de F en $+\infty$, qu'on note généralement $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$, et qu'on appelle l'intégrale de Gauss.

8. Prouver que $\forall x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\, dt + \int_1^x e^{-t}\, dt$.
   En déduire que F possède une limite finie en $+\infty$.
   On admet qu'alors la suite $(F(n))_n$ possède également une limite, égale à la limite de la fonction F en $+\infty$.

9. En utilisant une inégalité classique, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $u \in [0, n]$,

$$\left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant e^{-u^2} \leqslant \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2}.$$

10. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = n \tan t$, exprimer $\displaystyle\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2} t \, dt$.
11. En utilisant les deux questions précédentes, ainsi qu'un changement de variable de la forme $u = n \sin t$, prouver que pour tout $n \geqslant 2$,

$$nW_{2n^2+1} \leqslant F(n) \leqslant nW_{2n^2-2}.$$

12. Prouver enfin que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Partie III. Calcul de $\zeta(2)$ (a.k.a. la somme des inverses des carrés des entiers).

Le but de cette partie est de calculer la limite de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Pour $p \in \mathbf{N}$, on pose $J_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p} t \, dt$ et $K_p = \dfrac{4^p (p!)^2}{(2p)!} J_p$.

13. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$.
14. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $W_{2p} = p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p$.
15. En déduire que pour tout $p \geqslant 1$, $K_{p-1} - K_p = \dfrac{\pi}{4p^2}$.
16. À l'aide de la question précédente, exprimer S_n à l'aide de K_n, pour $n \in \mathbf{N}^*$.
17. Prouver que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x \leqslant \frac{\pi}{2} \sin x$.
18. En déduire que pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, on a $0 \leqslant J_p \leqslant \dfrac{\pi^2 W_{2p}}{8(p+1)}$.
19. Prouver alors que (S_n) converge et déterminer sa limite.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 7

► Exercice : quelques calculs

1. Procédons à une intégration par parties en posant $u(x) = x$, et $v(x) = \text{Arctan}(x^3)$, si bien que $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{3x^2}{1+x^6}$. Alors

$$I = \underbrace{\left[x\,\text{Arctan}(x^3)\right]_0^1}_{=\text{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}} - 3\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^6}\,dx.$$

Réalisons alors le changement de variable $u = x^2$, de sorte que $du = 2x\,dx$.
Alors

$$\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^6}\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+(x^2)^3}\,xdx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{1+u^3}\,du.$$

Et donc $I = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+u^3}$.

2. Puisque -1 est une racine évidente, on peut factoriser par $(X+1)$, et alors

$$X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1).$$

Puisque $X^2 - X + 1$ est de discriminant strictement négatif, il est irréductible, et donc nous avons là la décomposition en produit d'irréductibles de $X^3 + 1$.
On en déduit que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X}{X^3+1}$ est de la forme

$$\frac{X}{1+X^3} = \frac{a}{X+1} + \frac{bX+c}{X^2-X+1}.$$

Tous calculs faits[1], on obtient $\dfrac{X}{1+X^3} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{X+1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{X+1}{X^2-X+1}$.

[1] Avec la méthode de votre choix.

3. On a donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{u}{1+u^3}\,du &= -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{du}{u+1} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{u+1}{u^2-u+1}\,du \\
&= -\frac{1}{3}\left[\ln(1+u)\right]_0^1 + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2u-1}{u^2-u+1}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{u^2-u+1}\,du \\
&= -\frac{1}{3}\ln(2) + \frac{1}{6}\left[\ln(u^2-u+1)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{\ln(2)}{3} + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int_0^1 \frac{du}{\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{\ln(2)}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{Arctan}\left(\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{\ln(2)}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \text{Arctan}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= -\frac{\ln 2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Méthode
On écrit

$$u + 1 = \frac{1}{2}(2u-1) + \frac{3}{2}$$

pour faire apparaître une expression de la forme $\frac{f'}{f}$.

Et donc $\boxed{I = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}.}$

▸ Problème : intégrales de Wallis et applications.

Partie I. Intégrales de Wallis

1. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{2}.}$ Puis $W_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\pi/2} = \boxed{1.}$
   Enfin, $W_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\pi}{4}.}$
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors par la relation de Chasles, on a,
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^n t\,dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt.$$
   Mais par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt \geqslant 0$. Et pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\cos^n t \geqslant \dfrac{1}{2^n}$
   Et donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^n t\,dt \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2^n}\,dt = \frac{1}{2^n}$.
   Et donc il vient : $W_n \geqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{2^n} \geqslant \frac{\pi}{3 \times 2^x} > 0$.

