Devoir maison 7

Vous traiterez au choix : soit les deux exercices, soit le problème.

▸ Exercice 1 : transformation de Joukovsky

On note $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^* & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & z + \dfrac{1}{z} \end{array}\right.$.

1. Résoudre l'équation $f(z) = \dfrac{3-i}{2}$.
2. a. Déterminer l'image de f.
   b. Pour $a \in \operatorname{Im} f$, donner le nombre d'antécédents de a par f.
3. Justifier que $\operatorname{Im}\left(f_{|\mathbf{U}}\right) = [-2, 2]$.

▸ Exercice 2 : autour des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ un entier fixé dans tout l'exercice. On note alors $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Partie I. Calcul de sommes

Pour $r \in \mathbf{Z}$, on notera $S_r = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_n} \omega^r$.

1. Soit $r \in \mathbf{Z}$.
   a. Justifier que $S_r = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\zeta^r)^k$.
   b. En déduire que $S_r = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ divise } r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. Dans cette question, on note $T = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$.
   a. On rappelle que la fonction cotangente est définie sur $]0, \pi[$ par : $\forall x \in]0, \pi[$, $\operatorname{cotan}(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.
   Justifier que $T = \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{i}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
   b. À l'aide du changement d'indice $\ell = n - k$, prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$, et en déduire la valeur de T.
3. a. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\zeta^k + z\right)^n = n\,(z^n + 1)$.
   b. En appliquant la formule de la question précédente avec $z = 1$ et $z = -1$, déterminer les valeurs de

$$C = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } S = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin^n\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Partie II. Une caractérisation des polygones réguliers centrés en l'origine

Dans cette partie, on suppose $n \geqslant 3$.
Soient $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$ des points du plan, d'affixes respectives $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$.
On suppose de plus que $M_0, \ldots, M_{n-1}$ sont tous sur un même cercle de centre O, c'est-à-dire que $|z_0| = |z_1| = \cdots = |z_{n-1}|$.
On note alors $M_n = M_0$ et $z_n = z_0$.
On dit que le polygone $M_0 M_1 \cdots M_{n-1}$ est régulier si il existe une rotation r, d'angle $\frac{2\pi}{n}$, telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $M_{k+1} = r(M_k)$.

4. On suppose que $M_0M_1\cdots M_n$ est régulier.
   a. Soit r une rotation telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $M_{k+1} = r(M_k)$. Montrer que r possède nécessairement O pour centre.
   b. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{n-k} z_k = nz_0$.
5. Inversement, prouver que si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{n-k} z_k = nz_0$, alors $M_0M_1\cdots M_{n-1}$ est régulier. *On pourra commencer par utiliser l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.*

▸ Problème : résolution des équations polynomiales de degré 3 par la méthode de Cardan.

Le but de cet exercice est de présenter la méthode de Cardan (Jérôme Cardan : 1501–1576) pour la résolution des équations polynomiales de degré 3.
Cette méthode serait en fait due à Niccolò Tartaglia (1499–1557), qui l'avait apprise à Cardan contre la promesse de garder cette méthode secrète, promesse qui ne fut pas tenue.
Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
La forme algébrique de j ne vous sera d'aucune utilité avant la question 4.

Partie I. Méthode de Cardan dans un cas particulier.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'équation (E) : $z^3 + pz + q = 0$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$, et où p, q sont deux complexes fixés, avec $p \neq 0$ (ce cas ayant déjà été traité en cours : les solutions de $z^3 + q = 0$ sont les racines cubiques de $-q$).

On note alors $\Delta = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$, et on note δ une racine carrée de Δ.

1. Soient $(u, v) \in \mathbf{C}^2$. Montrer que $u + v$ est solution de (E) si et seulement si $u^3 + v^3 + (p + 3uv)(u + v) + q = 0$.
2. Soit z_0 une solution de (E).
   a. Justifier qu'il existe $(u, v) \in \mathbf{C}^2$ tels que $\begin{cases} u + v = z_0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$.

   Dans toute la suite de la question, u et v sont fixés, et tels que $\begin{cases} u + v = z_0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$.

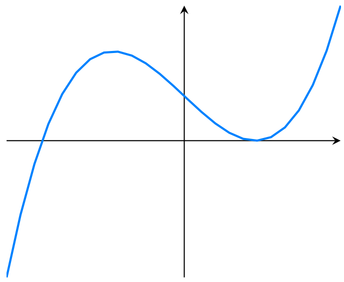
   b. En considérant $u^3 + v^3$ et u^3v^3, montrer que $\{u^3, v^3\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$. Exprimer alors les solutions de cette équation à l'aide de q et δ.
   c. Soit u_0 une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ et v_0 une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$.
   Quelles sont les autres racines cubiques de $\frac{-q-\delta}{2}$?
   Montrer que quitte à remplacer v_0 par une autre racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$, on peut faire l'hypothèse que $u_0v_0 = -\frac{p}{3}$.
   d. On suppose que u_0 (respectivement v_0) est une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ (resp. de $\frac{-q-\delta}{2}$) telles que $3u_0v_0 + p = 0$. Montrer que l'ensemble
   $$\left\{(a, b) \in \mathbf{C}^2 \,\middle|\, a^3 = \frac{-q+\delta}{2} \text{ et } b^3 = \frac{-q-\delta}{2} \text{ et } 3ab + p = 0\right\}$$
   contient au plus trois éléments, que l'on exprimera en fonction de u_0 et v_0.
   e. En déduire que $z_0 \in \{u_0 + v_0, u_0 j + v_0 j^2, u_0 j^2 + v_0 j\}$.
3. Inversement, et **sans faire de nouveaux calculs**, prouver que si u_0 est une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ et que v_0 est une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$ telles que $3u_0v_0 + p = 0$, alors $u_0 + v_0$, $u_0 j + v_0 j^2$ et $u_0 j^2 + v_0 j$ sont solutions de (E).
4. Mettre en œuvre la méthode précédente pour résoudre $z^3 - 6iz - 1 + 8i = 0$, d'inconnue $z \in \mathbf{C}$.
5. Résoudre l'équation $z^3 - 15z - 4 = 0$. *On pourra commencer par remarquer que $(2 + i)^3 = 2 + 11i$.*

