Devoir maison 4

*Vous traiterez **au choix** : (l'exercice 1 **et** l'exercice 2) **ou** le problème, ce dernier étant nettement plus difficile.*

▸ Exercice 1 : autour des sommes harmoniques

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, qu'on appelle $n^{\text{ème}}$ nombre harmonique, et on note aussi $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}$.

Partie I. Différentes identités vérifiées par (H_n).

1. a. Montrer que la suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   b. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \frac{1}{2}$.
   c. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n$.
3. a. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}(-1)^{k-1}$.
   b. Pour $(n,k) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, exprimer $\frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$ en fonction de $\binom{n+1}{k}$.
   c. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$.
   d. En déduire, *sans récurrence*, que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = H_n$.

Partie II. Les $H_n, n \geqslant 2$ ne sont pas entiers.
Dans cette partie, on souhaite prouver que pour $n \geqslant 2$, H_n n'est pas un entier.

4. Soit $n \geqslant 2$ un entier pair. On suppose qu'il existe $p, q \in \mathbf{N}$ tels que $H_n = \frac{2p+1}{2q}$.
   Justifier qu'alors il existe deux entiers p', q' tels que $H_{n+1} = \frac{2p'+1}{2q'}$.
5. Soit $n \geqslant 2$ un entier impair, et soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2m+1$.
   a. Justifier que $H_{n+1} = \frac{1}{2}H_{m+1} + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1}$.
   b. Prouver qu'il existe $a, b \in \mathbf{N}$ tels que $\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1} = \frac{a}{2b+1}$.
6. Montrer que : $\forall n \geqslant 2, \exists p, q \in \mathbf{N}, H_n = \frac{2p+1}{2q}$ puis conclure.

▸ Exercice 2 : fonction argument sinus hyperbolique

On définit deux fonction ch et sh sur $\mathbf{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
2. Prouver que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$. On note Argsh sa bijection réciproque.
3. Justifier soigneusement que Argsh est impaire.
4. Prouver que Argsh est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

▸ Problème : un calcul élémentaire de $\zeta(2) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Partie I. Une première limite

Sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on définit la fonction tan par : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Montrer que tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ exprimer $\tan'$ en fonction de $\tan^2$.
2. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$.
3. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)\,dx$.
   a. Prouver que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $I_k + I_{k+1} = \dfrac{1}{2k+1}$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 + (-1)^n I_{n+1}$.
   c. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $I_n \geqslant 0$.
   En déduire à l'aide de la question 3.a l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
   d. Prouver enfin que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Partie II. Quelques résultats préliminaires.

4. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.
   a. Prouver que pour tout entier $k \geqslant 2$, on a $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.
   b. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge.
   Dans la suite, on notera $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Le but du problème est de déterminer la valeur de ℓ.
   c. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{2n+1} = \dfrac{a_n}{4} + b_n$.
   d. En déduire que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et déterminer sa limite en fonction de ℓ.
5. Soient m, n deux entiers relatifs, avec $m \leqslant n$.
   Soient $p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n$ des réels positifs tels que pour tout $k \in [\![m, n-1]\!]$, $p_{k+1} \leqslant p_k$.
   a. On suppose dans cette question que m est pair et n est impair.
   Prouver alors que $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=m}^{n} (-1)^k p_k \leqslant p_m$.
   b. Montrer que l'encadrement de la question précédente reste vrai si m et n sont tous les deux pairs.
   c. Prouver, en utilisant les deux questions précédentes qu'on a toujours $\left|\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (-1)^k p_k\right| \leqslant p_m$.
6. **Majoration des sommes partielles de la série harmonique**
   Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   a. Soit $k \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. En exploitant la monotonie de $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, prouver que $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
   c. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{n}$.

Partie III. Calcul de $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $c_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $d_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

7. a. À l'aide de la partie I, prouver que $\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{\pi}{2}$.

   b. Prouver que la suite $(d_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite en fonction de ℓ.

8. a. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $c_n^2 = d_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i} \left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1}\right)$.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $c_n^2 - d_n = \sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{(j-i)(2i+1)}$.

9. On pose, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![-n, n]\!]$, $s_{n,i} = \sum_{\substack{-n\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}$.

   a. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $i \in [\![-n, n]\!]$, $s_{n,-i} = -s_{n,i}$. En déduire la valeur de $s_{n,0}$.