> **Remarque**
> On aurait envie d'utiliser une «stricte croissance de l'intégrale», et nous aurons un résultat qui va dans ce sens là en fin d'année.
> Pour l'instant la croissance de l'intégrale telle que nous l'avons énoncée ne donne que des inégalités larges, il faut se débrouiller avec.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \cos t \leqslant 1$, alors $\cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$.
   Et donc par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\,dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt = W_n$.
   Donc $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$

> **⚠ Attention !**
> Si pour $x \geqslant 1$, la suite (x^n) est croissante, elle est décroissante pour $t \in [0,1]$:
> $$x^{n+1} \leqslant x^n.$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$. Procédons à une intégration par parties dans
   $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n+1} t\,dt$, en posant $u(t) = \sin t$ et $v(t) = \cos^{n+1} t$,
   qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $u'(t) = \cos t$ et $v'(t) = (n+1)(\sin t)(\cos^n t)$.
   Alors
$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \left[\sin t \cos^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t\,dt \\ &= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^n t\,dt = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$
   Et donc, comme annoncé, $\boxed{(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.}$
5. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors en utilisant la question précédente,
$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}.$$
   Et donc la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_n$ est constante.
   Puisque $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = 1W_0W_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
6. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors par décroissance de (W_n), $W_{n+1} \leqslant W_n$, si bien que $\frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$.
   Mais par ailleurs $W_{n+2} \leqslant W_{n+1}$, et $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$, si bien que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n}$.
7. De la question précédente, on déduit, à l'aide du théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}} = 1$.
   Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a alors
$$nW_n^2 = nW_nW_{n-1}\frac{W_n}{W_{n-1}} = \frac{\pi}{2}\frac{W_n}{W_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$
   On en déduit alors[2] que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}W_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2W_n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

[2] En utilisant la continuité de la fonction racine en $\frac{\pi}{2}$.

Partie II. Calcul de l'intégrale de Gauss

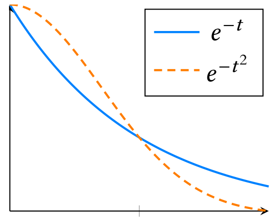
8. Soit $x \geqslant 1$. Par la relation de Chasles, $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t^2}\,dt$.
Or, pour $t \geqslant 1$, $t^2 \geqslant t$, de sorte que $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$.
Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $\displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_0^x e^{-t}\,dt$.

Et donc $\boxed{F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^x e^{-t}\,dt.}$

Il est aisé de constater que $\displaystyle\int_1^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_1^x = 1 - e^{-x} \leqslant 1$.

Et donc pour tout $x \geqslant 1$, $F(x) \leqslant 1 + \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$.
Mais cette dernière quantité est une constante, indépendante de x, et donc nous venons de prouver que F est majorée sur $[1, +\infty[$.
Par ailleurs, F est croissante, puisqu'il s'agit, par le théorème fondamental de l'analyse, d'une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$, qui est positive.
Donc F est croissante et majorée, par le théorème de la limite monotone, elle admet nécessairement une limite finie en $+\infty$.

> **Danger !**
> L'inégalité $t^2 \geqslant t$ n'est pas vraie pour $t \in]0,1[$.



9. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $u \in [0, n]$. Alors $e^{-u^2} = \left(e^{-\frac{u^2}{n^2}}\right)^{n^2}$.

Mais pour tout $t \in \mathbf{R}$, $e^t \geqslant 1 + t$, si bien que $1 - \dfrac{u^2}{n^2} \leqslant e^{-\frac{u^2}{n^2}}$.

Et donc par croissance de $t \mapsto t^{n^2}$, il vient $\left(1 - \dfrac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant e^{-u^2}$.

De même, on a $e^{u^2} = \left(e^{\frac{u^2}{n^2}}\right)^{n^2} \geqslant \left(1 + \dfrac{u^2}{n^2}\right)^{n^2}$.

Et donc par passage à l'inverse[3], $e^{-u^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2}$.

[3] Tout est positif.

