Devoir maison 6

Vous traiterez au choix l'un des deux exercices suivants.

► Exercice 1 : résolution d'une équation polynomiale

Dans tout l'exercice, on note $P : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right) \end{array} \right.$, qui est donc une fonction polynomiale de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

On se propose de déterminer par deux méthodes différentes les racines de P, c'est-à-dire les complexes tels que $P(z) = 0$.

1. **Première méthode.**
   a. Soit $z \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$. Montrer que $P(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$.
   b. En déduire toutes les racines de P, que l'on simplifiera autant que possible à l'aide de la méthode de l'angle moitié.
2. **Seconde méthode.**
   a. Prouver que pour tout $z \in \mathbf{C}$, $P(z) = 5z^4 - 10z^2 + 1$.
   b. À l'aide de la question précédente, déterminer les racines de P. *Les expressions de ces racines ne seront pas forcément les mêmes que celles obtenues dans la première question.*
   c. Étudier les variations de la fonction cotan : $\left| \begin{array}{ccc}]0,\pi[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{array} \right.$.
   d. En combinant les résultats des deux méthodes, déterminer la valeur de $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

► Exercice 2 : puissances d'un complexe de module 1

On note :

- $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
- pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathbf{U}_n = \{z \in \mathbf{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unités
- pour $z, z' \in \mathbf{C}$, $d(z, z') := |z - z'|$ est la distance entre les points d'affixes z et z'.
- pour $z \in \mathbf{C}^*$, on note $\operatorname{Arg}(z)$ l'unique argument de z qui est dans $[0, 2\pi[$.
  Attention : $\operatorname{Arg}(z)$ n'est pas ce que nous avons appelé l'argument principal dans le cours.

Dans tout l'exercice, θ est un réel fixé de $[0, 2\pi[$, et pour $n \in \mathbf{Z}$, on note $z_n = \left(e^{i\theta}\right)^n$.
On note alors $V = \{z_n,\ n \in \mathbf{Z}\}$, l'ensemble des puissances de $e^{i\theta}$.

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Exprimer $d\left(e^{i\alpha}, e^{i\beta}\right)$ en fonction de $\dfrac{\beta - \alpha}{2}$.

Partie I. Le cas où $\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbf{Q}$

Dans cette partie, on suppose que $\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbf{Q}$. On note alors $A = \{n \in \mathbf{N}^* \mid z_n = 1\}$.

2. Montrer que $A \neq \emptyset$. On admet alors que, comme toute partie non vide de $\mathbf{N}$, A admet un plus petit élément.
   Dans la suite de cette partie, on note m le plus petit élément de A, c'est-à-dire un entier $m \in A$ tel que pour tout $n \in A$, $m \leqslant n$,

3. a. Justifier qu'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{e^{i\theta}} = z_p$. En déduire que $V = \{z_n,\ n \in \mathbf{N}\}$.
   b. Prouver que $V = \mathbf{U}_m$. *Indication : on pourra utiliser une division euclidienne par m.*
   Ceci prouve donc que V est un ensemble fini.

Partie II. Le cas où $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbf{Q}$

Dans cette partie, on suppose que $\dfrac{\theta}{\pi}$ est irrationnel.

4. Justifier que les z_n, $n \in \mathbf{Z}$ sont deux à deux distincts.

Dans toute la suite, on se donne $Z \in \mathbf{U}$ et $\varepsilon > 0$ fixés. On souhaite prouver qu'il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $d(Z, z_m) \leqslant \varepsilon$. Autrement dit, on souhaite prouver qu'il existe des points de V «aussi proches qu'on veut» de tout point de $\mathbf{U}$.

5. Prouver qu'il existe $n \in \mathbf{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $\dfrac{2\pi}{n} \leqslant \varepsilon$.
   Dans la suite, on se fixe un tel entier n. On note alors, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$,
$$A_k = \left\{ z \in \mathbf{U} \middle| \frac{2k\pi}{n} \leqslant \mathrm{Arg}(z) < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}.$$
6. Prouver que $\{A_k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$ est une partition de $\mathbf{U}$.
7. a. Montrer qu'il existe $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $p \neq q$ et $\{z_p, z_q\} \subset A_k$.
   On note alors p, q deux tels entiers, et on note $\varphi = \mathrm{Arg}(z_p)$ et $\psi = \mathrm{Arg}(z_q)$. Quitte à les échanger, on suppose de plus que $\varphi \leqslant \psi$.
   b. Montrer que $\mathrm{Arg}(z_{q-p}) \in \left]0, \frac{2\pi}{n}\right[$.
   c. On note $\alpha = \mathrm{Arg}(Z)$ et $k = \left\lfloor \dfrac{\alpha}{\psi - \varphi} \right\rfloor$.
   Montrer que $d(Z, z_{k(q-p)}) \leqslant 2 \sin \dfrac{\psi - \varphi}{2}$.
   d. Conclure.
8. A-t-on $V = \mathbf{U}$?
9. Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in [-1, 1]$, et tout $\varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbf{N}$, $|x - \cos(k\theta)| \leqslant \varepsilon$.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 6

