DM4 : Indications

Problème

► 3)a) La fonction intégrée est de la forme $u'u^{2k}$, on sait en trouver une primitive.

► 3)b) Somme télescopique à l'aide de la question précédente.

► 3)c) On a $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$...

► 4)b) Une suite croissante et majorée converge.

► 4)c) Séparer, dans la somme définissant a_{2n+1}, les k pairs des k impairs. On a alors $\dfrac{1}{(2k)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{k^2}$.

► 5)a) Noter que la somme comporte un nombre pair de termes, et regrouper les termes deux par deux. On notera que $p_{2k} - p_{2k+1} \geqslant 0$ et $p_{2k} - p_{2k-1} \leqslant 0$.

► 5)c) Si m est pair, alors la somme est positive, donc on peut se passer de la valeur absolue.
Si m est impair, noter que $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} (-1)^k p_k \leqslant p_{m+1}$, et ajouter $-p_m$, pour encadrer $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(-1)^k p_k$ et en tirer une inégalité sur sa valeur absolue.

► 6)b) Sommer les inégalités précédentes.

► 7)a) Couper la somme en deux : de $-n$ à -1 et de 0 à n.
Dans la première faire un changement d'indice, $k = -\ell$.

► 8)a) Prouver que $c_n^2 = \displaystyle\sum_{-n\leqslant i,j\leqslant n} \frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1}2j+1$, puis séparer les termes pour lesquels $i = j$ des termes $i \neq j$.

► 9)d) Appliquer la question 5 (après avoir vérifié qu'elle s'applique bien ici).