DEVOIR MAISON 5

L'exercice 1 est obligatoire. Par la suite, vous traiterez au choix l'exercice 2 ou le problème, qui est ***nettement plus difficile.***

▸ Exercice 1 : formules de Machin et Gregory

Partie I. La formule de Machin

1. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, donner une expression de $\tan(2x)$ en fonction de $\tan(x)$.
   En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$, puis justifier que $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$.
2. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$, exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$.
3. En déduire que $4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

Cette formule est connue sous le nom de formule de Machin (du nom de John MACHIN, 1680–1751).

Partie II. La formule de Gregory

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{2k+1}$.

4. Prouver que pour tout $t \in [0,1]$, $\frac{1}{1+t^2} = S_n'(t) + (-1)^{n+1}\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.
5. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $\operatorname{Arctan} x = S_n(x) + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.
6. En remarquant que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leqslant t^{2n+2}$, prouver que

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad S_{2n+1}(x) \leqslant \operatorname{Arctan}(x) \leqslant S_{2n}(x) \text{ et } |\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

7. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ **fixé**, $\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \operatorname{Arctan}(x)$. *(Formule de Gregory).*

La formule de Machin, combinée à la formule de Gregory a longtemps constitué le moyen le plus efficace de calculer des décimales de π. Le mathématicien amateur Williams SHANKS (1812–1882) y a consacré 15 ans de sa vie et a obtenu les 707 premières décimales de π (dont seulement 527 étaient correctes), ce qui a constitué un record jusqu'en 1946.

▸ Exercice 2 : barre de Scheffer

Soit E un ensemble non vide. Pour $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on pose $A \uparrow B = \{x \in E \mid x \notin A \textbf{ ou } x \notin B\}$.

1. Donner deux expressions de $A \uparrow B$ à l'aide de A et B en utilisant $\cup, \cap$ et des complémentaires.
2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Déterminer $A \uparrow A$, $A \uparrow E$ et $A \uparrow \emptyset$.
3. Soient $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Exprimer $A \cap B$ en utilisant uniquement A, B et le symbole $\uparrow$.
4. Même question pour $A \cup B$.
5. Montrer que pour toutes parties A et B de E, $A \subset B \Leftrightarrow A \uparrow (B \uparrow B) = E$.
6. Prouver que pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $(A \uparrow B = \emptyset) \Leftrightarrow (A = B = E)$.
7. Soient A et C deux parties **fixées** de E.
   On s'intéresse alors à l'équation $(\star)$: $A \uparrow B = C$, d'inconnue $B \in \mathscr{P}(E)$.
   a. Montrer que si $B \in \mathscr{P}(E)$ est une solution de $(\star)$, alors $A \cup C = E$.

b. Inversement, montrer que si $A \cup C = E$, alors $\overline{C}$ est une solution de $(\star)$.
On a ainsi prouvé que $(\star)$ possède des solutions si et seulement si $A \cup C = E$.

c. Prouver que si $A \cup C = E$, alors l'ensemble des solutions de $(\star)$ est $\left\{\overline{C} \cup D,\ D \in \mathscr{P}\left(\overline{A}\right)\right\}$.

► Problème : filtres et ultrafiltres

Soit E un ensemble non vide.
Une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(E)$ est appelée **un filtre sur** E si elle vérifie les quatre propriétés suivantes :

- $(\mathscr{P}_1)$: $\mathscr{F} \neq \emptyset$
- $(\mathscr{P}_2)$: $\forall (X,Y) \in \mathscr{F}^2, X \cap Y \in \mathscr{F}$
- $(\mathscr{P}_3)$: $\forall X \in \mathscr{F}, \forall Y \in \mathscr{P}(E), X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathscr{F}$.
- $(\mathscr{P}_4)$: $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

Vous prendrez garde au fait que $\mathscr{F}$ n'est pas une partie de E, mais un ensemble formé de parties de E (donc de sous-ensembles de E).

Partie I. Généralités, premiers exemples

1. Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que E est formé de trois éléments distincts, $E = \{a, b, c\}$.

a. Expliciter $\mathscr{P}(E)$.

b. Déterminer si les parties suivantes sont ou non des filtres sur E, en justifiant votre réponse.

i. $\mathscr{F}_1 = \emptyset$.

ii. $\mathscr{F}_2 = \{E\}$.

iii. $\mathscr{F}_3 = \mathscr{P}(E)$.

iv. $\mathscr{F}_4 = \{\{a\}, \{a, c\}\}$

v. $\mathscr{F}_5 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$

vi. $\mathscr{F}_6 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$.

c. Déterminer, en justifiant votre réponse, tous les filtres sur E.

2. **a.** L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?

b. À quelle condition sur E l'ensemble $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?

c. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E. Montrer que $E \in \mathscr{F}$.

d. Que dire d'une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(E)$ qui vérifie $(\mathscr{P}_3)$ mais pas $(\mathscr{P}_4)$?

3. Soit A une partie **non vide** de E. On note $\mathscr{F}_A = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid A \subset X\}$.

a. Montrer que $\mathscr{F}_A$ est un filtre sur E, appelé filtre principal engendré par A.
Un filtre $\mathscr{F}$ sur E est dit principal s'il existe une partie A de E, non vide, telle que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_A$.

b. Soient A et B deux parties non vides de E. Montrer que $A = B \Leftrightarrow \mathscr{F}_A = \mathscr{F}_B$.

4. **Un exemple : le filtre des voisinages de x**
Soit $x \in \mathbf{R}$. On note $\mathscr{F}^x = \{A \in \mathscr{P}(\mathbf{R}) \mid \exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A\}$.

a. Montrer que $\mathscr{F}^x$ est un filtre sur $\mathbf{R}$.

b. Prouver que $\mathscr{F}^x$ n'est pas un filtre principal.

5. **Deuxième exemple : le filtre de Fréchet**
On note $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ dont le complémentaire est un ensemble fini.

a. Montrer que $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ est un filtre sur $\mathbf{N}$.

b. Déterminer si $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ est ou non un filtre principal.

6. Si E est un ensemble fini, montrer que tout filtre sur E est un filtre principal.

Partie II. Ultrafiltres

Un filtre $\mathscr{F}$ sur E est appelé **un ultrafiltre** si pour tout filtre $\mathscr{G}$ sur E, $\mathscr{F} \subset \mathscr{G} \Rightarrow \mathscr{F} = \mathscr{G}$.

7. a. Montrer que pour toutes parties A et B non vides de E, $A \subset B \Leftrightarrow \mathscr{F}_B \subset \mathscr{F}_A$.
   b. Soit A une partie non vide de E. Montrer que $\mathscr{F}_A$ est un ultrafiltre sur E si et seulement si A est un singleton.
8. a. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$ telle que $A \notin \mathscr{F}$.
   Prouver que $\mathscr{G} = \{X \in \mathscr{P}(E) \mid A \cup X \in \mathscr{F}\}$ est un filtre sur E, qui contient $\mathscr{F}$, et tel que $\overline{A} \in \mathscr{G}$.
   b. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E. En utilisant la question précédente, prouver que $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si $\forall A \in \mathscr{P}(E), (A \in \mathscr{F}$ **ou** $\overline{A} \in \mathscr{F})$.
   c. En déduire que les filtres $\mathscr{F}^x$ et $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ de la partie I ne sont pas des ultrafiltres.

