DEVOIR MAISON 6

▸ Problème : différence symétrique de deux ensembles

Soit E un ensemble. Pour tous $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on appelle **différence symétrique de** A **et** B, et on note $A\Delta B$ la partie de E définie par
$$A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}).$$

On remarquera qu'on a toujours $A\Delta B = B\Delta A$.

1. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, déterminer les ensembles : $A\Delta E$, $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta\overline{A}$.
2. Montrer que pour $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on a $A\Delta B = \{x \in E \mid (x \in A$ **et** $x \notin B)$ **ou** $(x \notin A$ **et** $x \in B)\}$.
3. Montrer que pour $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
4. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\overline{A\Delta B} = \overline{A}\Delta B = A\Delta\overline{B}$. Que dire de $\overline{A}\Delta\overline{B}$?
5. **Associativité de Δ.** Soient A, B, C trois parties de E.
   a. Montrer que $(A\Delta B)\Delta C = \left((A\Delta B) \cap \overline{C}\right) \cup \left((\overline{A}\,\Delta B) \cap C\right)$.
   b. En déduire que $(A\Delta B)\Delta C = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right) \cup (A \cap B \cap C)$.
   c. Sans nouveaux calculs, justifier alors que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

   On dit alors que la différence symétrique est associative, et on note alors $A\Delta B\Delta C$ (sans parenthèses) l'ensemble $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.
6. En effectuant le moins de calculs possibles, déterminer $A\Delta B\Delta A$, où A et B sont deux parties de E.
7. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On note alors f_A l'application $f_A : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & A\Delta B \end{array}\right.$.
   a. La proposition $\forall C \in \mathscr{P}(E), \exists B \in \mathscr{P}(E), f_A(B) = C$ est-elle vraie ? Justifier votre affirmation. *On pourra notamment utiliser le résultat de la question 6.*
   b. Montrer que f_A est injective, c'est-à-dire que $\forall (B,C) \in \mathscr{P}(E)^2$, $f_A(B) = f_A(C) \Rightarrow B = C$.
   c. Résoudre l'équation $A\Delta B = A$, d'inconnue $B \in \mathscr{P}(E)$.
8. Prouver que pour $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on a $(A\Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$.

Les questions qui suivent sont facultatives.

9. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de E. Montrer que $A_1\Delta A_2\Delta \cdots \Delta A_n$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à exactement un nombre impair des A_i.
10. Prouver que pour $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$, $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$.
11. Soit $\mathscr{F}$ une partie de $\mathscr{P}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre :
    a. $\forall (A,B) \in \mathscr{F}^2, A\Delta B \in \mathscr{F}$ et $A \cap B \in \mathscr{F}$.
    b. $\forall (A,B) \in \mathscr{F}^2, A\Delta B \in \mathscr{F}$ et $A \cup B \in \mathscr{F}$.
    c. $\forall (A,B) \in \mathscr{F}^2, A \cup B \in \mathscr{F}$ et $A \setminus B \in \mathscr{F}$.