   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $c_n^2 - d_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i-1}$.

   c. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_{n,i} = \sum_{k=n-i+1}^{n+i} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   On pourra utiliser un changement d'indice de la forme $k = j - i$.

   d. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|s_{n,i}| \leqslant \frac{1}{n-i+1}$.

   e. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|c_n^2 - d_n| \leqslant 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(n-i+1)}$.

   f. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$, factoriser $\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i+1}$.

   g. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|c_n^2 - d_n| \leqslant \frac{4}{n+1} H_n$.

10. Déduire de tout ce qui précède que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

    Ces résultats seront plus tard notés $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 4

▸ Exercice 1 : autour des sommes harmoniques

Partie I. Différentes identités vérifiées par (H_n).

1.a. Soit $n \geqslant 1$. Alors

$$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} \geqslant 0.$$

Donc $\boxed{(H_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$

1.b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \geqslant n\frac{1}{2n} \geqslant \boxed{\frac{1}{2}}.$$

Détails
Le plus petit des termes de la somme est le dernier, qui vaut $\frac{1}{2n}$.

1.c. Puisque $(H_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, par le théorème de la limite monotone, soit elle diverge vers $+\infty$, soit elle converge vers une limite finie $\ell \in \mathbf{R}$.
Supposons par l'absurde que $H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Alors $H_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$, si bien que $H_{2n} - H_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell = 0$.
Et donc par passage à la limite dans l'inégalité de la question précédente, $0 \geqslant \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.
On en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty.}$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} = \sum_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n+1}{j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j} = \boxed{(n+1)H_n - n.}$$

3.a. Il s'agit de remarquer que pour $k = n+1$, $\binom{n}{k} = 0$, et donc $S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}$. Ainsi

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k}(-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right](-1)^{k-1}.$$

3.b. C'est la formule[1] donnée en cours sous la forme $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
En utilisant $n+1$ plutôt que n, on a $k\binom{n+1}{k} = (n+1)\binom{n}{k-1}$, soit encore

$$\boxed{\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.}$$

[1] La «formule du capitaine».

Si vous ne pensez pas à la formule en question, tout ceci se retrouve aisément à l'aide de factorielles.

3.c. On a, pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$, d'après l'identité de Pascal, $\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$.
Et donc

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}(-1)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{k-1} - (-1)^0\right) = \frac{1}{n+1}\left((1-1)^{n+1} + 1\right) = \boxed{\frac{1}{n+1}.} \end{aligned}$$

3.d. On a alors, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(S_{k+1} - S_k) = S_n - S_1$.

Mais $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}\binom{1}{k}(-1)^{k-1} = 1$.

Et donc $S_n - S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$, soit encore $S_n = S_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n$.

> **Astuce**
> Il s'agit d'une somme télescopique.
> Lorsqu'on connaît
> $$v_n = u_{n+1} - u_n,$$
> il est facile de faire apparaître u_n à l'aide d'une somme de v_k.

Partie II. Les $H_n, n \geqslant 2$ ne sont pas entiers.

4. Soient donc $p, q \in \mathbf{N}$ tels que $H_n = \dfrac{2p+1}{2q}$. Notons également $m = \frac{n}{2}$, de sorte que $n = 2m$.
Alors
$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1} = \frac{2p+1}{2q} + \frac{1}{2m+1} = \frac{(2p+1)(2m+1)+2q}{2q(2m+1)} = \frac{2(mp+p+m)+1}{2q(2m+1)}.$$
Donc en posant $p' = mp + p + l$ et $q' = q(2m+1)$, on a bien la forme souhaitée.

5.a. On a donc
$$\begin{aligned}
H_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2m+2} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2m+2} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2m+2} \frac{1}{k}\\
&= \sum_{p=1}^{m+1} \frac{1}{2p} + \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{m+1} \frac{1}{p} + \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{2p+1}\\
&= \boxed{\frac{1}{2}H_{m+1} + \sum_{p=0}^{m} \frac{1}{2p+1}.}
\end{aligned}$$

5.b. La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2k+1}$ est une somme de fractions dont tous les dénominateurs sont impairs.
Donc en mettant au même dénominateur, en prenant comme dénominateur commun le produit des entiers impairs de 1 à $2m+1$, qui est encore impair, on obtient bien une fraction de la forme souhaitée.