Partie III. Filtres et limites

Cette partie, encore plus dure que le reste est facultative.

Soit E un ensemble non vide, et soit $g : E \to \mathbf{R}$ une application définie sur E, à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Si $\mathscr{F}$ est un filtre sur E, on appelle image directe de $\mathscr{F}$ par g, et on note $g^{\to}(\mathscr{F})$ la partie de $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ définie par :

$$\forall X \in \mathscr{P}(\mathbf{R}),\ X \in g^{\to}(\mathscr{F}) \Leftrightarrow \{x \in E \mid g(x) \in X\} \in \mathscr{F}.$$

9. Montrer que, avec les notations ci-dessus, $g^{\to}(\mathscr{F})$ est un filtre sur $\mathbf{R}$.

Soit $b \in \mathbf{R}$. Pour $\mathscr{F}$ un filtre sur E, on note $\lim\limits_{\mathscr{F}} g = b$ lorsque $\mathscr{F}^b \subset g^{\to}(\mathscr{F})$, où $\mathscr{F}^b$ est le filtre qui a été défini à la question 4.

10. Soit A une partie non vide de E. Prouver que $\lim\limits_{\mathscr{F}_A} g = b$ si et seulement si la restriction de g à A est constante égale à b.
11. *Dans cette question, on suppose que $E = \mathbf{R}$, et que $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.*
    Soit $a \in \mathbf{R}$. Prouver que $\lim\limits_{\mathscr{F}^a} g = b$ si et seulement si
    $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbf{R},\ |x - a| < \eta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon.$$
    Cette (longue) phrase quantifiée sera bientôt nôtre définition de $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.
12. *Dans cette question, on suppose que $E = \mathbf{N}$, et qu'on dispose d'une application $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, c'est-à-dire d'une suite à valeurs réelles. Pour $n \in \mathbf{N}$, on notera donc u_n plutôt que $u(n)$.*
    Prouver que $\lim\limits_{\mathscr{F}_{\mathbf{N}}} u = b$ si et seulement si
    $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - b| < \varepsilon.$$
    Là encore, ceci sera bientôt nôtre définition de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = b$.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 5

► Exercice 1 : formules de Machin et Gregory

Partie I. La formule de Machin

1. Soit $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$. On a alors $\tan(2x) = \tan(x+x) = \frac{\tan x + \tan x}{1-\tan^2 x} = \boxed{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$.

Remarque — Puisque $2x$ n'est pas congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π, la formule d'addition de la tangente s'applique bien.

En particulier, pour $x = \frac{\pi}{8}$, il vient $\tan(2x) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$.

Soit encore $1 - \tan^2\frac{\pi}{8} = 2\tan\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan^2\frac{\pi}{8} + 2\tan\frac{\pi}{8} - 1 = 0$.

Mais le polynôme t^2+2t-1, qui a pour discriminant 8 possède pour racines $\sqrt{2}-1$ et $-1-\sqrt{2}$.

Puisque $\tan\frac{\pi}{8} \geqslant 0$, on en déduit que $\boxed{\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1.}$

Ensuite, comme $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$ est dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, De même que $-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{8}$, il vient[1]

$$-\frac{\pi}{8} \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \leqslant \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow \tan\left(-\frac{\pi}{8}\right) \leqslant \tan\left(\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right) \leqslant \tan\frac{\pi}{8} \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \leqslant \frac{1}{5} \leqslant \sqrt{2}-1.$$

[1] Par stricte croissance de la tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Il est évident que $\frac{1}{5} \geqslant 0 \geqslant 1-\sqrt{2}$ il reste donc à vérifier la seconde inégalité. Mais

$$\frac{1}{5} \leqslant \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \frac{6}{5} \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{36}{25} \leqslant 2$$

ce qui est vrai. Et donc on en déduit que $\boxed{\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[.}$

2. Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$, en appliquant deux fois la formule de la question précédente, il vient

$$\tan(4x) = \tan(2(2x)) = \frac{2\tan(2x)}{1-\tan^2(2x)} = \frac{\frac{4\tan(x)}{1-\tan^2 x}}{1-\frac{4\tan^2 x}{(1-\tan^2 x)^2}}$$

$$= \frac{4\tan x}{1-\tan^2 x}\,\frac{(1-\tan^2 x)^2}{(1-\tan^2 x)^2 - 4\tan^2 x} = \boxed{\frac{4\tan x(1-\tan^2 x)}{1-6\tan^2 x+\tan^4 x}}.$$

3. En appliquant ce qui précède à $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$, il vient donc

Remarque — Nous avons bien prouvé à la question 1 que $\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}$ est dans $\left]-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right[$.

$$\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right) = \frac{4\times\frac{1}{5}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)}{1-6\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^4} = \frac{4}{5}\frac{24}{25}\frac{1}{\frac{5^4-6\times 25+1}{5^4}} = \frac{20\times 24}{476} = \frac{20}{119}.$$

Et alors il vient

$$\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}\right) = \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\frac{1}{239}} = \frac{\frac{120\times 239-119}{119\times 239}}{\frac{119\times 239+120}{119\times 239}} = \frac{120\times 239-120+1}{119\times 239+119+1}$$

$$= \frac{120\times 238+1}{119\times 240+1} = \frac{120\times 2\times 119+1}{119\times 2\times 120+1} = 1.$$

Puisque $0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} \leqslant \frac{\pi}{8}$ et que $0 \leqslant \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}$, on en déduit que

$$-\frac{\pi}{2} < 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} < \frac{\pi}{2}.$$

⚠ Attention ! — Ne pas affirmer trop vite que $\tan(\alpha) = X \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{Arctan}(x)$, ceci n'est vrai que pour $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. C'est bien ce que nous venons de vérifier.

Et donc

$$\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}\right) = 1 \Leftrightarrow \boxed{4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239} = \operatorname{Arctan} 1 = \frac{\pi}{4}.}$$

Partie II. La formule de Gregory

4. Commençons par noter que S_n est dérivable, et que pour $t \in [0,1]$,

$$S_n'(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \sum_{k=0}^{n} \left(-t^2\right)^k = \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}.$$

Ce qui s'écrit encore $S_n'(t) = \dfrac{1}{1+t^2} - (-1)^{n+1}\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ et donc $\boxed{\dfrac{1}{1+t^2} = S_n'(t) + (-1)^{n+1}\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}.}$

Détails
Il s'agit de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $-t^2 \neq 1$.

