DM3 : Indications

Exercice 1 : étude de fonction

► 3) Ne pas oublier de revenir à la définition des puissances non entières : $a^b = e^{b \ln a}$.
► 5)b) Essayer d'écrire $h'(t)$ sous forme d'une fraction dont le numérateur est $g(t) + g(4-t)$.
En utilisant les variations de g, montrer que $t \mapsto g(4-t)$ admet un minimum sur $[0,1]$, que l'on déterminera. En déduire le signe de $h'(t)$.
► 5)c) Il n'y a pas d'obligation à dériver, on peut utiliser des résultats du cours sur la monotonie d'une composée.
► 7) Prouver une formule analogue à celle de la question précédente pour $\sqrt{1+\sin(2x)}$.
En déduire que f est constante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
Sur les autres intervalles qui composent $\mathscr{D}_f \cap \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, obtenir une expression «simple» de f à l'aide de cos, de sin, de ln et de exp.
Sur $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pourra vérifier que $f(x) = e^{k(x)}$.

Exercice 2 : théorème de Beatty et jeu de Wythoff

► 1)a) Si $k' > k$, montrer que $k'a - 1 \geqslant ka$, puis en déduire une inégalité sur les parties entières.
► 1)b) Notons que si p est le plus grand entier à vérifier l'inégalité de l'énoncé, alors $p+1$ ne la vérifie pas, ce qui fournit l'une des deux inégalités souhaitées.
► 2)a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(a) + u_n(b) = n$.
► 2)b) Si $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, par exemple $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{b}$, alors $bp = aq$. En déduire un élément de $E_p \cap E_q$.s
► 6) Utiliser le théorème de Beatty pour dégager une équation polynomiale de degré 2 dont a est racine.
► 8) $\varphi^2 = \varphi + 1$.