► Exercice 1 : résolution d'une équation polynomiale

1. Première méthode.

1.a. Pour $z \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$, on a

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)^5 - (z-i)^5 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^5 = (z-i)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1.$$

1.b. Commençons par noter que $P(i) = \frac{(2i)^5}{2i} \neq 0$, et donc i n'est pas racine de P.

Soit à présent $z \in \mathbf{C} \setminus \{i\}$. Alors z est racine de P si et seulement si $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$, soit encore si et seulement si $\frac{z+i}{z-i} \in \mathbf{U}_5$.
Or $\mathbf{U}_5 = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{5}},\ 0 \leqslant k \leqslant 4\right\}$.

Donc z est racine de P si et seulement si il existe $k \in [\![0,4]\!]$ tel que $z + i = e^{i\frac{2k\pi}{5}}(z-i)$.
Pour $k = 0$, cette équation s'écrit encore $z + i = z - i$, qui n'a pas de solution.
Et pour $k \in [\![1,4]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
z + i = e^{i\frac{2k\pi}{5}}(z-i) &\Leftrightarrow z\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right) = i\left(1 + e^{i\frac{2k\pi}{5}}\right)\\
&\Leftrightarrow z = i\frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{5}}}\\
&\Leftrightarrow z = i\frac{e^{i\frac{k\pi}{5}}}{e^{i\frac{k\pi}{5}}}\frac{e^{-i\frac{k\pi}{5}} - e^{i\frac{k\pi}{5}}}{e^{-i\frac{k\pi}{5}} + e^{i\frac{k\pi}{5}}}\\
&\Leftrightarrow z = i\frac{2\cos\frac{k\pi}{5}}{2i\sin\frac{k\pi}{5}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{5}}.
\end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \left\{\frac{1}{\tan\frac{k\pi}{5}},\ k \in [\![1,4]\!]\right\}.}$

2. Seconde méthode

2.a. C'est tout simplement du binôme de Newton : pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{1}{2i}\left(z^5 + 5iz^4 + 10i^2z^3 + 10i^3z^2 + 5i^4z + i^5 - \left(z^5 - 5iz^4 + 10i^2z^3 - 10i^3z^2 + 5i^4z - i^5\right)\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(10iz^4 - 20iz^2 + 2i\right) = \boxed{5z^4 - 10z^2 + 1.}
\end{aligned}$$

2.b. Soit $z \in \mathbf{C}$, notons $Z = z^2$. Alors $P(z) = 0$ si et seulement si $5Z^2 - 10z + 1 = 0$.
Soit donc $Q : t \mapsto 5t^2 - 10t + 1$, qui est un polynôme de degré 2.
Son discriminant est $\Delta = 100 - 4 \times 5 = 80$.
Et donc les deux racines de Q sont $Z_1 = \frac{10+4\sqrt{5}}{10} = 1 + 2\frac{\sqrt{5}}{5}$ et $Z_2 = \frac{10-4\sqrt{5}}{10} = 1 - 2\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Donc $P(z) = 0 \Leftrightarrow Z = Z_1$ **ou** $Z = Z_2$.

On en déduit que $\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont } \sqrt{1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}},\ \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}} \text{ et leurs opposés.}}$

2.c. Sur $]0,\pi[$, la fonction cotan est dérivable car quotient de fonctions qui le sont, et on a alors, pour tout $x \in]0,\pi[$,

$$\operatorname{cotan}'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0.$$

Donc $\boxed{\text{cotan est strictement décroissante sur }]0,\pi[.}$

> **Remarque**
> La fonction cotan n'est pas tout à fait l'inverse de la fonction tangente, puisque celle-ci n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$, alors que cotan l'est.