Partie II. Résolution de l'équation générale

Soit $(E) : z^3 + az^2 + bz + c = 0$ une équation polynomiale de degré 3, avec a, b, c, d complexes.

6. Prouver qu'à l'aide d'un changement de variable de la forme $z = x + \lambda$, où λ est un complexe bien choisi, on peut se ramener à une équation de la forme $z^3 + pz + q = 0$.
7. Déterminer alors les solutions de $z^3 - (6 + 3i)z^2 + (9 + 6i)z + 9i - 9 = 0$.

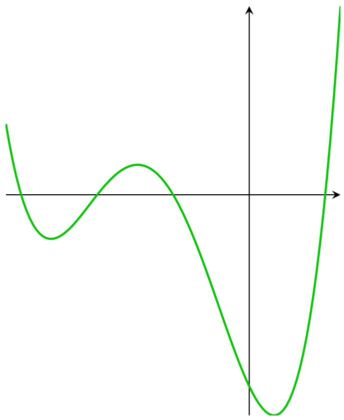
Partie III. Le cas réel



Dans cette partie, on suppose que p et q sont deux réels, et on note $(E) : z^3 + pz + q = 0$, et on reprend les notations de la partie I.

8. Prouver que si $\Delta < 0$, alors les racines cubiques de $\frac{-q-\delta}{2}$ sont les conjugués des racines cubiques de $\frac{-q+\delta}{2}$.
9. En déduire que (E) possède trois solutions réelles distinctes si $\Delta < 0$, et une seule solution réelle si $\Delta > 0$.

Partie IV. La méthode de Ferrari pour les équations de degré 4.



Cette partie est facultative et expose la méthode de Ludovico Ferrari (1522–1565 : élève de Cardan) pour résoudre les équations de degré 4 si l'on sait résoudre les équations de degré 3.

Dans cette partie, on considère a, b, c, d quatre complexes, et on s'intéresse à l'équation :

$$(E_4) : z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0, \text{ d'inconnue } z \in \mathbf{C}.$$

10. En vous inspirant de la question 6, prouver qu'on peut se ramener à la résolution d'une équation de la forme $(E'_4) : z^4 + pz^2 + qz + r = 0$, avec $(p, q, r) \in \mathbf{C}^3$.
11. Comment résoudre (E'_4) dans le cas où $q = 0$? Combien de solutions obtient-on alors au maximum ?

Dans la suite, on suppose donc $q \neq 0$.

12. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $z^4 + pz^2 + qz + r = (z^2 + \lambda)^2 - \left[(2\lambda - p)z^2 - qz + \lambda^2 - r\right]$.
13. Soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \left\{\frac{p}{2}\right\}$. Prouver qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{C}^2$ tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $(2\lambda - p)z^2 - qz + \lambda^2 - r = (\alpha z + \beta)^2$ si et seulement si λ est solution de l'équation (de degré 3) (E'_3) : $8z^3 - 4pz^2 - 8rz + 4rp - q^2 = 0$.
    Cette équation est appelée la cubique résolvante de (E_4).
14. Justifier que (E'_3) possède au moins une solution. Soit λ_0 une solution de (E'_3), et soient α, β comme dans la question précédente.
    En utilisant une identité remarquable, expliquer comment trouver les solutions de (E_4). *On ne demande pas de formule explicite pour ces solutions.*
    On justifiera notamment qu'il existe au plus 4 solutions.
15. Résoudre l'équation : $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4 = 0$.
    On pourra chercher une racine évidente de la cubique résolvante plutôt que d'appliquer la méthode de Cardan.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 7

▸ Exercice 1 : transformation de Joukovsky

1. Soit $z \in \mathbf{C}^*$. Alors

$$f(z) = \frac{3-i}{2} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{3-i}{2} \Leftrightarrow z^2 - \frac{3-i}{2}z + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = \left(\frac{3-i}{2}\right)^2 - 4 = \frac{8-6i}{4} - 4 = \frac{-8-6i}{4}$.

Plutôt que de chercher les racines carrées de Δ, cherchons celles de $-8-6i$, il suffira de les diviser par 2.
Soit $\delta = a + ib$ une racine carrée de $-8-6i$, avec $a, b \in \mathbf{R}$.
Alors $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, si bien que $a^2 - b^2 = -8$ et $2ab = -6$.
Par ailleurs, $|\delta|^2 = |-8-6i| = 10$, et donc $a^2 + b^2 = 10$.
Alors $2a^2 = 2$, si bien que $a = \pm 1$, et puisque $2ab = -6$, $\delta = 1 - 3i$ ou $\delta = -1 + 3i$.
Vérifions : on a bien $(1-3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$.
Donc une racine carrée de Δ est $\dfrac{1-3i}{2}$, si bien que les deux solutions de $z^2 - \frac{3-i}{2}z + 1 = 0$ sont

$$\frac{\frac{3-i}{2} + \frac{1-3i}{2}}{2} = \frac{4-4i}{4} = 1 - i \text{ et } \frac{\frac{3-i}{2} - \frac{1-3i}{2}}{2} = \frac{2+2i}{4} = \frac{1+i}{2}.$$

Remarque
Cette vérification, si elle n'est pas superflue, n'est pas indispensable. En effet, nous savons que $-8-6i$ étant non nul il possède exactement deux racines carrées, et nous venons de dire que celles-ci ne peuvent être que $1-3i$ et son opposé. Ce sont donc nécessairement les deux racines carrées de $-8-6i$.