> **Plus rigoureusement**
> On pourrait sûrement procéder à une récurrence sur $m \geqslant 1$.

6. Soit $n \geqslant 2$.
▸ Si n est pair. Alors soit $n = 2$, et alors $H_2 = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ qui est bien de la forme souhaitée.
Soit $n \geqslant 4$, $H_n = H_{(n-1)+1}$, et si m est tel que $n-1 = 2m+1$, alors par la question précédente, il existe $a, b \in \mathbf{N}$ tels que
$$H_n = \frac{1}{2}H_{m+1} + \frac{a}{2b+1}.$$
Mais H_{m+1} est un rationnel, donc il existe $a', b' \in \mathbf{N}$ tels que $H_{m+1} = \frac{a'}{b'}$ et donc
$$H_n = \frac{a'}{2b'} + \frac{a}{2b+1} = \frac{a'(2b+1)+a2b'}{2b'(2b+1)} = \frac{2(a'b+ab')+1}{2b'(2b+1)}$$
qui est bien de la forme souhaitée.
▸ Soit n est impair, et alors puisque $n-1$ est pair et plus grand que 2, nous venons de prouver qu'il existe $p, q \in \mathbf{N}$ tels que $H_{n-1} = \frac{2p+1}{2q}$. Et alors par la question 4, il existe $p', q' \in \mathbf{N}$ tels que $H_n = \frac{2p'+1}{2q'}$.

Ainsi, dans tous les cas, H_n est bien le quotient d'un entier impair par un entier pair, et donc $\boxed{\text{n'est pas un entier.}}$

▸ Exercice 2 : fonction argument sinus hyperbolique

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors
$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = \big(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\big)\big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) = e^x e^{-x} = \boxed{1.}$$

2. La fonction sh est dérivable car somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x) > 0$.
Donc sh est strictement croissante sur $\mathbf{R}$. On a alors, par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$, si bien que par le théorème de la bijection[2], sh réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

[2] Qui s'applique puisque sh est continue car dérivable.

3. Nous avons déjà dit que sh est dérivable, et sa dérivée ch ne s'annule jamais.
Donc $\mathrm{sh}' \circ \mathrm{Argsh}$ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$, si bien que Argsh est dérivable sur $\mathbf{R}$, et

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \mathrm{Argsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x))}.$$

Or pour pour $x \in \mathbf{R}$, on a, d'après la question 1,

$$\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argsh}(x)) - \underbrace{\mathrm{sh}^2(\mathrm{Argsh}(x))}_{=x^2} = 1$$

et donc $\mathrm{ch}^2(\mathrm{Argsh}(x)) = 1 + x^2$.
Puisque par ailleurs $\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x)) \geqslant 0$, on a donc $\mathrm{ch}(\mathrm{Argsh}(x)) = \sqrt{1+x^2}$.
Et donc $\boxed{\mathrm{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$.

Rappel
La bijection réciproque d'une bijection dérivable f est dérivable en tous les points x tels que $f'(f^{-1})(x) \neq 0$.
Donc en particulier, si f' ne s'annule jamais, cette condition est toujours remplie, et donc f^{-1} est dérivable partout où elle est définie.

⚠ Attention !
Sans information sur le signe, on ne passe pas «brutalement» à la racine carrée, on aurait juste

$$|\mathrm{ch}\,(\mathrm{Argsh}(x))| = \sqrt{1+x^2}.$$

4. Donnons deux méthodes.
▶ **Première méthode** : en utilisant la question précédente.
Notons $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \end{array} \right.$.
Alors la fonction f est bien définie sur $\mathbf{R}$ tout entier car pour $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \geqslant -x$, et donc $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $[1, +\infty[$. Puisque la racine carrée est dérivable sur cet intervalle, $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Et donc ensuite, par somme et composée de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Alors pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{2\sqrt{x^2+1}+2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{2}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Donc f est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, de même que Argsh.
Ainsi ces deux fonctions diffèrent d'une constante : il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \lambda$.
Pour $x = 0$, il vient alors $\mathrm{Argsh}(0) = 0 = \ln(1) + \lambda$, et donc $\lambda = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\boxed{\mathrm{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)}$.

☠ Danger !
Deux primitives d'une même fonction ne sont pas nécessairement égales, mais elles diffèrent d'une constante.

