Devoir maison 5

▸ Exercice : la fonction de Gudermann

On rappelle que dans le DM précédent, on a prouvé que sh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, dont la bijection réciproque, notée Argsh, est dérivable sur $\mathbf{R}$, avec pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

L'exercice ne nécessite aucune autre connaissance au sujet de Argsh.

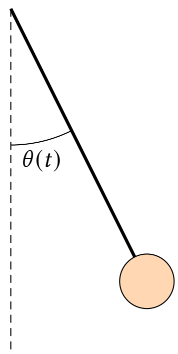
On appelle **fonction de Gudermann**, ou **gudermannien**, et on note $\mathrm{gd} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ qui s'annule en 0.

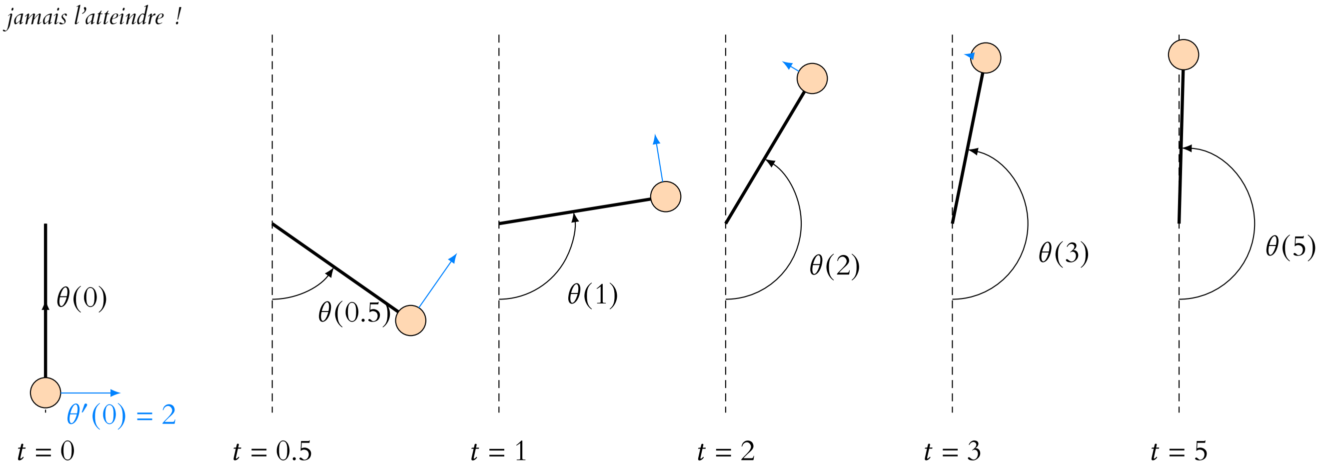
1. Justifier que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{gd}(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))$.

Partie I. Gudermannien et pendule simple

2. Montrer que gd réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
3. Exprimer la bijection réciproque $\mathrm{gd}^{-1} : I \to \mathbf{R}$ en fonction (notamment) de Argsh.
4. Montrer que gd^{-1} est dérivable et que $\forall x \in I$, $\left(\mathrm{gd}^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.
5. Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $(\mathrm{gd})'(x) = \cos(\mathrm{gd}(x))$.
6. Prouver que la fonction $f = 2\mathrm{gd}$ est dérivable, et vérifie : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f''(x) + \sin(f(x)) = 0$.

En d'autres termes, nous venons de prouver que la fonction $2\mathrm{gd}$ *est solution de l'équation différentielle* $y'' + \sin(y) = 0$.
Cette équation est celle qui régit le mouvement d'une masse située au bout d'une tige rigide en l'absence de frottement (voir figure ci-contre).
Plus précisément, si on note $\theta(t)$ *l'angle que fait notre tige avec la verticale à l'instant* t*, alors on doit avoir* $\theta''(t)+\sin(\theta(t)) = 0$ *pour tout temps* t.
Or vous savez peut-être déjà que la fonction $\theta(t)$ *est entièrement déterminée par sa valeur et celle de sa dérivée en* $t = 0$*, c'est-à-dire par la position initiale et la vitesse initiale du pendule.*
Donc si on lance le pendule avec un angle initial de $2\mathrm{gd}(0) = 0$ *et une vitesse (angulaire) initiale de* $2\mathrm{gd}'(0) = 2$*, alors pour tout* $t \geqslant 0$, $\theta(t) = 2\mathrm{gd}(t)$.
On remarque alors que θ *est croissante, et tend vers* π *en* ∞*, c'est-à-dire que notre pendule se rapproche de la verticale, sans jamais l'atteindre !*





Partie II. Deux identités sur le gudermannien

7. Prouver que pour tout réel x, $\mathrm{gd}(x) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(x))$.
8. Prouver que $h : x \mapsto \operatorname{Arctan}(e^x)$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.
   En déduire une relation entre h et gd.