2.a. Rappelons que l'image de f est l'ensemble des éléments de $\mathbf{C}$ (l'espace d'arrivée) qui ont au moins un antécédent par f.
Soit donc $a \in \mathbf{C}$. Alors $a \in \operatorname{Im} f$ si et seulement si il existe $z \in \mathbf{C}^*$ tel que $f(z) = a$.
Donc si et seulement si l'équation $z + \frac{1}{z} = a$ possède au moins une solution dans $\mathbf{C}^*$.
Mais $z + \frac{1}{z} = a$ si et seulement si $z^2 - az + 1 = 0$.
Cette équation possède toujours au moins une solution dans $\mathbf{C}$, et puisque 0 n'en est jamais solution, elle possède toujours au moins une solution dans $\mathbf{C}^*$.
Et donc $\operatorname{Im} f = \mathbf{C}$.

2.b. Soit $a \in \mathbf{C}$. Alors les antécédents de a par f sont les solutions de $z^2 - az + 1 = 0$. Cette équation possède un discriminant égal à $a^2 - 4$.
Si $a \neq \pm 2$, alors le discriminant est non nul, et donc l'équation possède deux solutions distinctes, si bien que a possède deux antécédents par f.
Si $a = \pm 2$, alors le discriminant est nul, et donc l'équation possède une unique solution[1], si bien que a possède un unique antécédent par f.

[1] Dont on a déjà dit qu'elle ne pouvait pas être nulle, et donc est bien dans $\mathbf{C}^*$.

3. Soit $z \in \mathbf{U}$. Alors on sait que $\frac{1}{z} = \overline{z}$, et donc $f(z) = z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$. Ce qui prouve déjà que $f(z)$ est un réel.
Par ailleurs, $|f(z)| = 2|\operatorname{Re}(z)| \leqslant 2|z| \leqslant 2$, et donc $f(z) \in [-2, 2]$.
Ainsi, on a l'inclusion $\{f(z), z \in \mathbf{U}\} \subset [-2, 2]$.

Inversement, si $x \in [-2, 2]$, alors il existe un complexe $z \in \mathbf{U}$ tel que $2\operatorname{Re}(z) = x$, soit encore $\operatorname{Re}(z) = \frac{x}{2}$.
En effet, on peut par exemple prendre $z = \frac{x}{2} + i\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$.
Et alors pour un tel z, on a $f(z) = 2\operatorname{Re}(z) = 2\frac{x}{2} = x$.
Ceci prouve donc que $[-2, 2] \subset \{f(z), z \in \mathbf{U}\}$, et donc par double inclusion, on a bien l'égalité annoncée.

▸ Exercice 2 : autour des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité

Partie I. Calcul de sommes

1.a. On a $S_r = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbf{U}_n} \omega^r = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\zeta^k\right)^r = \sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{kr} = \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta^r)^k$.

1.b. La formule précédente fait apparaître la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison ζ^r.
Il nous faut tout de même chercher à quelle condition cette raison vaut 1.
Or

$$\zeta^r = e^{\frac{2i\pi r}{n}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi r}{n} \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow \frac{r}{n} \equiv 0 \quad [1] \Leftrightarrow r \equiv 0 \quad [n].$$

▸ Donc si n divise r, $\zeta^r = 1$, et donc $S_r = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$.

▸ Et si n ne divise pas r, alors $\zeta^r \neq 1$, si bien que

$$S_r = \sum_{k=0}^{n-1} (\zeta^r)^k = \frac{1-(\zeta^r)^n}{1-\zeta^r} = \frac{1-(\zeta^n)^r}{1-\zeta} = 0.$$

2.a. On a donc $T = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$.
Mais pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$\frac{1}{1-e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right)} = \frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}}}{-2\sin\frac{k\pi}{n}} = \left(\cos\frac{k\pi}{n} - i\sin\frac{k\pi}{n}\right)\frac{1}{-2i\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} + \frac{i}{2}\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{1}{2}+\frac{i}{2}\mathrm{cotan}\frac{k\pi}{n}.$$

Et donc

$$T = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = \frac{n-1}{2} + \frac{i}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

2.b. En utilisant le changement d'indice $\ell = n-k$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{cotan}\left(k\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1}\mathrm{cotan}\left((n-\ell)\frac{\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1}\mathrm{cotan}\left(\pi - \frac{\ell\pi}{n}\right).$$

Mais pour tout $x \in]0, \pi[$, on a

$$\mathrm{cotan}\,(\pi - x) = \frac{\cos(\pi-x)}{\sin(\pi-x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} = \mathrm{cotan}(x).$$

Et donc

$$\sum_{\ell=1}^{n-1}\mathrm{cotan}\left(\pi - \frac{\ell\pi}{n}\right) = -\sum_{\ell=1}^{n-1}\mathrm{cotan}\left(\frac{\ell\pi}{n}\right).$$

Et donc $\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = -\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, si bien que $\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 0$, et donc $T = \frac{n-1}{2}$.