▶ **Deuxième méthode** : par résolution d'équation.
Soit $y \in \mathbf{R}$, cherchons l'unique antécédent de y par sh. Soit donc $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} y = \mathrm{sh}(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow 2y = e^x - e^{-x} \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x \text{ est solution de l'équation } X^2 - 2yX - 1 = 0 \text{ d'inconnue } X. \end{aligned}$$

Cette dernière équation a pour discriminant $4y^2 + 4 = 4(y^2+1)$, et a donc pour solutions $X_1 = \frac{2y+2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$ et $X_2 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2}$.
Comme expliqué dans la première méthode, $X_1 > 0$ et sur le même principe, $X_2 < 0$.
Et donc $y = \mathrm{sh}(x) \Leftrightarrow e^x = X_1 \Leftrightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

Ainsi, l'unique antécédent de y par sh est $\ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$, si bien que $\boxed{\mathrm{Argsh}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}$.

▸ Problème : un calcul élémentaire de $\zeta(2)$.

Partie I. Une première limite

1. Ceci a été fait dans le chapitre 5 : tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ car quotient de deux fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x)+\sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \boxed{1+\tan^2(x).}$$

2. En particulier, la dérivée de tan est positive sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, si bien que tan est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.
Et donc elle l'est sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, si bien que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, on a

$$\tan(0) \leqslant \tan(x) \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1.$$

3.a. Soit $k \in \mathbf{N}$. Alors $I_k+I_{k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k}(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2k+2}(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2(x)\right)\tan^{2k}(x)\,dx.$
Mais nous savons que $x \mapsto 1+\tan^2(x)$ est la dérivée de tan.
Et donc une primitive de $x \mapsto (1+\tan^2(x))\tan^{2k}(x)$ est $x \mapsto \frac{1}{2k+1}\tan^{2k+1}(x)$.
Et donc

$$I_k+I_{k+1} = \left[\frac{1}{2k+1}\tan^{2k+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2k+1}(1-0) = \boxed{\frac{1}{2k+1}.}$$

Détails
On a reconnu une fonction de la forme $u'u^n$, dont une primitive est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

3.b. On en déduit que pour $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(I_k+I_{k+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1} I_i\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k - \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i} I_i = \boxed{I_0+(-1)^n I_{n+1}.}\end{aligned}$$

3.c. Soit $n \in \mathbf{N}$. Puisque pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $\tan^{2n}(x) = (\tan^n(x))^2 \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale[3], $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)\,dx \geqslant 0$.
Par la question 2.a, on a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+1} - \underbrace{I_{n+1}}_{\geqslant 0} \leqslant \frac{1}{2n+1}$.

Et donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$

[3] Formulation savante de «l'intégrale d'une fonction positive est positive.»

3.d. On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $-I_{n+1} \leqslant (-1)^n I_{n+1} \leqslant I_{n+1}$, et donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n I_{n+1} = 0$.
On en déduit donc par passage à la limite dans l'égalité de la question 2.b que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt = \boxed{\frac{\pi}{4}.}$$

⚠ Attention !
Ne pas conclure trop rapidement «pas produit de limites», la suite de terme général $(-1)^n$ n'a pas de limite en $+\infty$. Nous utilisons ici le fait qu'elle est bornée, à valeurs dans $[-1,1]$.

Partie II. Quelques résultats préliminaires

4.a. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Alors

$$\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2}.$$

Détails
$k(k-1) \leqslant k^2$, donc par passage à l'inverse...

4.b. On a donc, pour $n \geqslant 2$,

$$a_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$
$$\leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

Somme téléescopique.

On en déduit notamment que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \leqslant 2$. Donc la suite $(a_n)_n$ est majorée.
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$

si bien que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.
Par le théorème de la limite monotone[4], $\boxed{\text{la suite } (a_n) \text{ converge vers une limite } \ell.}$

[4] Elle est croissante et majorée.