2.d. Le résultat de la question 1 prouve que les 4 racines de P sont $\cot\text{an}\frac{k\pi}{5}$ pour $k \in [\![1,4]\!]$.

2.e. Donc par décroissance de cotan, $\text{cotan}\frac{\pi}{5}$ est la plus grande des racines de P.
Or avec l'expression des racines obtenue par la deuxième méthode, il est facile de constater que la plus grand d'entre elles est $\sqrt{1+2\frac{\sqrt{5}}{5}}$, si bien que $\boxed{\text{cotan}\frac{\pi}{5} = \sqrt{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}.}$

▸ Exercice 2 : puissances d'un complexe de module 1

Méthode
La factorisation par l'angle moitié permet notamment de trouver le module d'une somme ou d'une différence de nombres de la forme $e^{i\theta}$ (donc d'éléments de $\mathbf{U}$).

1. Il s'agit donc de calculer $\left|e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right|$. Mais

$$e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Et donc $\left|e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right| = 2|i|\left|\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right| = \boxed{2\left|\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\right|.}$

Partie I. Le cas où $\frac{\alpha}{\pi} \in \mathbf{Q}$.

2. Soient $(p,q) \in \mathbf{Z}\times\mathbf{N}^*$ tels que $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{p}{q}$, de sorte que $\alpha = \frac{p}{q}\pi$.
Alors $z_{2q} = e^{2iqp\pi} = 1$. Et donc $2q \in A$, si bien que $A \neq \emptyset$.

3.a. Par définition de m, on a donc $\left(e^{i\theta}\right)^m = 1$, et donc $e^{i(m-1)\theta}e^{i\theta} = 1$, si bien que $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(m-1)\theta} = z_{m-1}$.
Et donc si on note $p = m-1$, on a bien $\frac{1}{e^{i\theta}} = z_p$.

Notons $V_+ = \{z_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ et $V_- = \{z_n,\ n \in \mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}\}$, de sorte que $V = V_+ \cup V_-$.

Si k est un entier strictement négatif, alors $z_k = (e^{i\theta})^k = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-k} = \left(e^{ip\theta}\right)^{-k} = z_{-kp}$.

Et donc $V_- \subset V_+$, si bien que $V \subset V_+$. Puisqu'inversement $V_+ \subset V$, alors $V = V_+$.

3.b. Soit $z \in V$. Alors par la question précédente, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $z = z_n = e^{in\theta}$.
Et alors $z^m = e^{inm\theta} = \left(e^{im\theta}\right)^n = 1^n = 1$, si bien que $z \in \mathbf{U}_m$.
On a donc déjà $V \subset \mathbf{U}_m$.
Puisque nous savons que $\mathbf{U}_m$ contient exactement m éléments, prouvons qu'il en est de même de V, en prouvant que $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$ sont deux à deux distincts.
Supposons par l'absurde qu'il existe $p, q \in [\![0, m-1]\!]$, distincts, avec $z_p = z_q$. Quitte à les échanger, supposons que $p \leqslant q$. Alors

$$z_p = z_q \Leftrightarrow e^{ip\theta} = e^{iq\theta} \Leftrightarrow 1 = e^{i(q-p)\theta} \Leftrightarrow z_{q-p} = 1.$$

Ceci prouve donc que $q - p \in A$, puisque $q - p \leqslant m - 1 < m$, ceci contredit la minimalité de m dans A.
Ainsi, $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$ sont deux à deux distincts, si bien que V contient au plus m éléments distincts. Étant inclus dans $\mathbf{U}_m$ de cardinal m, nécessairement $V = \mathbf{U}_m$.

Partie II. Le cas où $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbf{Q}$.

4. Soient $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ tels que $z_{n_1} = z_{n_2}$. Alors $e^{in_1\alpha} = e^{in_2\alpha}$, si bien que $n_1\alpha \equiv n_2\alpha \ [2\pi]$.
Et donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $(n_1 - n_2)\alpha = 2k\pi$.
Si on avait $n_1 \neq n_2$, alors on aurait $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{2k}{n_1 - n_2} \in \mathbf{Q}$, ce qui est absurde.

Donc $n_1 = n_2$, si bien que $\boxed{\text{les } z_n \text{ sont deux à deux distincts}^1.}$

[1] Au sens où on a prouvé que $z_{n_1} = z_{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$.

5. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $\frac{2\pi}{n} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow n \geqslant \frac{2\pi}{\varepsilon}$.
Cette condition est par exemple vérifiée pour $n = \left\lfloor \frac{2\pi}{n} \right\rfloor + 2$, qui est bien supérieur ou égal à 2.