3.a. Soit $z \in \mathbf{C}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\zeta^k + z\right)^n &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\zeta^{k\ell}z^{n-\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}z^{n-\ell}\sum_{k=1}^{n}\zeta^{k\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}z^{n-\ell}S_\ell \\ &= \binom{n}{0}z^n n + \binom{n}{n}z^0 n \\ &= n(z^n+1).\end{aligned}$$

Permutation des deux symboles $\sum$.

Détails
S_ℓ est nul, à moins que n ne divise ℓ. Ce qui ne se produit que pour $\ell = 0$ et $\ell = n$.

3.b. Pour $z = 1$, il vient donc

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\zeta^k + 1\right)^n = 2n.$$

Mais pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\zeta^k + 1 = 1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, et une factorisation par l'angle moitié nous donne

$$\zeta^k + 1 = e^{i\frac{k\pi}{n}} 2\cos\frac{k\pi}{n}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\zeta^k+1\right)^n = \sum_{k=1}^{n} e^{i\frac{k\pi}{n}} 2^n \cos^n\frac{k\pi}{n} = 2^n\sum_{k=1}^{n}\left(e^{i\pi}\right)^k \cos^n\frac{k\pi}{n} = 2^n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos^n\frac{k\pi}{n} = 2^n C.$$

Et donc $C = \frac{n}{2^{n-1}}$.
Pour $z = -1$, la question précédente nous donne

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\zeta^k - 1\right)^n = n\left((-1)^n + 1\right).$$

Mais toujours à l'aide d'une factorisation par l'angle moitié,

$$\zeta^k - 1 = e^{i\frac{k\pi}{n}} 2i\sin\frac{k\pi}{n}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\zeta^k-1\right)^n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\pi}(2i)^n\sin^n\frac{k\pi}{n} = 2^n i^n S.$$

On en déduit donc que $S = n\dfrac{(-1)^n+1}{2^n i^n}$.
On notera que lorsque que n est impair, le numérateur est nul, donc $S = 0$.
Et lorsque n est pair, $(-1)^n + 1 = 2$, et $i^n = (-1)^{n/2}$, si bien que

$$S = (-1)^{n/2}\frac{n}{2^{n-1}}.$$

Partie II. Une caractérisation des polygones réguliers centrés en l'origine

4.a. Notons Ω le centre de la rotation r.
On doit donc avoir, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\Omega M_k = \Omega M_{k+1}$, et donc Ω est sur la médiatrice de $[Mk, M_{k+1}]$.
En particulier, Ω est à la fois sur la médiatrice de $[M_0M_1]$ et sur celle de $[M_1M_2]$.
Or ces deux médiatrices ne sont par parallèles, puisque M_0, M_1 et M_2 ne sont pas alignés, donc s'intersectent en un unique point.
Mais O est équidistant de M_0, M_1 et M_2, et donc est l'unique point de concours des deux médiatrices susmentionnées. Et donc est égal à Ω.

4.b. L'expression complexe de r est donc $r : z \mapsto e^{\frac{2i\pi}{n}} z = \zeta z$.
On alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_{k+1} = \zeta z_k$.
On en déduit donc que $z_2 = \zeta z_1 = \zeta\zeta z_0 = \zeta^2 z_0$, et une récurrence rapide nous permet de prouver que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z_k = \zeta^k z_0$.
Et donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{n-k}z_k = \sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{n-k}\zeta^k z_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\zeta^n z_0 = \sum_{k=0}^{n-1} z_0 = nz_0.$$

5. On a donc

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{n-k}z_k\right| = |nz_0| = n|z_0|.$$

Mais par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\zeta^{n-k}z_k\right| = \sum_{k=0}^{n-1}|z_k| = \sum_{k=0}^{n-1}|z_0| = n|z_0|.$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire, si bien que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbf{R}_+$ tel que $\zeta^{n-k}z_k = \lambda_k z_0$.
Et alors $|\zeta^{n-k}z_k| = |\lambda_k z_0| = \lambda_k|z_0|$.
Or, $|\zeta^{n-k}z_k| = |z_k| = |z_0|$, et donc $\lambda_k = 1$.

Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\zeta^{n-k} z_k = z_0$, si bien que $z_k = \zeta^{k-n} z_0 = \zeta^k z_0$.

Si on note $r : z \mapsto \zeta z$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$, on a donc pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$z_{k+1} = \zeta^{k+1} z_0 = \zeta \zeta^k z_0 = \zeta z_k = r(z_k).$$

Et donc $M_{k+1} = r(M_k)$. Puisque de plus, $r(z_{n-1}) = \zeta\zeta^{n-1} z_0 = \zeta^n z_0 = z_0$, on a aussi $r(M_n) = M_0$, et donc $M_0 M_1 \cdots M_n$ est un polygone régulier.

▸ Problème : méthode de Cardan

Partie I. Méthode de Cardan dans un cas particulier

1. On a $(u+v)^3+p(u+v)+q = u^3+v^3+3u^2+3uv^2+uv+p(u+v)+q = u^3+v^3+(p+3uv)(u+v)+q$. Et donc le membre de gauche est nul (c'est-à-dire $u+v$ est solution de (E)) si et seulement si le membre de droite est nul.

2.a. Le système $\begin{cases} u+v = z_0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = z_0 \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$ possède toujours une solution[2] qui est un couple formé des deux racines[3] de $z^2 - z_0 z - \frac{p}{3} = 0$.
Donc il existe bien (u, v) vérifiant les conditions requises.

[2] Et généralement deux.

[3] Éventuellement confondues.