4.c. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i)^2} + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(2i+1)^2} = \boxed{\frac{a_n}{4} + b_n.} \end{aligned}$$

Détails

Les entiers pairs inférieurs à $2n+1$ sont les $2i$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et les impairs sont les $2i+1$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

4.d. On a donc $b_n = a_{2n+1} - \frac{a_n}{4} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell - \frac{\ell}{4} = \boxed{\frac{3}{4}\ell.}$

5.a. Puisque m est pair, il existe $i \in \mathbf{Z}$ tel que $m = 2i$, et de même, n étant impair, il existe $j \in \mathbf{Z}$ tel que $n = 2j+1$.
Et puisque $m \leqslant n$, alors $i \leqslant j$. Regroupons alors deux par deux les termes de la somme :

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k p_k = (p_m - p_{m+1}) + (p_{m+2} - p_{m+3}) + \cdots + (p_{n-1} - p_n) = \sum_{\ell=i}^{j} \left((-1)^{2\ell} p_{2\ell} + (-1)^{2\ell+1} p_{2\ell+1} \right) = \sum_{\ell=i}^{j} (p_{2\ell} - p_{2\ell+1}).$$

Mais puisque les p_k sont dans l'ordre décroissant, pour tout $\ell \in [\![i, j]\!]$,

$$p_{2\ell+1} \leqslant p_{2\ell} \Leftrightarrow p_{2\ell} - p_{2\ell+1} \geqslant 0.$$

Et donc ceci prouve déjà que $\boxed{0 \leqslant \sum_{k=m}^{n} (-1)^k p_k.}$

Pour l'autre inégalité, il faut procéder suivant le même principe, mais en regroupant cette fois un terme pair avec le terme impair qui le précède.
Plus précisément :

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k p_k = p_m + \sum_{\ell=i+1}^{j} \underbrace{(-p_{2\ell-1} + p_{2\ell})}_{\leqslant 0} - p_n \leqslant p_m - p_n \leqslant p_m.$$

5.b. Si m et n sont pairs cette fois, disons[5] avec $m < n$, donc $m+2 \leqslant n$, on a cette fois un nombre impair de termes, donc il ne suffit pas de les regrouper par deux. Mais on peut noter que

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k p_k = \sum_{k=m}^{n-1} (-1)^k p_k + p_n$$

et que m est pair et $n-1$ est impair, si bien que le résultat de la question précédente s'applique, et donc $\sum_{k=m}^{n} (-1)^k p_k \geqslant 0 + p_n \geqslant 0$.

[5] Le cas $n = m$ ne demande pas beaucoup d'efforts...

Par contre cela ne nous fournit pas l'autre inégalité. Pour cela, écrivons

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^k p_k = p_m + \underbrace{(-p_{m+1}+p_{m+2})}_{\leqslant 0} + \cdots + \underbrace{(-p_{n-1}+p_n)}_{\leqslant 0} \leqslant p_m.$$

5.c. Si m est pair, on a déjà répondu puisque la somme est positive, si bien que

$$\left|\sum_{k=m}^{n}(-1)^k p_k\right| = \sum_{k=m}^{n}(-1)^k p_k \leqslant p_m.$$

Reste donc à traiter le cas m impair. Mais on sait que

$$0 \leqslant \sum_{k=m+1}^{n}(-1)^k p_k \leqslant p_{m+1}.$$

Et donc $-p_m \leqslant \sum_{k=m}^{n}(-1)^k p_k \leqslant p_{m+1} - p_m \leqslant 0$.

Et ainsi, $\left|\sum_{k=m}^{n}(-1)^k p_k\right| = -\sum_{k=m}^{n}(-1)^k p_k \leqslant p_m$.

6. Majoration des sommes partielles de la série harmonique

6.a. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k-1,k]$, et donc pour tout $t \in [k-1,k]$, $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{t}$.

Donc par croissance de l'intégrale, $\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

Or l'intégrale de gauche est l'intégrale d'une constante : elle vaut $\frac{1}{k}(k-(k-1)) = \frac{1}{k}$.

Et donc $\boxed{\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}.}$

> **Astuce**
> Pour $a \leqslant b$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $\int_a^b \lambda\, dt = \lambda(b-a)$.
> Essayez de le visualiser graphiquement en terme d'aire (d'un rectangle) plutôt que d'utiliser une primitive...

6.b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente, on obtient, en utilisant la relation de Chasles[6]

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_1^n = \ln(n).$$

Et donc en ajoutant le terme $k=1$, il vient

$$H_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n).$$

[6] Pour les intégrales.