5. Soit $x \in [0,1]$. Intégrons la relation précédente entre 0 et x :

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x S_n'(t)\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt = [S_n(t)]_0^x + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} = S_n(x) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.$$

Or, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = [\operatorname{Arctan} t]_0^x = \operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(0) = \operatorname{Arctan}(x)$.
Et donc on a bien prouvé que

$$\boxed{\operatorname{Arctan}(x) = S_n(x) + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt.}$$

6. Soit $x \in [0,1]$, et soit $n \in \mathbf{N}$.
On a alors $\displaystyle\operatorname{Arctan}(x) = S_{2n+1}(x) + (-1)^{2n+1+1}\int_0^x \frac{t^{2(2n+1)+2}}{1+t^2}\,dt = S_{2n+1}(x) + \int_0^x \frac{t^{4n+4}}{1+t^2}\,dt$.
Puisque pour tout $t \in [0,x]$, $\dfrac{t^{4n+4}}{1+t^2} \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{4n+4}}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$ et donc

$$\operatorname{Arctan}(x) - S_{2n+1}(x) = (-1)^{2n+2}\int_0^x \frac{t^{4n+4}}{1+t^2}\,dt \geqslant 0.$$

Par conséquent, $S_{2n+1}(x) \leqslant \operatorname{Arctan}(x)$.
De même, $\displaystyle S_{2n}(x) - \operatorname{Arctan}(x) = (-1)^{2n+1}\int_0^x \frac{t^{4n+2}}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$. Et donc $\operatorname{Arctan}(x) \leqslant S_{2n}(x)$.

Puisque $\displaystyle|\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)| = \left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right|$, et que cette dernière intégrale est clairement positive, il vient

$$|\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)| = \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leqslant \int_0^x t^{2n+2}\,dt \leqslant \left[\frac{t^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^x \leqslant \frac{x^{2n+3}}{2n+3}.$$

À x fixé, on a donc $0 \leqslant |\operatorname{Arctan} x - S_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$.
Et donc par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} |\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) - S_n(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \operatorname{Arctan}(x).}$$

Remarque
Cette formule est également valable pour $x = 1$, donc nous donne un moyen d'approximer $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}(1)$.
Malheureusement, $S_n(1)$ tend beaucoup trop lentement vers $\frac{\pi}{4}$ pour que cette formule soit exploitable. Par exemple, pour avoir les 8 premières décimales de π, il faut n autour de 25 millions.

▸ Exercice 2 : barre de Scheffer

1. Soit $x \in E$. Alors on a

$$x \in A \uparrow B \Leftrightarrow (x \notin A \textbf{ ou } x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A} \textbf{ ou } x \in \overline{B}) \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Ainsi, $\boxed{A \uparrow B = \overline{A} \cup \overline{B}.}$ Et donc[2] $\boxed{A \uparrow B = \overline{A \cap B}.}$

[2] Lois de De Morgan.

2. En utilisant la question précédente, $A \uparrow A = \overline{A} \cup \overline{A} = \boxed{\overline{A}.}$
De même, $A \uparrow E = \overline{A} \cup \overline{E} = \overline{A} \cup \emptyset = \boxed{\overline{A}.}$
Et enfin, $A \uparrow \emptyset = \overline{A} \cup \overline{\emptyset} = \overline{A} \cup E = \boxed{E.}$

3. En utilisant la question 1, $A \cap B = \overline{\overline{A \cap B}} = \overline{A \uparrow B}$.
Mais en utilisant la question 2, $\overline{A \uparrow B} = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$.
Et donc $\boxed{A \cap B = (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B).}$

4. De même, on a $A \cup B = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = \overline{A} \uparrow \overline{B} = \boxed{(A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B).}$

5. Soient A et B deux parties de E. Alors $B \uparrow B = \overline{B}$. Et donc $A \uparrow (B \uparrow B) = A \uparrow \overline{B} = \overline{A} \cup B$.
Il s'agit donc de prouver que $A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \cup B = E$.

Supposons que $A \subset B$. Mais $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$, si bien que

$$E = \overline{B} \cup B \subset \overline{A} \cup B.$$

L'inclusion réciproque étant évidemment vraie, on a bien $\overline{A} \cup B = E$, si bien qu'on a prouvé la première implication : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \cup B = E$.

> **Alternative**
> On peut également prouver que tout élément x de E est dans $\overline{A} \cup B$.
> C'est assez simple : soit x est dans B, soit il n'est pas dans B, auquel cas il ne peut pas être dans A, donc est dans $\overline{A}$.

Inversement, supposons que $\overline{A} \cup B = E$. Alors en passant aux complémentaires, on a $A \cap \overline{B} = \emptyset$.
Et donc $A \subset \overline{\overline{B}} = B$.
Alternative : voici une autre option (parmi d'autres, notamment celle revenant à la définition et prouvant que $x \in A \Rightarrow x \in B$).
Si $\overline{A} \cup B = E$, alors $\left(\overline{A} \cup B\right) \cap A = E \cap A = A$.
Mais en distribuant, $(\overline{A} \cap A) \cup (B \cap A) = A \Leftrightarrow B \cap A = A$.
Et donc $A \subset A \cap B \subset B$.

> **Astuce**
> On a utilisé ici un fait plutôt intuitif, qui n'a pas forcément été énoncé en cours : un ensemble A est disjoint de B si et seulement si $A \subset \overline{B}$.

Par double implication, nous avons donc prouvé que $\boxed{A \subset B \Leftrightarrow A \uparrow (B \uparrow B) = E.}$

6. Soient A et B deux parties de E.
Il est assez évident que si $A = B = E$, alors $A \uparrow B = E \uparrow E = \overline{E \cap E} = \emptyset$.

Inversement, supposons que $A \uparrow B = \emptyset$.
Alors $\overline{A \cap B} = \emptyset$, si bien que $A \cap B = \overline{\emptyset} = E$.
Et donc $E = A \cap B \subset A$. Puisque A est par hypothèse une partie de E, l'inclusion $A \subset E$ est vraie, et donc par double inclusion, $A = E$.
On prouve sur le même principe que $B = E$, et donc que $A \uparrow B = \emptyset \Rightarrow A = B = E$.
Et donc on a bien :

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ ((A \uparrow B = \emptyset) \Leftrightarrow (A = B = E))\,.}$$

7.a. On a, pour $B \in \mathscr{P}(E)$, $A \uparrow B = C \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = C \Leftrightarrow \overline{A \cap B} = C \Leftrightarrow A \cap B = \overline{C}$.
Donc si l'équation possède une solution $B \in \mathscr{P}(E)$, alors $\overline{C} = A \cap B \subset A$.
Et donc $E = C \cup \overline{C} \subset C \cup A$, si bien que [3] $A \cup C = E$.
Ceci prouve donc que si l'équation admet des solutions, alors $A \cup C = E$.

[3] L'inclusion $A \cup C \subset E$ est évidente.

7.b. Et inversement, si $A \cup C = E$, alors $A \uparrow \overline{C} = \overline{A} \cup C$.
Mais puisque $A \cup C = E$, alors $\overline{A} \subset C$.
En effet, si $x \in \overline{A}$, alors $x \notin A$, mais $x \in E = A \cup C$, donc $x \in C$.
Et donc $\overline{A} \cup C = C$, si bien que $\overline{C}$ est une solution de $A \uparrow B = C$.
Nous avons donc prouvé[4] que l'équation $A \uparrow B = C$ possède des solutions si et seulement si $A \cup C = E$.