2.b. Si $p + 3uv = 0$, alors $u^3 v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}$.
Mais par la question 1, $u^3 + v^3 + \underbrace{(3p + uv)}_{=0}(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 = -q$.

Il est alors classique que u^3 et v^3 sont les solutions de $\boxed{z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.}$

Rappel
Deux complexes u et v satisfont $\begin{cases} u+v = s \\ uv = p \end{cases}$ si et seulement si $\{u, v\}$ est l'ensemble des solutions de $z^2 - sz + p = 0$.

Cette équation possède $q^2 + \frac{4p^3}{27} = \Delta$ comme discriminant, et δ étant une racine carrée de Δ, $\boxed{\text{ses solutions sont } \frac{-q-\delta}{2} \text{ et } \frac{-q+\delta}{2}.}$

2.c. Rappelons que si on dispose d'une racine $n^{\text{ème}}$ z_0 d'un complexe a, alors les autres racines $n^{\text{èmes}}$ de a sont les $z_0 \omega$, $\omega \in \mathbf{U}_n$.
Or ici, $n = 3$, donc $\mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.
Et donc $\boxed{\text{les autres racines cubiques de } \frac{-q-\delta}{2} \text{ sont } jv_0 \text{ et } j^2 v_0.}$
De plus, par hypothèse, $u_0^3 v_0^3 = -\frac{p^3}{27}$, de sorte que $u_0 v_0$ est une racine cubique de $-\frac{p^3}{27}$.
L'une de ces racines est évidemment $-\frac{p}{3}$, et les autres sont donc $-\frac{p}{3} j$ et $-\frac{p}{3} j^2$.

Dans le cas où $u_0 v_0 = -\frac{p}{3} j$, alors on a $u_0 \left(v_0 j^2\right) = -\frac{p}{3} j^3 = -\frac{p}{3}$. Donc il est possible de remplacer v_0 par $v_0 j^2$.
Et si $u_0 v_0 = -\frac{p}{3} j^2$, alors $u_0 v_0 j = -\frac{p}{3} j^3 = -\frac{p}{3}$.
Donc dans tous les cas, quitte à remplacer v_0 par une autre racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$, on peut bien faire l'hypothèse que $uv = -\frac{p}{3}$.

2.d. Si $(a, b) \in \mathbf{C}^2$ est un couple de complexes tels que $a^3 = \frac{-q+\delta}{2}$ et $b^3 = \frac{-q-\delta}{2}$ et $3ab + p = 0$, alors $a \in \{u_0, u_0 j, u_0 j^2\}$ et $b \in \{v_0, v_0 j, v_0 j^2\}$.
Donc (a, b) est l'un des neuf[4] couples suivants :

$$(u_0, v_0), (u_0, v_0 j), (u_0, v_0 j^2), (u_0 j, v_0), (u_0 j, v_0 j), (u_0 j^2, v_0), (u_0 j^2, v_0 j), (u_0 j^2, v_0 j^2).$$

[4] Il s'agit de tous les couples formés d'une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ et d'une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$.

Nous savons déjà que, par hypothèse, $3u_0 v_0 + p = 0$.
Donc $u_0(v_0 j) = -\frac{p}{3} j \neq -\frac{p}{3}$. Et de même, $u_0(v_0 j^2)$, $(u_0 j)(v_0 j)$, $(u_0 j)v_0$, $(u_0 j^2 v_0)$ et $(u_0 j^2)(v_0 j^2)$ sont tous différents de $-\frac{p}{3}$.
En revanche, $(u_0 j)(v_0 j^2) = (u_0 j^2)(v_0 j) = u_0 v_0 j^3 = u_0 v_0 = -\frac{p}{3}$.
Donc il y a en tout **au plus** (il y en a strictement moins si $\Delta = 0$) trois couples (a, b) satisfaisant les conditions demandées.

Plus élégant
Les couples qui conviennent sont les
$\left(u_0 j^k, v_0 \overline{j}^k\right), 0 \leqslant k \leqslant 2.$

2.e. Nous savons par ce qui précède que $\{u^3, v^3\} = \left\{\frac{-q+\delta}{2}, \frac{-q-\delta}{2}\right\}$.
Quitte à échanger[5] u et v, on peut supposer que $u^3 = \frac{-q+\delta}{2}$ et $v^3 = \frac{-q-\delta}{2}$.

[5] Ce qui ne change pas la valeur de $u+v$.

Et donc (u, v) est l'un des trois couples précédemment obtenus.
Mais puisque z_0 est la somme des éléments d'un tel couple, on en déduit que nécessairement,
$\boxed{z_0 \in \left\{u_0 + v_0, u_0 j + v_0 j^2, u_0 j^2 + v_0 j\right\}}$.

3. Soit donc $k \in [\![0, 2]\!]$, prouvons que $u_0 j^k + v_0 \overline{j}^k$ est solution de (E).
On a alors $3u_0 j^k v_0 \overline{j}^k + p = 3u_0 v_0 + p = 0$.
Et $\left(uj^k\right)^3 = u_0^3 j^{3k} = u_0^3 = \frac{-q+\delta}{2}$, et de même $\left(v_0 \overline{j}^k\right)^3 = \frac{-q-\delta}{2}$.
Donc $\left(u_0 j^k\right)^3 + \left(v_0 \overline{j}^k\right)^3 = -q$, de sorte qu'en reprenant l'équivalence de la question 1 , $u_0 j^k + v_0 \overline{j}^k$ est bien solution de (E).