6.c. On a alors, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 \leqslant \frac{H_n}{n} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{\ln n}{n}.$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$, si bien que par le théorème des gendarmes, il vient $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{H_n}{n} = 0.}$

Partie III. Calcul de $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

7.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=-n}^{-1}\frac{(-1)^k}{2k+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} && \text{Relation de Chasles.}\\ &= \sum_{\ell=1}^{n}\frac{(-1)^{-\ell}}{1-2\ell} + \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} && \ell = -k. \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{i+1}}{-2i-1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad i = \ell - 1.$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^{i}}{2i+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Or, $-\dfrac{1}{2n+1} \leqslant \dfrac{(-1)^n}{2n+1} \leqslant \dfrac{1}{2n+1}$, si bien que par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = 0$, et donc en utilisant le résultat de la question 3, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 2\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1} = 2\dfrac{\pi}{4} = \boxed{\dfrac{\pi}{2}}.$

7.b. Sur le même principe, pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} + \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = b_n + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(1-2k)^2} = b_n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(-1-2i)^2} = 2b_n - \frac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{\frac{3}{2}\ell.}$$

8.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$c_n^2 = \left(\sum_{k=-n}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=-n}^{n} \frac{(-1)^i}{2i+1}\right)\left(\sum_{j=-n}^{n} \frac{(-1)^j}{2j+1}\right)$$

$$= \sum_{-n\leqslant i,j\leqslant n} \frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)(2j+1)}$$

$$= \sum_{i=-n}^{n} \frac{(-1)^{2i}}{(2i+1)^2} + \sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)(2j+1)}$$

$$= d_n + \sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)(2j+1)}.$$

> **Détails**
> On a séparé les termes pour lesquels $i = j$ de ceux pour lesquels $i \neq j$.

Or, pour $(i,j) \in [\![-n, n]\!]^2$, on a

$$\frac{1}{j-i}\left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1}\right) = \frac{1}{j-i}\frac{2j-2i}{(2i+1)(2j+1)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2i+1)(2j+1)}.$$

Et donc il vient bien

$$\boxed{c_n^2 = d_n + \frac{1}{2}\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1}\right).}$$

8.b. Par linéarité de la somme, et en utilisant la question précédente, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$c_n^2 - d_n = \frac{1}{2}\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\left(\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2j+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\frac{1}{2j+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\frac{1}{2i+1} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{i-j}\frac{1}{2i+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\frac{1}{2i+1}$$

$$= \boxed{\sum_{\substack{-n\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} \frac{(-1)^{i+j}}{(j-i)(2i+1)}.}$$

> **Détails**
> On a simplement renommé nos variables dans la seconde somme : i devient j et vice-versa.

9.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $i \in [\![-n, n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
s_{n,-i} &= \sum_{\substack{-n\leqslant j\leqslant n\\ j\neq -i}} \frac{(-1)^{j-i}}{j+i}\\
&= \sum_{\substack{-n\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} \frac{(-1)^{-k-i}}{-k+i} = -\sum_{\substack{-n\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} \frac{(-1)^{-k-i}}{k-i}\\
&= -\sum_{\substack{-n\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} \underbrace{(-1)^{2k}}_{=1}\frac{(-1)^{i-k}}{k-i} = -\sum_{\substack{-n\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}} \frac{(-1)^{i-k}}{k-i} = \boxed{-s_{n,i}.}
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
On a posé $k = -j$.
Si j ne prend pas la valeur $-i$, alors k ne prend pas la valeur i.

Donc en particulier, pour $i = 0$, $s_{n,0} = -s_{n,0}$, si bien que $\boxed{s_{n,0} = 0.}$

9.b. Reprenons le résultat de la question 8.a : pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
c_n^2 - d_n &= \sum_{i=-n}^{n}\sum_{\substack{j=-n\\ j\neq i}}^{n} \frac{(-1)^{i+j}}{(j-i)(2i+1)}\\
&= \sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{2i+1}\sum_{\substack{j=-n\\ j\neq i}}^{n} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i}\\
&= \sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{2i+1} s_{n,i}\\
&= \sum_{i=-n}^{-1} \frac{s_{n,i}}{2i+1} + \underbrace{s_{n,0}}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{s_{n,-k}}{1-2k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i+1}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-s_{n,k}}{1-2k} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i+1}\\
&= \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{s_{n,k}}{2k-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i+1}.}
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
Dans la première somme, on a posé $k = -i$.