[4] L'une des implications est prouvée par 7.a, l'autre par 7.b.

7.c. À présent, supposons que $A \cup C = E$ (ce qui, comme nous venons de le remarquer, implique que $\overline{A} \subset C$).
Soit $B \in \mathscr{P}(E)$ une solution de l'équation, c'est-à-dire une partie de E telle que $A \uparrow B = C$, soit encore $A \cap B = \overline{C}$. Alors d'une part, $\overline{C} = A \cap B$ est inclus dans B.
D'autre part, si on note $D = B \setminus \overline{C} = B \cap \overline{\overline{C}} = B \cap C$, alors $B = (B \cap \overline{C}) \cup (B \cap C) = \overline{C} \cup D$.
Mais puisque $\overline{A} \cup \overline{B} = C$, $B \cap C = \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap B = \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \underbrace{\left(B \cap \overline{B}\right)}_{=\emptyset} = \overline{A} \cap B \subset \overline{A}$.

> **Détails**
> On a utilisé ici le fait que $B \cap \overline{C} = \overline{C}$, ce qui tient au fait que $\overline{C} \subset B$.

Autrement dit, nous venons de prouver que $D \subset \overline{A}$, et donc que $D \in \mathscr{P}(\overline{A})$.
Et donc on a bien prouvé que $B = \overline{C} \cup D$, avec $D \in \mathscr{P}(\overline{A})$.
Ceci prouve donc que l'ensemble des solutions de l'équation est **inclus** dans l'ensemble $\left\{\overline{C} \cup D,\ D \in \mathscr{P}\left(\overline{A}\right)\right\}$.

Inversement, si B est de la forme $B = \overline{C} \cup D$, pour $D \subset \overline{A}$, alors

$$A \cap B = A \cap \left(\overline{C} \cup D\right) = (A \cap \overline{C}) \cup \underbrace{(A \cap D)}_{=\emptyset} = A \cap \overline{C} = \overline{C},$$

la dernière égalité venant de notre hypothèse : $A \cup C = E$, qui comme nous l'avons prouvé implique $\overline{A} \subset C \Leftrightarrow \overline{C} \subset A$.
Et donc l'ensemble $\left\{\overline{C} \cup D,\ D \in \mathscr{P}\left(\overline{A}\right)\right\}$ est inclus dans l'ensemble des solutions, si bien que par double inclusion, ces deux ensembles sont égaux.

▸ Problème : filtres et ultrafiltres

Partie I. Généralités, premiers exemples

1.a. On a
$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

1.b.i. $\mathscr{F}_1$ n'est pas un filtre puisqu'il contredit la propriété $(\mathscr{P}_1)$.

1.b.ii. $\mathscr{F}_2$ est un filtre : il est non vide puisqu'il contient E.
Il ne contient pas l'ensemble vide.
Si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{F}_2$, alors $X = Y = E$, et donc $X \cap Y = E \in \mathscr{F}_2$.
Enfin, si $X \in \mathscr{F}_2$, et si $Y \in \mathscr{P}(E)$ est tel que $X \subset Y$, alors $Y = X = E$, donc $Y \in \mathscr{F}_2$.

1.b.iii. $\emptyset \in \mathscr{F}_3$, donc $\mathscr{F}_3$ n'est pas un filtre puisqu'il ne satisfait pas $(\mathscr{P}_4)$.

1.b.iv. $\mathscr{F}_4$ n'est pas un filtre, car $\{a\} \subset \{a, b\}$, mais $\{a, b\} \notin \mathscr{F}_4$, si bien que $\mathscr{F}_4$ ne satisfait pas $(\mathscr{P}_3)$.

1.b.v. On a $\{a\} \in \mathscr{F}_5$ et $\{b, c\} \in \mathscr{F}_5$.
Donc si $\mathscr{F}_5$ était un filtre, on aurait $\emptyset = \{a\} \cap \{b, c\} \in \mathscr{F}_5$, ce qui est absurde. Donc $\mathscr{F}_5$ n'est pas un filtre.

1.b.vi. $\mathscr{F}_6$ est non vide et ne contient pas l'ensemble vide.
De plus, $\mathscr{F}_6$ est formé de toutes les parties de E contenant a.
L'intersection de deux telles parties contient a, donc est dans $\mathscr{F}_6$, et si $X \in \mathscr{F}_6$ et si $Y \in \mathscr{P}(E)$ est tel $X \subset Y$, alors $a \in X \subset Y$, donc $a \in Y$, si bien que $Y \in \mathscr{F}_6$.
Donc $\mathscr{F}_6$ est bien un filtre sur E.

1.c. Il n'est pas question de faire la liste de toutes les parties de $\mathscr{P}(E)$.
Un filtre ne peut contenir deux singletons distincts, car leur intersection est vide, et qu'un filtre ne contient pas l'ensemble vide.
Si un filtre $\mathscr{F}$ contient un singleton (par exemple $\{a\}$), alors par $(\mathscr{P}_3)$ il contient toutes les parties contenant a.
De plus, il ne peut contenir de parties X ne contenant pas a, car alors $\emptyset = X \cap \{a\} \in \mathscr{F}$.
Donc un filtre contenant $\{a\}$ ne peut être que l'ensemble des parties contenant $\{a\}$.
Donc les filtres sur E contenant un singleton sont

$$\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\},\ \{\{b\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} \text{ et } \{\{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}.$$

Si un filtre $\mathscr{F}$ ne contient pas de singleton, mais contient une partie de E à deux éléments, par exemple $\{a, b\}$, alors il ne contient ni $\{b, c\}$ (car on aurait $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\} \in \mathscr{F}$), ni $\{a, c\}$. Donc il ne contient que $\{a, b\}$ et $\{a, b, c\} = E$.
Donc il y a trois tels filtres, qui sont $\{\{a, b\}, \{a, b, c\}\}, \{\{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ et $\{\{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.
Enfin, $\{\{a, b, c\}\} = \{E\}$ est un filtre sur E.

> **Remarque**
> Il en existe 256, dont 128 ne contenant pas l'ensemble vide.

> **Remarque**
> Il est important de comprendre qu'on a bien traité tous les cas : un filtre sur E ne peut contenir que des parties à $1, 2$ ou 3 éléments. On a décrit tous les filtres contenant un singleton, tous les filtres ne contenant pas de singleton et contenant une partie de E à deux éléments, ne reste donc que les parties de $\mathscr{P}(E)$ ne contenant ni singleton ni partie à 2 éléments : il n'y a qu'une telle partie, c'est $\{E\}$.

2.a. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ vérifie à la fois $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{P}_3)$, mais $\emptyset \in \mathscr{P}(E)$, donc il ne s'agit pas d'un filtre.