4. On a donc $\Delta = (-1 + 8i)^2 + 32i = 1 - 16i - 64 + 32i = -63 + 16i$.
On a alors $|\Delta| = \sqrt{16^2 + 63^2} = 65$.
Cherchons alors une racine carrée de Δ sous la forme $\delta = a + ib$.
Le système usuel s'écrit : $\begin{cases} a^2 - b^2 = -63 \\ 2ab = 16 \\ a^2 + b^2 = 65 \end{cases}$ qui nous conduit à $\delta = \pm(1 + 8i)$.
Prenons dans la suite $\delta = 1 + 8i$.
Alors, avec les notations des questions précédentes, $\frac{-q+\delta}{2} = \frac{1-8i+1+8i}{2} = 1$ et $\frac{-q-\delta}{2} = \frac{1-8i-1-8i}{2} = -8i$.
Une racine cubique de 1 est 1, et une racine cubique de $-8i$ est $2i$.
Et on a alors $1 \times 2i = -\frac{-6i}{3} = -\frac{p}{3}$.
Donc on peut prendre $u_0 = 1$ et $v_0 = 2i$, de sorte que les solutions de l'équation $z^3 - 6iz - 1 + 8i$ sont $\boxed{1 + 2i}$ et

$$j + 2ij^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{-\frac{1}{2} + \sqrt{3} + i\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$j^2 + 2ij = \boxed{-\frac{1}{2} - \sqrt{3} + i\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).}$$

5. La méthode est la même : $\Delta = 16 - 500 = -484 = -22^2$.
Donc $\frac{-q+\delta}{2} = 2 + 11i$ et $\frac{-q-\delta}{2} = 2 - 11i$.

Comme indiqué par l'énoncé, une racine cubique de $2 + 11i$ est $2 + i$, et donc une racine cubique de $2 - 11i$ est $2 - i$.
On peut alors prendre $u_0 = 2 + i$ et $v_0 = 2 - i$, pour avoir $3u_0 v_0 + p = 3|2 + i|^2 + 15 = 0$, de sorte que les solutions de l'équation sont

$$\boxed{4, (2 + i)j + (2 - i)j^2 = -2 - \sqrt{3} \text{ et } (2 + i)j^2 + (2 - i)j = \sqrt{3} - 2.}$$

Notons aussi qu'une fois trouvée la racine 4, les autres sont faciles à obtenir à l'aide en factorisant $z^3 - 15z - 4$ par $z - 4$, ce qui nous ramène à la résolution d'une équation de degré 2 (qui est $z^2 + 4z + 1 = 0$).

> **Racines cubiques**
> Rappelons que nous ne disposons pas de méthode pour trouver les racines cubiques sous forme algébrique, et que si on ne les donnait pas ici, il serait difficile de les trouver seuls.

Partie II. Résolution de l'équation générale.

6. Soit $z \in \mathbf{C}$, et posons $x = z - \lambda$, où $\lambda \in \mathbf{C}$ est un complexe fixé. On a alors $z = x + \lambda$.
Alors z est solution de (E) si et seulement si

$$(x+\lambda)^3 + a(x+\lambda)^2 + b(x+\lambda) + c = 0 \Leftrightarrow x^3 + 3\lambda x^2 + 3\lambda^2 x + \lambda^3 + ax^2 + 2ax\lambda + a\lambda^2 + bx + b\lambda + c = 0.$$

Soit si et seulement si

$$x^3 + (3\lambda + a)x^2 + (3\lambda^2 + 2a\lambda + b)x + (\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Si on choisit $\boxed{\lambda = -\frac{a}{3}}$, alors cette équation ne possède pas de terme de degré 2, et donc est bien de la forme de la partie I.

7. On applique ce qui précède, avec $\lambda = -\dfrac{-6-3i}{3} = 2+i$, alors z est solution de (E) si et seulement si $x = z-(2+i)$ vérifie

$$x^3 + \left[3(2+i)^2 - 2(6+3i) + 9 + 6i\right] x + (2+i)^3 - (6+3i)(2+i) + (9+6i)(2+i) + 9i - 9 = 0.$$

Soit après calculs, $x^3 - 6ix - 1 + 8i = 0$.
Nous retrouvons donc l'équation de la question 4, dont les racines ont déjà été déterminées.
Il s'agit donc d'ajouter $2+i$ à ces racines, si bien que les solutions de $z^3-(6+3i)z^2+(9+6i)z+9i-9=0$ sont

$$\boxed{1+2i+(2+i) = 3+3i,\ \frac{3}{2}+\sqrt{3}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \frac{3}{2}-\sqrt{3}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Partie III. Le cas réel
Notons que p et q étant réels, Δ l'est aussi.

8. Si $\Delta \leqslant 0$, alors δ est imaginaire pur, si bien que $\frac{-q+\delta}{2}$ et $\frac{-q-\delta}{2}$ ne sont pas réelles, mais sont conjuguées.

Dans ce cas, pour $z \in \mathbf{C}$, on a $z^3 = \frac{-q+\delta}{2} \Leftrightarrow \overline{z}^3 = \overline{\frac{-q+\delta}{2}} = \frac{-q-\delta}{2}$.
Donc les racines cubiques de $\frac{-q+\delta}{2}$ sont bien les conjugués des racines cubiques de $\frac{-q-\delta}{2}$.