10. Utilisons le changement de variable indiqué, en posant $u = n\tan t$, de sorte que pour $t = 0$, $u = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{4}$, $u = n$.
On a alors $du = n(1 + \tan^2 t)\,dt$. Et donc

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du &= \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 t)^{-n^2} n(1+\tan^2 t)\,dt = n\int_0^{\pi/4} (1+\tan^2 t)^{1-n^2}\,dt \\ &= n\int_0^{\pi/4} \left(\cos^2 t\right)^{n^2-1} dt = \boxed{x\int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2} t\,dt.}\end{aligned}$$

> **Rappel**
> Pour tout t non congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π,
> $$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

11. Soit $n > 1$. Par croissance de l'intégrale, l'inégalité de la question 9 devient

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du \leqslant \underbrace{\int_0^n e^{-u^2}\,du}_{=F(n)} \leqslant \int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du. \qquad (\star)$$

Mais par la question précédente,

$$\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du = n\int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2} t\,dt = n\left(f\left(2n^2-2\right) - \underbrace{\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{2n^2-2} t\,dt}_{\geqslant 0}\right) \leqslant nfW_{2n^2-2}.$$

Par ailleurs, calculons l'intégrale de gauche de $(\star)$ en utilisant le changement de variable $u = n\sin t$. Lorsque $t = \frac{\pi}{2}$, $u = n$, et $du = n\cos t\,dt$, de sorte que

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \sin^2 t\right)^{n^2} n\cos t\,dt = n\int_0^{\pi/2} \cos^{2n^2+1}\,dt = nW_{2n^2+1}.$$

Et donc nous avons bien prouvé que

$$\boxed{nW_{2n^2+1} \leqslant F(n) \leqslant nW_{2n^2-2}.}$$

12. Pour $n > 1$, nous avons $nW_{2n^2-2} = \dfrac{n}{\sqrt{2n^2-2}}\sqrt{2n^2-2}W_{2n^2-2}$.

Mais nous savons par la question 7 que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n^2-2}W_{2n^2-2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Et par ailleurs, $\dfrac{n}{\sqrt{2n^2-2}} = \dfrac{n}{n\sqrt{2-\frac{2}{n^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2-\frac{2}{n^2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_{2n^2-2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On prouve de la même manière que $\lim\limits_{n\to+\infty} nW_{2n^2+1} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} F(n) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$

Cette intégrale joue un rôle très important en probabilités, et vous l'avez déjà rencontrée sous une forme un petit peu différente, c'est la source $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ qui apparaît dans la densité de la loi normale centrée réduite.

Partie III. Calcul de $\zeta(2)$.

13. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$.

Pour $n = 0$, nous avons déjà établi que $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{4^0(0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

Supposons donc que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors, par la question 4,

$$W_{2(n+1)} = W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(2n+2)^2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n+2)!}{4(n+1)^2 4^n(n!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(n+1))!}{4^{n+1}\left((n+1)!\right)^2}\frac{\pi}{2}.$$

Donc par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N},\ W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}.}$

Remarque : notons que la forme de l'énoncé se prêtait bien à une récurrence car le résultat y était donné.
Mais nous aurions pu faire sans, en remarquant que

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2}W_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{2n-1}{2n}W_{2n-2} = \cdots = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{2n-1}{2n}\cdots\frac{3}{4}\frac{1}{2}W_0 = \frac{(2n+1)\cdots 1}{(2n+2)\cdots 2}\frac{\pi}{2}.$$

Et alors des formules déjà rencontrées sur le produit des nombres pairs/produit des nombres impairs nous auraient conduit au résultat.

14. Soit $p \in \mathbf{N}^*$. Dans l'intégrale définissant W_{2p}, procédons à une intégration par parties en posant $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \cos^{2p} t$, de sorte que u et v sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $u' : t \mapsto 1$ et $v' : t \mapsto -2p\sin t\cos^{2p-1} t$. Il vient alors

$$W_{2p} = \underbrace{\left[t\cos^{2p} t\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + p\int_0^{\pi/2} 2t\sin t\cos^{2p-1} t\,dt.$$

Dans cette seconde intégrale, procédons de nouveau à une intégration par parties, en posant $u_1(t) = t^2$ et $v_1(t) = \sin t\cos^{2p-1} t$, de sorte que $u_1(t) = 2t$ et $v_1'(t) = -(2p-1)\sin^2 t\cos^{2p-2} t + \cos^{2p} t$.