9.c. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Alors en procédant au changement d'indice $k = j - i$ indiqué dans l'énoncé,

$$\begin{aligned}
s_{n,i} &= \sum_{\substack{-n\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{(-1)^{i+j}}{j-i} = \sum_{\substack{k=-n-i\\ k\neq 0}}^{n-i} \frac{(-1)^{2i+k}}{k}\\
&= \sum_{\substack{k=-n-i\\ k\neq 0}}^{n-i} \frac{(-1)^{k}}{k} = \sum_{k=-n-i}^{-1} \frac{(-1)^{k}}{k} + \sum_{k=1}^{n-i} \frac{(-1)^{k}}{k}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n+i} \frac{(-1)^{-\ell}}{-\ell} + \sum_{k=1}^{n-i} \frac{(-1)^{k}}{k}\\
&= \cancel{-\sum_{\ell=1}^{n-i} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell}} - \sum_{\ell=n-i+1}^{n+i} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell} + \cancel{\sum_{k=1}^{n-i} \frac{(-1)^{k}}{k}}\\
&= \boxed{\sum_{k=n-i+1}^{n+i} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.}
\end{aligned}$$

Relation de Chasles.

Chgt d'indice
Dans la première somme, on a posé $\ell = -k$.

Relation de Chasles.

9.d. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$.

Il s'agit d'appliquer le résultat de la question 5 à $-s_{n,i} = \displaystyle\sum_{k=n-i+1}^{n+i} \frac{(-1)^k}{k}$, qui est bien de la forme citée à la question 5, où les p_k sont les $\frac{1}{k}$, qui vérifient bien les conditions de positivité et de décroissance demandées.

On a donc $\boxed{|s_{n,i}| = |-s_{n,i}| \leqslant \dfrac{1}{n-i+1}}$.

9.e. On a donc, grâce à l'inégalité triangulaire, pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|c_n^2 - d_n| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i-1}\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i+1}\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{s_{n,i}}{2i-1}\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|s_{n,i}|}{2i+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{|s_{n,i}|}{2i-1} \\
&\leqslant 2\sum_{i=1}^{n} \frac{|s_{n,i}|}{2i-1} \\
&\leqslant 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(n-i+1)} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(n-i+1)}.
\end{aligned}$$

Détails
Pour tout i, $\dfrac{1}{2i+1} \leqslant \dfrac{1}{2i-1}$.
On somme alors les inégalités ainsi obtenues.

Détails
$i \leqslant 2i-1$, donc

$$\frac{1}{2i-1} \leqslant \frac{1}{i}.$$

9.f. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{n-i+1} = \dfrac{n-i+1+i}{i(n-i+1)} = \dfrac{n+1}{i(in-i+1)}$.

9.g. Des deux questions précédentes, on déduit que pour $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
|c_n^2 - d_n| &\leqslant 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{i} + \frac{1}{n-i+1}\right) \\
&\leqslant \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{2}{n+1}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n-i+1} \\
&\leqslant \frac{2}{n+1}H_n + \frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \\
&\leqslant \frac{4}{n+1}H_n.
\end{aligned}$$

Chgt d'indice
On a posé $j = n-i+1$, changement d'indice qui ne fait que permuter les deux bornes (quand $i = 1$, $j = n$ et quand $i = n$, alors $j = 1$).

10. D'après la question 6, on a $0 \leqslant \dfrac{H_n}{n+1} \leqslant \dfrac{H_n}{n} \leqslant \dfrac{\ln n + 1}{n}$.
Donc pour $n \in \mathbf{N}^*$, il vient

$$c_n^2 - d_n \leqslant |c_n^2 - d_n| \leqslant \frac{4}{n+1}H_n \leqslant \frac{4(\ln n + 1)}{n+1} \leqslant \frac{4(\ln n + 1)}{n}$$

et de même,

$$c_n^2 - d_n \geqslant -|c_n^2 - d_n| \geqslant -\frac{4(\ln n + 1)}{n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n^2 - d_n = 0$.

Et donc $d_n = (d_n - c_n^2) + c_n^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \dfrac{\pi^2}{4}$.

Puisque nous avons prouvé à la question 7.b que $d_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{2}\ell$, on a donc $\dfrac{3}{2}\ell = \dfrac{\pi^2}{4}$, si bien que $\ell = \dfrac{\pi^2}{6}$. Et donc $b_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{3}{4}\dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Soit encore $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6} \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}}$.