9. Commençons par supposer $\Delta < 0$. Par ce qui précède, si u_0 est une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$, alors $v_0 = \overline{u_0}$ est une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$, et $u_0v_0 = |u_0|^2 \in \mathbf{R}$.
Or nous avons vu dans la question 2.d que les seules valeurs possibles pour le produit d'une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$ par une racine cubique de $\frac{-q-\delta}{2}$ sont $-\frac{p}{3}$, $-\frac{p}{3}j$ et $-\frac{p}{3}j^2$.
Seule la première est réelle, donc $u_0v_0 = -\frac{p}{3}$.
On en déduit que les solutions de l'équation sont

$$u_0 + \overline{u_0} = 2\operatorname{Re}(u_0),\ u_0 j + \overline{u_0}\underbrace{j^2}_{=\overline{j}} = u_0 j + \overline{u_0 j} = 2\operatorname{Re}(u_0 j) \text{ et } u_0 j^2 + \overline{u_0} j = 2\operatorname{Re}(u_0 j^2).$$

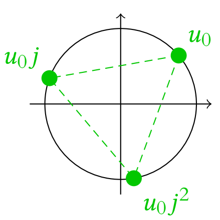
Donc déjà, ces trois solutions sont réelles, reste à voir qu'elles sont distinctes. Autrement dit, que les trois nombres $\operatorname{Re}(u_0), \operatorname{Re}(u_0 j)$ et $\operatorname{Re}(u_0 j^2)$ sont deux à deux distincts.
Prouvons que $\operatorname{Re}(u_0 j) \neq \operatorname{Re}(u_0 j^2)$, le raisonnement se transpose sans difficultés pour prouver que toutes ces racines sont deux à deux distinctes.
Notons θ l'argument principal de u_0. Alors $\theta + \frac{2\pi}{3}$ est un argument de $u_0 j$ et $\theta + \frac{4\pi}{3}$ est un argument de $u_0 j^2$..

Argument
Rappelons que l'argument d'un produit est la somme des arguments.

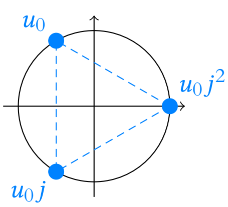
Puisque $|u_0 j| = |u_0 j^2|$, $\operatorname{Re}(u_0 j) = \operatorname{Re}(u_0 j^2)$ si et seulement si $\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$.
Soit si et seulement si

$$\theta + \frac{4\pi}{3} \equiv -\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad [2\pi] \Leftrightarrow 2\theta \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv 0 \quad [\pi].$$

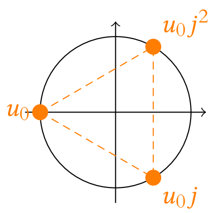
Soit si et seulement si $u_0 \in \mathbf{R}$. Or, nous avons déjà dit que $u_0^3 = \frac{-q+\delta}{2}$ n'est pas réel. Donc on a bien $\operatorname{Re}(u_0 j) \neq \operatorname{Re}(u_0 j^2)$.
Ce que nous venons (laborieusement) de prouver sur les parties réelles est en fait assez facile à comprendre graphiquement.
Il s'agit de prouver que si $z \notin \mathbf{R}$, alors les deux racines cubiques non réelles de z ont des parties réelles distinctes.
Mais ces trois racines cubiques partagent en trois parties égales un cercle de rayon $\sqrt[3]{|z|}$.



$\theta \not\equiv 0 \ [\pi/3]$



$\theta \equiv -\frac{\pi}{3} \ [2\pi]$



$\theta \equiv \pi \ [2\pi]$

Il est assez facile de se convaincre que deux de ces trois points ont même abscisse si et seulement si $\theta \equiv 0\ \left[\frac{\pi}{3}\right]$*, ce qui est le cas si et seulement* $z^3 \in \mathbf{R}$.
Bref, nous venons de prouver que pour $\Delta < 0$, les trois solutions de (E) sont réelles et deux à deux distinctes.
Si $\Delta \geqslant 0$, alors on peut prendre $\delta = \sqrt{\Delta}$. Et alors $u_0 = \sqrt[3]{\frac{-q+\delta}{2}}$ et $v_0 = \sqrt[3]{\frac{-q-\delta}{2}}$ vérifient bien

$$u_0 v_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(-q+\delta)(-q-\delta)} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(q^2-\delta^2)} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}.$$

Et donc les solutions de l'équation sont $u_0 + v_0, u_0 j + v_0 j^2, u_0 j^2 + v_0 j$.
La première est évidemment réelle.
Les deux autres sont conjuguées car $j^2 = \overline{j}$.
Elles ne seront réelles que si elles sont égales. Or en considérant sa partie imaginaire, il est facile de constater que $u_0 j + v_0 j^2 \in \mathbf{R}$ si et seulement si $u_0 = v_0$ (car les parties imaginaires de j et de j^2 sont opposées). Ceci ne se produit que lorsque $\delta = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$.
Donc pour $\Delta > 0$, il n'y a qu'une seule racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

Et pour $\Delta = 0$, il y a au plus deux racines réelles.

Au plus
Nous avons dit que les trois racines trouvées précédemment sont réelles, que les deux dernières sont égales (car conjuguées), mais il se peut encore que les trois racines soient égales. En pratique, ceci ne se produit que pour $p = q = 0$.

Partie IV. La méthode de Ferrari pour l'équation de degré 4.

10. C'est le même principe qu'à la question 6, on pose $x = z - \lambda$, et en développant $(x+\lambda)^4$, on fait apparaître un $4\lambda x^3$, qui viendra s'annuler avec le terme ax^3 (qui provient lui du développement de $a(x+\lambda)^3$) si et seulement si $\lambda = -\frac{a}{4}$.