2.b. Prouvons que $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est un filtre sur E si et seulement si E est un singleton.
► Si $E = \{x\}$ est un singleton, alors $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\} = \{\{x\}\}$.
Donc $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est non vide, et ne contient pas l'ensemble vide.
Par ailleurs, si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, alors $X = Y = \{x\}$, et donc $X \cap Y = \{x\} \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.
Enfin, si $X \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ et si $Y \in \mathscr{P}(E)$ est tel que $X \subset Y$, alors $X = \{x\} = E$, et donc nécessairement $Y = E$.
Donc $Y \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, qui est donc bien un filtre sur E.

▶ Inversement, supposons que E n'est pas un singleton, c'est-à-dire qu'il contient au moins deux éléments distincts x et y.
Alors $\{x\} \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ et $\{y\} \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$. Or $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset \notin \mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.
Donc la propriété $(\mathscr{P}_2)$ n'est pas vérifiée par $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$, qui n'est donc pas un filtre sur E.
Ainsi, $\boxed{\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\} \text{ est un filtre si et seulement si } E \text{ est un singleton.}}$

Logique
On vient de prouver que si E n'est pas un singleton, alors $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ n'est pas un filtre. La contraposée de cette implication est : si $\mathscr{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ est un filtre, alors E est un singleton.

2.c. Puisque $\mathscr{F} \neq \emptyset$, il existe $A \in \mathscr{F}$.
Et alors $A \subset E$, si bien que par $(\mathscr{P}_3)$, $\boxed{E \in \mathscr{F}.}$

2.d. Si $\mathscr{F}$ est une partie de $\mathscr{P}(E)$ qui vérifie $(\mathscr{P}_3)$ et pas $(\mathscr{P}_4)$, alors $\emptyset \in \mathscr{F}$.
Et alors pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $\emptyset \subset X$, si bien que $X \in \mathscr{F}$.
Ainsi, $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{F}$, et donc[5] $\boxed{\mathscr{F} = \mathscr{P}(E).}$

[5] $\mathscr{F}$ est une partie de $\mathscr{P}(E)$, donc inclus dans $\mathscr{P}(E)$.

3.a. Puisque $A \subset A$, $A \in \mathscr{F}_A$, et donc $\mathscr{F}_A \neq \emptyset$.
Puisque $A \neq \emptyset$, on n'a pas $A \subset \emptyset$, et donc $\emptyset \notin \mathscr{F}_A$.
Soient $X, Y \in \mathscr{F}_A$. Alors $A \subset X$ et $A \subset Y$. Donc $A \subset X \cap Y$, si bien que $X \cap Y \in \mathscr{F}_A$.
Enfin, si $X \in \mathscr{F}_A$, et si Y est une partie de E telle que $X \subset Y$, alors $A \subset X \subset Y$ donc[6] $A \subset Y$, si bien que $Y \in \mathscr{F}_A$.
Donc $\boxed{\mathscr{F}_A \text{ est bien un filtre sur } E.}$

[6] C'est la transitivité de l'inclusion.

3.b. Si $A = B$, il est évident que $\mathscr{F}_A = \mathscr{F}_B$.
Inversement, supposons que $\mathscr{F}_A = \mathscr{F}_B$. Alors $A \in \mathscr{F}_A$, et donc $A \in \mathscr{F}_B$.
Ceci signifie donc que $B \subset A$.
On prouve de même que $B \in \mathscr{F}_A$, et donc que $A \subset B$, si bien que par double inclusion, $\boxed{A = B.}$

4. Un exemple : le filtre des voisinages de x

4.a. ▶ Puisque $]x-1, x+1[\in \mathscr{F}^x$, $\mathscr{F}^x \neq \emptyset$.
▶ Soient X_1 et X_2 deux éléments de $\mathscr{F}^x$.
Alors il existe ε_1 et ε_2 deux réels strictement positifs tels que $]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subset X_1$ et $]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset X_2$. Soit alors $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, de sorte que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[$ et $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[$.
Alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\cap]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset X_1 \cap X_2$.
Et donc $X_1 \cap X_2 \in \mathscr{F}^x$.

▶ Soit $X \in \mathscr{F}^x$, et soit $Y \in \mathscr{P}(E)$ tel que $X \subset Y$.
Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset X$. Alors[7] $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset Y$, si bien que $Y \in \mathscr{F}^x$.

[7] Par transitivité de l'inclusion.

▶ Enfin, $X \in \mathscr{F}^x$, si $\varepsilon > 0$ est tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, alors $x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset X$, et donc $x \in X$.
En particulier, $X \neq \emptyset$, et donc $\emptyset \notin \mathscr{F}^x$.
Donc tout ceci prouve bien que $\boxed{\mathscr{F}^x \text{ est un filtre sur } E.}$

4.b. Supposons par l'absurde que $\mathscr{F}^x$ soit un filtre principal, et soit $A \in \mathscr{P}(E) \neq \emptyset$ tel que $\mathscr{F}^x = \mathscr{F}_A$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $A \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.
Par conséquent, si $y \in A$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, soit encore $|x-y| < \varepsilon$.
Or il a été prouvé en TD que ceci implique $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Nous venons donc de prouver que $y \in A \Rightarrow y = x$.
Et donc $A \subset \{x\}$. Puisque $A \neq \emptyset$, alors $A = \{x\}$.
Donc **si** $\mathscr{F}^x$ est principal, **alors** c'est $\mathscr{F}_{\{x\}}$.
Or, $\{x\} \in \mathscr{F}_{\{x\}}$, alors que $\{x\} \notin \mathscr{F}^x$.
En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est infini, alors que $\{x\}$ est fini, donc on ne saurait avoir $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \{x\}$.
Donc $\mathscr{F}_{\{x\}} \neq \mathscr{F}^x$, si bien que $\boxed{\mathscr{F}^x \text{ n'est pas un filtre principal.}}$

Alternative
Nous aurions aussi pu raisonner par l'absurde en supposant $y \neq x$, et prouver que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, $y \notin]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$.

Détails
Les deux seules parties de $\{x\}$ sont $\emptyset$ et $\{x\}$.

5. Deuxième exemple : le filtre de Fréchet

5.a. $\mathbf{N}^*$ a un complémentaire de cardinal 1, donc $\mathbf{N}^* \in \mathscr{F}_{\mathbf{N}}$, si bien que $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ est non vide.

Soient X et Y deux éléments de $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$. Alors $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont des ensembles finis.
Donc $\overline{X} \cup \overline{Y}$ est également fini. Or il s'agit de $\overline{X \cap Y}$, si bien que $X \cap Y \in \mathscr{F}_{\mathbf{N}}$.

Soit $X \in \mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ et soit $Y \in \mathscr{P}(\mathbf{N})$ telle que $X \subset Y$. Alors $\overline{Y} \subset \overline{X}$. Puisque $\overline{X}$ est fini, il en est de même de $\overline{Y}$.