6. ▸ Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \in A_k$, si bien que $A_k \neq \emptyset$.
▸ Soit $z \in \mathbf{U}$, et soit $\alpha = \text{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$, et soit $k = \left\lfloor \frac{n\alpha}{2\pi} \right\rfloor$.

Alors $k \leqslant \dfrac{n\alpha}{2\pi} < k+1$, si bien que $\dfrac{2k\pi}{n} \leqslant \alpha < \dfrac{2(k+1)\pi}{n}$, et donc $z \in A_k$.
Et donc $\mathbf{U} \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$. L'inclusion réciproque étant évidente[2], on a donc $\mathbf{U} = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$.

[2] Puisque chacun des A_k est inclus dans $\mathbf{U}$.

► Reste donc à prouver que les A_k sont deux à deux disjoints.
Soient donc k, k' tels que $A_k \cap A_{k'} \neq \emptyset$, et soit $z \in A_k \cap A_{k'}$.
Alors $z \in A_k$, donc $\frac{2k\pi}{n} \leqslant \operatorname{Arg}(z)$, et $z \in A_{k'}$, donc $\operatorname{Arg}(z) < \frac{2(k'+1)}{n}$, si bien que $\frac{2k\pi}{n} < \frac{2(k'+1)\pi}{n}$, et donc $2k < 2k'+1$.
Puisque nous sommes en présence d'entiers, on en déduit que $2k \leqslant 2k'$ et donc $k \leqslant k'$.
En échangeant k et k', on prouve de même que $k' \leqslant k$, et donc $k = k'$.
Ainsi, $A_k \cap A_{k'} \neq \emptyset \Rightarrow A_k = A_{k'}$.

Nous avons donc bien vérifié les trois conditions définissant une partition de $\mathbf{U}$, et donc $\boxed{\{A_k,\ k \in [\![0, n-1]\!]\} \text{ est une partition de } \mathbf{U}.}$

7.a. Les $n+1$ complexes $z_0, z_1, \dots, z_n$ sont deux à deux distincts, et sont tous dans un[3] des n ensembles $A_0, \dots, A_{n-1}$.
Donc il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que A_k contienne au moins deux des entiers $z_0, \dots, z_n$.
Et donc il existe $p, q \in [\![0, n-1]\!]$ avec $p \neq q$ (et donc $z_p \neq z_q$), $z_p \in A_k$ et $z_q \in A_k$.
Soit encore $\{z_p, z_q\} \subset A_k$.

[3] Et un seul.

7.b. Notons toujours k l'unique entier de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $\{z_p, z_q\} \subset A_k$.
On a alors $z_{q-p} = e^{i\theta(q-p)} = e^{i\theta q}e^{-i\theta p} = e^{i(\psi-\varphi)}$.

Mais puisque z_p et z_q sont dans A_k, on a $\frac{2k\pi}{n} \leqslant \varphi < \frac{2(k+1)\pi}{n}$ et $\frac{2k\pi}{n} < \psi \leqslant \frac{2(k+1)\pi}{n}$.
Donc $-\frac{2\pi}{n} \leqslant \psi - \varphi \leqslant \frac{2\pi}{n}$.
Et puisque de plus $\psi - \varphi \geqslant 0$, on en déduit que $\boxed{\operatorname{Arg}(z_{q-p}) = \psi - \varphi \in \left]0, \frac{2\pi}{n}\right[}$.

7.c. Il s'agit donc de majorer $d(Z, z_{k(q-p)}) = \left|e^{i\alpha} - e^{k(\psi-\varphi)}\right|$.
Mais par la question 1, $\left|e^{i\alpha} - e^{k(\psi-\varphi)}\right| = 2\left|\sin\frac{\alpha - k(\psi-\varphi)}{2}\right|$.