$$\begin{aligned} W_{2p} &= p\underbrace{\left[t^2\sin t\cos^{2p-1} t\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - p\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p} t\,dt + p(2p-1)\int_0^{\pi/2} t^2\sin^2 t\cos^{2p-2} t\,dt \\ &= -pJ_p + p(2p-1)\int_0^{\pi/2} t^2\left(1-\cos^2 t\right)\cos^{2p-2} t\,dt \\ &= -pJ_p + p(2p-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p-2} t\,dt - p(2p-1)\int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p} t\,dt \end{aligned}$$

$$= -pJ_p + p(2p-1)J_{p-1} - p(2p-1)J_p = \boxed{p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p}.$$

15. Il vient donc, pour $p \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} K_{p-1} - K_p &= \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p-2)!} J_{p-1} - \frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} J_p \\ &= \frac{4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!} \left[(2p-1)(2p)J_{p-1} - 4p^2 J_p\right] \\ &= \frac{2 \cdot 4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!} \left[p(2p-1)J_{p-1} - 2p^2 J_p\right] \\ &= \frac{2 \cdot 4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!} W_{2p} \\ &= \frac{2 \cdot 4^{p-1}((p-1)!)^2}{(2p)!} \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{\pi}{4p^2}}. \end{aligned}$$

16. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En sommant les égalités de la question précédente pour p allant de 1 à n, on obtient[4]

$$\sum_{p=1}^{n} (K_{p-1} - K_p) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\pi}{4p^2} \Leftrightarrow K_0 - K_n = \frac{\pi}{4} S_n.$$

Or, $K_0 = J_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \, dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{24}$.

On en déduit que $\boxed{S_n = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{4}{\pi} K_n}$.

[4] On reconnaît une somme télescopique.

17. Soit φ la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \frac{\pi}{2} \sin(x) - x$.
Alors φ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ car somme de fonctions dérivables, et on a $\varphi' : x \mapsto \frac{\pi}{2} \cos x - 1$.
Donc φ' ne s'annule qu'en $\alpha = \operatorname{Arccos} \frac{2}{\pi}$, et est positive sur $[0, \alpha]$, négative sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$.
On en déduit que φ possède un maximum en α.
Mais $\varphi(0) = 0$ et $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, de sorte que φ est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Et donc $\boxed{\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \ x \leqslant \sin x}$.

18. Soit $p \in \mathbf{N}$. Par la question précédente, on a donc, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant t^2 \cos^{2p} t \leqslant \frac{\pi^2}{4} \sin^2 t \cos^{2p} t.$$

Donc par croissance de l'intégrale,

$$0 \leqslant J_p \leqslant \frac{\pi^2}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^{2p} t \, dt.$$

Mais cette dernière intégrale vaut

$$\int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos^2 t\right) \cos^{2p} t \, dt = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p} t \, dt - \int_0^{\pi/2} \cos^{2p+2} t \, dt = W_{2p} - W_{2p+2}.$$

En utilisant alors le résultat de la question 4, on obtient

$$W_{2p} - W_{2p+2} = W_{2p} - \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} = \left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right) W_{2p} = \frac{1}{2(p+1)} W_{2p}.$$

Et donc nous avons bien l'encadrement souhaité : $\boxed{0 \leqslant J_p \leqslant \dfrac{\pi^2}{8(p+1)} W_{2p}}$.

19. De la question précédente, on déduit que pour $p \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqslant K_p \leqslant \frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \frac{\pi^2}{8(p+1)} W_{2p} \leqslant \frac{4^p (p!)^2}{(2p)!} \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \frac{\pi}{2} \frac{\pi^2}{8(p+1)} \leqslant \frac{\pi^3}{16(p+1)}.$$

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} K_n = 0$.
Et donc par le résultat de la question 16,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6} - \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\pi} K_n = \frac{\pi^2}{6}.$$

Commentaires *: la formule* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ *fut énoncée par Euler en 1735 et prouvée correctement six ans plus tard, alors que la question[5] de la valeur de cette limite était sans réponse depuis presque un siècle.*
On en connaît aujourd'hui de nombreuses démonstrations (et l'une d'entre elles a été donnée dans le DM4).

[5] Connue sous le nom de problème de Bâle.