Fini
Pour l'instant nous nous basons sur l'intuition, même si nous donnerons plus tard une définition rigoureuse de ce qu'est un ensemble fini. Mais les deux propriétés que nous venons d'utiliser (à savoir que l'union de deux ensembles finis soit finie, et qu'une partie d'un ensemble fini est finie) resteront évidemment valables.

Et donc $Y \in \mathscr{F}_{\mathbf{N}}$.

Enfin, $\overline{\emptyset} = \mathbf{N}$, qui est infini, donc $\emptyset \notin \mathscr{F}_{\mathbf{N}}$.
Donc $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ est bien un filtre sur $\mathbf{N}$.

5.b. Soit A une partie non vide de $\mathbf{N}$, et soit $x \in A$ (et il existe un tel x car A est supposée non vide). Posons alors $X = \mathbf{N} \setminus \{x\} = \overline{\{x\}}$. Alors il est évident que X est dans $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$, et puisque $x \in A$ et $x \notin X$, $A \not\subset X$, de sorte que $X \notin \mathscr{F}_A$.
Et donc $\mathscr{F}_{\mathbf{N}} \neq \mathscr{F}_A$, et ceci étant vrai pour toute partie non vide A, $\boxed{\mathscr{F}_{\mathbf{N}} \text{ n'est pas principal.}}$

Partie II. Ultrafiltres

6.a. Supposons que $A \subset B$.
Alors pour tout $X \in \mathscr{F}_B$, on a $B \subset X$, et donc[8] $A \subset X$.
Par définition, cela signifie que $X \in \mathscr{F}_A$, et donc on a bien $\mathscr{F}_B \subset \mathscr{F}_A$.

[8] Transitivité de l'inclusion.

Inversement, supposons que $\mathscr{F}_B \subset \mathscr{F}_A$.
Alors $B \in \mathscr{F}_B$, si bien que $B \in \mathscr{F}_A$.
Et donc, par définition de $\mathscr{F}_A$, cela signifie que $A \subset B$.

Remarque
On essaie ici de procéder sans raisonnement par l'absurde, mais il est toujours possible de supposer que A contient deux éléments distincts et d'arriver à une contradiction.

6.b. Supposons que $\mathscr{F}_A$ soit un ultrafiltre et prouvons que A est un singleton.
Soient donc a et b deux éléments de A.
Alors $\{a\} \subset A$, si bien que par la question précédente, $\mathscr{F}_A \subset \mathscr{F}_{\{a\}}$.
Puisque $\mathscr{F}_A$ est un ultrafiltre, on a donc $\mathscr{F}_A = \mathscr{F}_{\{a\}}$.
Mais pour les mêmes raisons, $\mathscr{F}_A = \mathscr{F}_{\{b\}}$, et par conséquent $\mathscr{F}_{\{b\}} = \mathscr{F}_{\{a\}}$.
Par la question 3.b, on a donc $\{a\} = \{b\}$, si bien que $a = b$.
Donc deux éléments de A sont nécessairement égaux : A est un singleton.

Inversement, supposons que $A = \{a\}$ soit un singleton et prouvons que $\mathscr{F}_A$ est un ultrafiltre sur E.
Soit $\mathscr{G}$ un filtre sur E tel que $\mathscr{F}_A \subset \mathscr{G}$.
Soit $X \in \mathscr{G}$. Puisque $\{a\} \in \mathscr{F}_A$, $\{a\} \in \mathscr{G}$. Et donc $X \cap \{a\} \in \mathscr{G}$.
Or on a $X \cap \{a\} \subset \{a\}$. Puisque par ailleurs tout élément de $\mathscr{G}$ est non vide, $X \cap \{a\} \neq \emptyset$, si bien que $X \cap \{a\} = \{a\}$.
Ainsi, $A = \{a\} \subset X$, si bien que $X \in \mathscr{F}_A$.
Et donc ceci prouve que $\forall X \in \mathscr{G}, X \in \mathscr{F}_A$, soit encore $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}_A$.
Puisqu'on avait par ailleurs supposé que $\mathscr{F}_A \subset \mathscr{G}$, on a donc $\mathscr{G} = \mathscr{F}_A$.
Et donc $\mathscr{F}_A$ est bien un ultrafiltre.

Détails
Il n'existe que deux parties de $\{a\}$, qui sont $\emptyset$ et $\{a\}$.

Donc $\boxed{\mathscr{F}_A \text{ est un ultrafiltre sur } E \text{ si et seulement si } A \text{ est un singleton.}}$

7.a. ► Puisque $E \in \mathscr{F}$, $A \cup E = E \in \mathscr{F}$, si bien que $E \in \mathscr{G}$, et donc $\mathscr{G} \neq \emptyset$.
Et donc $\mathscr{G}$ vérifie $(\mathscr{P}_1)$.

► Soient $X_1, X_2 \in \mathscr{G}$. Alors $A \cup X_1 \in \mathscr{F}$ et $A \cup X_2 \in \mathscr{F}$, si bien que $A \cup (X_1 \cap X_2) = (A \cup X_1) \cap (A \cup X_2) \in \mathscr{F}$, car intersection de deux éléments de $\mathscr{F}$.
Donc $X_1 \cap X_2 \in \mathscr{G}$. Donc $\mathscr{G}$ vérifie $(\mathscr{P}_2)$.

► Soit $X \in \mathscr{G}$ et soit $Y \in \mathscr{P}(E)$ telle que $X \subset Y$.
Alors $A \cup X \subset A \cup Y$, et puisque $A \cup X \in \mathscr{F}$, alors $A \cup Y \in \mathscr{F}$.
Donc $Y \in \mathscr{G}$, si bien que $\mathscr{G}$ vérifie $(\mathscr{P}_3)$.

► Enfin, puisque $A \notin \mathscr{F}$, $A \cup \emptyset = A \notin \mathscr{F}$ et donc $\emptyset \notin \mathscr{G}$.
Donc $\mathscr{G}$ vérifie $(\mathscr{P}_4)$.

Et donc $\boxed{\mathscr{G} \text{ est bien un filtre sur } E.}$
Il contient $\mathscr{F}$ puisque pour tout $X \in \mathscr{F}$, $X \subset A \cup X$ et donc $A \cup X \in \mathscr{F}$, si bien que $X \in \mathscr{G}$.
Enfin, $A \cup \overline{A} = E \in \mathscr{F}$, et donc $\overline{A} \in \mathscr{G}$.

7.b. Soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre sur E, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
Alors soit $A \in \mathscr{F}$, soit $A \notin \mathscr{F}$.
Si $A \in \mathscr{F}$, il n'y a rien à ajouter.

Et si $A \notin \mathscr{F}$, alors le filtre $\mathscr{G}$ de la question précédente est un filtre qui contient $\mathscr{F}$ et tel que $\overline{A} \in \mathscr{G}$.
Mais puisque $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre et que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, alors $\mathscr{F} = \mathscr{G}$, et donc $\overline{A} \in \mathscr{G} = \mathscr{F}$.
Donc pour toute partie $A \in \mathscr{P}(E)$, on a soit $A \in \mathscr{F}$, soit $\overline{A} \in \mathscr{F}$.