11. Si $q = 0$, on se ramène à $z^4 + pz^2 + r = 0 \Leftrightarrow \left(z^2\right)^2 + pz^2 + q = 0$.
Un changement de variable $Z = z^2$ nous ramène à une équation du second degré dont on sait trouver les solutions (éventuellement confondues) Z_1 et Z_2.
Ne reste alors qu'à chercher les deux racines carrées de chacune de ces solutions, ce que l'on sait faire, et qui fournit donc au plus 4 solutions de (E_4').

12. C'est un simple calcul : pour $z \in \mathbf{C}$,

$$(z^2+\lambda)^2 - \left[(2\lambda - p)z^2 - qz + \cancel{\lambda^2} - r\right] = z^4 + \cancel{2\lambda z^2} + \lambda^2 - \cancel{2\lambda z^2} + pz^2 + qz - \cancel{\lambda^2} + r.$$

13. C'est assez classique : un polynôme de degré 2 est le carré d'un polynôme de degré 1 si et seulement si il est de discriminant nul.
En effet, si az^2+bz+c est de discriminant nul, alors pour tout $z \in \mathbf{C}$, $az^2+bz+c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$, et si $\mu \in \mathbf{C}$ est une racine carrée de a, alors $az^2+bz+c = \left(\mu z + \mu\frac{b}{2a}\right)^2$.
Et inversement, si il existe α, β tels que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $az^2+bz+c = (\alpha z + \beta)^2$, alors $az^2+bz+c = 0$ possède $z = -\frac{\beta}{\alpha}$ comme unique solution, et donc est de discriminant nul.
Donc ici, une telle écriture existera si et seulement si

$$(-q)^2 - 4(2\lambda - p)(\lambda^2 - r) = 0 \Leftrightarrow -8\lambda^3 + 4\lambda^2 p + 8r\lambda - 4pr + q^2 = 0.$$

Donc $\boxed{\text{si et seulement si } \lambda \text{ est solution de } 8z^3 - 4pz^2 - 8rz + 4pr - q^2 = 0.}$

14. Remarquons que la condition $\lambda \neq \frac{p}{2}$ de la question précédente n'est pas une vraie restriction : $\frac{p}{2}$ est solution de (E_3') si et seulement si

$$8\frac{p^3}{8} - 4p\frac{p^2}{4} - 8r\frac{p}{2} + 4rp - q^2 = 0 \Leftrightarrow q^2 = 0 \Leftrightarrow q = 0.$$

Or nous avons supposé $q \neq 0$ (et la preuve de la question 10 prouve que si $q = 0$, alors (E_4') possède au plus quatre solutions.

Avec les notations précédentes, la partie I prouve que (E_3') possède toujours au moins une solution[6] λ_0. On a donc, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$z^4 + pz^2 + qz + r = \left(z^2 + \lambda_0\right)^2 - (\alpha z + \beta)^2$$

[6] Et même une solution réelle dans le cas d'une équation à coefficients réels.

$$= \left(z^2+\lambda_0+\alpha z+\beta\right)\left(z^2+\lambda_0-\alpha z-\beta\right).$$

Et donc z est solution de (E_4') si et seulement si z est solution d'une des deux équations du second degré

$$z^2+\alpha z+\lambda_0+\beta=0 \textbf{ ou } z^2-\alpha z+\lambda_0-\beta=0.$$

Or nous savons résoudre ces équations, qui possèdent chacune au plus deux solutions, et donc (E_4') possède au plus 4 solutions (ce qui se produira si les deux équations ci-dessus possèdent chacune deux solutions, et que ces solutions sont toutes distinctes).

15. Commençons par appliquer la transformation de la question 10, en posant $z=x+1$. Alors z est solution de (E_4) si et seulement si

$$(x+1)^4-4(x+1)^3+6(x+1)^2-4=0 \Leftrightarrow x^4+4x^3+6x^2+4x+1-4x^3-12x^2-12x-4+6x^2+12x+6-4=0$$

Soit si et seulement si $x^4+4x-1=0$.
Nous nous trouvons donc dans le cas où $p=0, q=4, r=-1$.
La cubique résolvante est donc $8z^3+8z-16=0 \Leftrightarrow z^3+z-2=0$.
Puisque 1 est solution évidente, prenons $\lambda_0=1$.
On a alors $(2\lambda_0-p)z^2-qz+\lambda_0^2-r=2z^2-4z+2=2(z-1)^2=\left(\sqrt{2}z-\sqrt{2}\right)^2$.
Et donc la factorisation obtenue à la question 12 est

$$z^4+4z-1=\left(z^2+\sqrt{2}z-\sqrt{2}+1\right)\left(z^2-\sqrt{2}z+\sqrt{2}+1\right).$$

L'équation $z^2+\sqrt{2}z-\sqrt{2}+1=0$ a pour discriminant $\Delta_1=-2+4\sqrt{2}$, et donc pour solutions

$$z_1=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2} \text{ et } z_2=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}.$$

L'équation $z^2-\sqrt{2}z+\sqrt{2}+1=0$ a pour discriminant $\Delta_2=-2-4\sqrt{2}$ et a donc pour solutions

$$z_3=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2} \text{ et } z_4=\overline{z_3}=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_4') est :

$$\left\{\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}, \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}, \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}\right\}.$$

Et donc l'ensemble des solutions de (E_4) est :

$$\boxed{\left\{\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}+i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}-i\sqrt{4\sqrt{2}+2}}{2}\right\}}.$$

Rappel
N'oublions pas que nous avons effectué le changement de variable $z=x+1$, et donc qu'il faut ajouter 1 aux solutions de (E_4') pour obtenir celles de (E_4).