Mais par définition de la partie entière, $k \leqslant \frac{\alpha}{\psi-\varphi} < k+1$ et donc $0 \leqslant \alpha - k(\psi-\varphi) < \psi - \varphi$.
Donc $0 \leqslant \frac{\alpha-k(\psi-\varphi)}{2} < \frac{\psi-\varphi}{2} < \frac{2\pi}{2n} \leqslant \frac{\pi}{2}$.
Par croissance de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a donc $0 \leqslant \sin\frac{\alpha-k(\psi-\varphi)}{2} < \sin\frac{\psi-\varphi}{2}$, et donc comme demandé,

$$\boxed{d(Z, z_{k(q-p)}) \leqslant 2\sin\frac{\psi-\varphi}{2}.}$$

7.d. Reste à noter qu'une inégalité classique[4] nous donne

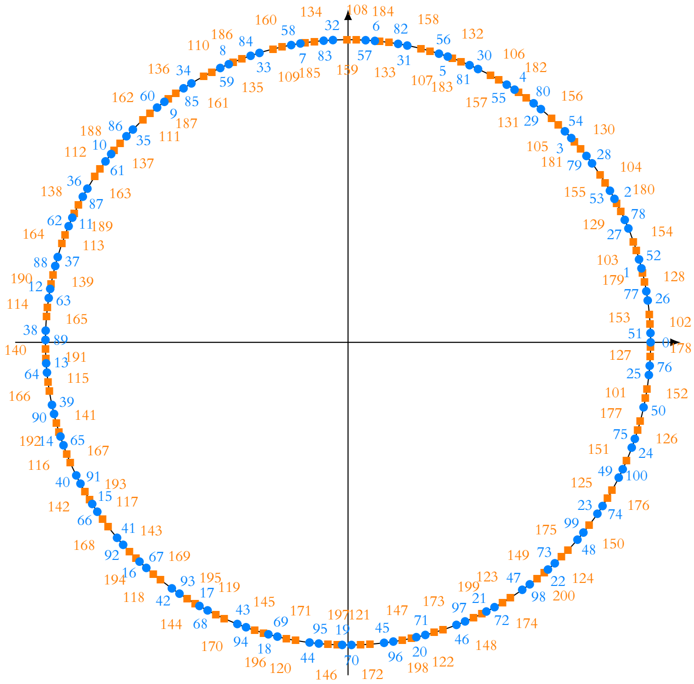
[4] $\forall x \in \mathbf{R}$, $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

$$d(Z, z_{k(q-p)}) \leqslant 2\frac{\psi-\varphi}{2} \leqslant \psi - \varphi \leqslant \frac{2\pi}{n} \leqslant \varepsilon.$$

Et donc nous avons bien prouvé l'existence d'un entier[5] m tel que $d(Z, z_m) \leqslant \varepsilon$.
Autrement dit, il existe des éléments de V aussi proche que l'on souhaite de n'importe quel nombre complexe de module 1.

[5] À savoir $m = k(q-p)$.

Par exemple, sur la figure suivante, on a placé les z_k, $1 \leqslant k \leqslant 200$ pour un certain θ vérifiant les conditions de l'énoncé.
On a alors bien l'impression que celles-ci sont proches de «remplir tout le cercle»



8. Prouvons qu'aucune racine de l'unité n'est dans V, hormis $0 = z_0$.
En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ et $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $z_n \in \mathbf{U}_p$.
Alors $z_n^p = 1$, si bien que $\theta n p \equiv 0 \ [2\pi]$, et donc $\theta \equiv 0 \ [\frac{2\pi}{np}]$.
Et donc il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $\theta = \dfrac{2k\pi}{np}$, si bien que $\dfrac{\theta}{\pi} = \dfrac{2k}{np} \in \mathbf{Q}$, contredisant notre hypothèse.
Donc V n'est pas égal à $\mathbf{U}$.

9. Soit $x \in [-1, 1]$, et soit $Z = x + i\sqrt{1 - x^2}$, qui est un nombre complexe de module 1, donc dans $\mathbf{U}$.
Soit également $\varepsilon > 0$ fixé.
Par ce qui précède, il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $|Z - z_m| \leqslant \varepsilon$, où $z_m = e^{im\theta}$.
Et alors $|x - \cos(m\theta)| = |\mathrm{Re}\,(x - z_m)| \leqslant |x - z_m| \leqslant \varepsilon$.

Si $m \in \mathbf{N}$, alors on a répondu à la question, et sinon on a $-m \in \mathbf{N}$, et $\cos(m\theta) = \cos(-m\theta)$, donc il existe bien un entier $k \in \mathbf{N}$ tel que $|x - \cos(k\theta)| \leqslant \varepsilon$.
Ceci signifie que pour tout nombre x de $[-1, 1]$ il existe des $\cos(k\theta)$ aussi proches de x que l'on veut[6].

[6] Nous dirons bientôt que $\{\cos(k\theta)\}$ est dense dans $[-1, 1]$.)