Inversement, supposons que $\mathscr{F}$ soit un filtre sur E et que pour toute partie A de E, on ait soit $A \in \mathscr{F}$ soit $\overline{A} \in \mathscr{F}$.
Soit $\mathscr{G}$ un filtre sur E tel que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et soit $X \in \mathscr{G}$.
Supposons par l'absurde que $X \notin \mathscr{F}$. Alors $\overline{X} \in \mathscr{F}$, et donc $\overline{X} \in \mathscr{G}$.
Mais alors $\emptyset = X \cap \overline{X} \in \mathscr{G}$, ce qui est absurde car $\mathscr{G}$ vérifie $(\mathscr{P}_4)$.
Donc nécessairement, $X \in \mathscr{F}$.
On a donc prouvé que pour tout $X \in \mathscr{G}$, $X \in \mathscr{F}$, si bien que $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ et donc[9] $\mathscr{G} = \mathscr{F}$.
Et donc $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre sur E.

Ainsi, $\boxed{\text{un filtre } \mathscr{F} \text{ sur } E \text{ est un ultrafiltre si et seulement si pour tout } X \in \mathscr{P}(E),\ X \in \mathscr{F} \textbf{ ou } \overline{X} \in \mathscr{F}.}$

Remarque
L'énoncé n'en dit rien, mais il s'agit ici nécessairement d'un **ou** exclusif : on ne peut pas avoir en même temps $A \in \mathscr{F}$ et $\overline{A} \in \mathscr{F}$, faute de quoi on aurait $\emptyset = A \cap \overline{A} \in \mathscr{F}$.

Détails
On a ici utilisé la propriété $(\mathscr{P}_2)$

[9] Par double inclusion.

7.c. Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $\mathscr{F}^x$ le filtre sur $\mathbf{R}$. défini à la partie I.
Soit alors $X = \{x\} \in \mathscr{P}(\mathbf{R})$. Nous avons déjà prouvé à la question 4.b que $X \notin \mathscr{F}^x$.
Par ailleurs, $\overline{X} = \mathbf{R} \setminus \{x\}$ n'est pas non plus dans $\mathscr{F}^x$, car il ne contient pas x, alors que x appartient à tous les éléments de $\mathscr{F}^x$.
Donc $\boxed{\mathscr{F}^x \text{ n'est pas un ultrafiltre.}}$

De même, considérons $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ le filtre de Fréchet défini à la partie I.
Soit $A = \{2p, p \in \mathbf{N}\}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs, qui est infini, si bien que $A \notin \mathscr{F}_{\mathbf{N}}$.
Et $A = \overline{\overline{A}}$ est également infini, si bien que $\overline{A} \notin \mathscr{F}\mathbf{N}$.
Ainsi, nous avons là une partie de $\mathbf{N}$ qui n'est pas dans $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$ et dont le complémentaire n'est pas non plus dans $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$, donc $\boxed{\mathscr{F}_{\mathbf{N}} \text{ n'est pas un ultrafiltre sur } \mathbf{N}.}$

Partie III. Filtres et limites.

Entendons nous bien : il est probablement difficile, sans connaissances supplémentaires sur le sujet, de se faire une intuition de ce qui se passe dans cette partie.
J'en suis bien conscient, et c'est exactement là le but de ce type de sujet : tester votre capacité à manipuler rigoureusement des objets pour lesquels on n'a pas forcément d'intuition. Le seul moyen de s'en tirer est d'être très méthodique, et de s'en tenir aux définitions.

8. L'ensemble $g^{\rightarrow}(\mathscr{F})$ n'est pas vide puisqu'il contient $\mathbf{R}$.
En effet, $\{x \in E \mid g(x) \in \mathbf{R}\} = E \in \mathscr{F}$.

Remarque
Puisque g est une application de E dans $\mathbf{R}$, pour tout $x \in E$, $g(x) \in \mathbf{R}$ par définition....

Soient X_1 et X_2 deux éléments de $g^{\rightarrow}(\mathscr{F})$.
Alors $\{x \in E \mid g(x) \in X_1\} \in \mathscr{F}$ et $\{x \in E \mid g(x) \in X_2\} \in \mathscr{F}$.
Mais $\{x \in E \mid g(x) \in X_1 \cap X_2\} = \{x \in E \mid g(x) \in X_1\} \cap \{x \in E \mid g(x) \in X_2\}$.
C'est donc un élément de $\mathscr{F}$, si bien que $X_1 \cap X_2 \in g^{\rightarrow}(\mathscr{F})$.

Pas convaincu ?
Si vous ressentez le besoin de prouver ceci, prenez un $x \in E$, et en procédant par équivalences, prouver qu'il est dans l'ensemble de gauche si et seulement si il est dans celui de droite.
La clé est alors que $g(x) \in X_1 \cap X_2$ si et seulement si $g(x) \in X_1$ **et** $g(x) \in X_2$....

Soit $X \in g^{\rightarrow}(\mathscr{F})$, et soit $Y \in \mathscr{F}(\mathbf{R})$ telle que $X \subset Y$.
Alors $\{x \in E \mid g(x) \in X\} \subset \{x \in E \mid g(x) \in Y\}$.
Or $\{x \in E \mid g(x) \in X\}$ est une partie de $\mathscr{F}$, et donc par $(\mathscr{P}_3)$, $\{x \in E \mid g(x) \in Y\} \in \mathscr{F}$, si bien que $Y \in g^{\rightarrow}(\mathscr{F})$.

Enfin, $\{x \in E \mid g(x) \in \emptyset\} = \emptyset \notin \mathscr{F}$, et donc $\emptyset \notin g^{\rightarrow}(\mathscr{F})$.
Donc $\boxed{g^{\rightarrow}(\mathscr{F}) \text{ est bien un filtre sur } \mathbf{R}.}$

9. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\lim\limits_{\mathscr{F}_A} g = b$.
Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\in g^{\leftarrow}(\mathscr{F}_A)$.
Ce qui signifie que $\{x \in E \mid g(x) \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\} \in \mathscr{F}_A$.
Et donc que $A \subset \{x \in E \mid g(x) \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[\}$.
Soit encore, que pour tout $x \in A$, $b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$.
Donc que[10] pour tout $x \in A$, pour tout $\varepsilon > 0$, $|g(x) - b| < \varepsilon$.

[10] Rappelons que deux quantificateurs universels peuvent être permutés

Comme mentionné précédemment, ceci signifie que pour tout $x \in A$, $g(x) = b$, et donc la restriction de g à A est constante égale à b.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout $x \in A$, $g(x) = b$.
Alors soit $X \in \mathscr{F}^b$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset X$.
Mais alors pour tout $x \in A$, $g(x) = b \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset X$.
Et donc $A \subset \{x \in E \mid g(x) \in X\}$.
Ce qui signifie que $\{x \in E \mid g(x) \in X\} \in \mathscr{F}_A$, et donc que $X \in g^{\rightarrow}(\mathscr{F}_A)$.
Ceci étant vrai pour toute partie X de $\mathscr{F}^b$, nous avons donc $\mathscr{F}^b \subset g^{\rightarrow}(\mathscr{F}_A)$, et donc $\lim\limits_{\mathscr{F}_A} g = b$.

10. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\lim\limits_{\mathscr{F}^a} = b$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\in \mathscr{F}^b$, si bien que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\in g^{\rightarrow}(\mathscr{F}^a)$.
Par définition, cela signifie que l'ensemble $\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\}$ est dans $\mathscr{F}^a$.
Notons tout de suite que cet ensemble s'écrit encore $\{x \in \mathbf{R} \mid |g(x) - b| < \varepsilon\}$.
Donc[11] il existe $\eta > 0$ tel que $]a-\eta, a+\eta[\subset \{x \in \mathbf{R} \mid |g(x) - b| < \varepsilon\}$. Considérons un tel $\eta > 0$.
Soit alors $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x-a| < \eta$. Alors $x \in]a-\eta, a+\eta[$, et donc $x \in \{t \in \mathbf{R} \mid |g(t)-b| < \varepsilon\}$, si bien que $|g(x) - b| < \varepsilon$.
Autrement dit, nous venons de prouver que $|x-a| < \eta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$.
Ne reste qu'à tout mettre bout à bout : quel que soit[12] $\varepsilon > 0$, nous avons prouvé l'existence d'un $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, si $|x-a| < \eta$, alors $|g(x) - b| < \varepsilon$.
Avec des quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbf{R}, |x-a| < \eta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon.$$

[11] Par définition de $\mathscr{F}^a$.

[12] Nous avions supposé ε quelconque.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons à présent que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbf{R}, |x-a| < \eta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$$

et prouvons que $\mathscr{F}^b \subset g^{\rightarrow}(\mathscr{F}^a)$.
Soit donc $X \in \mathscr{F}^b$. Nous souhaitons prouver que $X \in g^{\rightarrow}(\mathscr{F}^a)$, ce qui par définition signifie que $\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \in X\} \in \mathscr{F}^a$.
Mais par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset X$.
Soit donc $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|x-a| < \eta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon$.
Autrement dit,

$$]a-\eta, a+\eta[\subset \{x \in \mathbf{R} \mid |g(x)-b| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\} \subset \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \in X\}.$$

Et donc ceci prouve que $\{x \in \mathbf{R} \mid g(x) \in X\} \in \mathscr{F}^a$.
Donc nous avons bien prouvé que $X \in g^{\rightarrow}(\mathscr{F}^a)$, et donc que $\mathscr{F}^b \subset g^{\rightarrow}(\mathscr{F}^a)$.
Autrement dit, que $\lim\limits_{\mathscr{F}^a} g = b$.

Par double implication, on a donc $\lim\limits_{\mathscr{F}^a} g = b$ si et seulement si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbf{R},\ |x-a| < \eta \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon.}$$

11. $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\lim\limits_{\mathscr{F}_{\mathbf{N}}} u = b$.
Soit alors $\varepsilon > 0$, de sorte que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\in \mathscr{F}^b$.
Puisque $\mathscr{F}^b \subset u^{\rightarrow}(\mathscr{F}_{\mathbf{N}})$, $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\in u^{\rightarrow}(\mathscr{F}_{\mathbf{N}})$, et donc $\{n \in \mathbf{N} \mid u_n \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\} \in \mathscr{F}_{\mathbf{N}}$.
Autrement dit, $\{n \in \mathbf{N} \mid |u_n - b| < \varepsilon\}$ est une partie de complémentaire fini.
Donc $A = \{n \in \mathbf{N} \mid |u_n - b| \geqslant \varepsilon\}$ est fini.
Par conséquent, il existe un entier $k \in \mathbf{N}$ tel que $A \subset [\![0, k]\!]$.
Posons alors $n_0 = k+1$, de sorte que pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $n \geqslant n_0$, alors $n \in \overline{A}$, c'est-à-dire $|u_n - b| < \varepsilon$.
Nous venons donc de prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $n \geqslant n_0$, alors $|u_n - b| < \varepsilon$.
En version quantifiée :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - b| < \varepsilon.$$

Détails
Prendre $k = 0$ si $A = \emptyset$, et $k = \max A$ si A est non vide (puisque toute partie finie possède nécessairement un plus grand élément).

$\boxed{\Rightarrow}$ Inversement, supposons que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - b| < \varepsilon$.
Il s'agit alors de prouver que $\mathscr{F}^b \subset u^{\rightarrow}(\mathscr{F}_{\mathbf{N}})$.
Soit donc $X \in \mathscr{F}^b$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset X$.
Considérons alors n_0 un entier tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$.
Alors $\{n \in \mathbf{N} \mid u_n \notin]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\} \subset [\![0, n_0-1]\!]$. Il s'agit donc d'une partie finie[13] de $\mathbf{N}$.
Donc son complémentaire[14] qui est $\{n \in \mathbf{N} \mid |u_n \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\}$ est dans $\mathscr{F}_{\mathbf{N}}$.
Et alors $\{n \in \mathbf{N} \mid u_n \in X\}$, qui contient $\{n \in \mathbf{N} \mid u_n \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon\}$ est également dans $\mathscr{F}^{\mathbf{N}}$.
Ceci prouve donc que $X \in u^{\rightarrow}(\mathscr{F}_{\mathbf{N}})$.
Nous avons donc bien prouvé que pour tout $X \in \mathscr{F}^b$, $X \in u^{\uparrow}(\mathscr{F}_{\mathbf{N}})$, donc que $\mathscr{F}^b \subset u^{\rightarrow}(\mathscr{F}_{\mathbf{N}})$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{\mathscr{F}_{\mathbf{N}}} u = b$.

[13] Éventuellement vide.
[14] Dans $\mathbf{N}$.

Commentaires *: ce qu'effleure du bout du doigt cette dernière partie, c'est que la notion de filtre permet de donner un cadre dans lequel se retrouvent les différentes notions de limite. En particulier ici, nous venons de le faire pour les limites (finies) de suites ou de fonctions, qui sont a priori assez différentes. Sans beaucoup plus d'efforts, on pourrait donner dans le langage des filtres la définition d'une suite qui tend vers $+\infty$, ou d'une fonction qui tend vers $+\infty$ en un réel, ou en $\pm\infty$.*
Toutefois, nous n'utiliserons pas ce vocabulaire des filtres pour définir les limites en prépa, il n'est pratique qu'une fois qu'on a une bonne intuition des limites et de leurs propriétés, et sert surtout à généraliser la notion de limite à des cadres plus abstraits que ceux dont nous aurons besoin[15].
Enfin, la notion d'ultrafiltre abordée dans la partie II est un outil régulièrement utilisé en théorie des ensembles.
Il n'est pas question que j'en dise plus ici, mais tout cela pour dire que ces objets n'ont pas (seulement) été inventés pour torturer des élèves de prépa !

[15] Limite d'une suite ou d'une fonction.