Devoir maison 3

*Vous traiterez **au choix** l'un des deux sujets suivants, le second étant sensiblement plus dur que le premier.*

▸ Exercice 1 : étude d'une fonction

Le but de cet exercice est l'étude de la fonction f définie par

$$f(x) = \left(\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)}\right)^{\frac{1}{\ln|2\cos(x)|}}.$$

On admet (ou rappelle) que $2 < e < 3$.

Partie I. Début de l'étude de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f. Justifier alors qu'il suffit de l'étudier sur $\mathcal{D}_f \cap \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$.

Partie II. Étude de fonctions auxiliaires

4. Dresser le tableau de variations complet, avec limites et extrema, de la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g : t \mapsto t\ln(t)$. *On justifiera soigneusement les limites, et on pourra à cet effet utiliser la valeur rencontrée en terminale de* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.
5. Soit $h : \left|\begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\ln(4-t)}{\ln t} \end{array}\right.$.
   a. Justifier que h est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer sa dérivée.
   b. À l'aide de la question 4, prouver que h est strictement décroissante sur $]0, 1[$.
   c. En déduire le sens de variation, sur $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction $k : x \mapsto h(4\cos^2(x))$.

Partie III. Retour à f

6. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{1-\sin(2x)} = |\cos x - \sin x|$. *Indication : on pourra utiliser une formule bien connue pour* $\sin(a+b)$.
7. Pour $x \in \mathcal{D}_f \cap \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donner une expression simple de $f(x)$. *On distinguera plusieurs cas, et on fera, lorsque c'est possible, intervenir la fonction k de la question 5.*
8. Déterminer les variations de f, et tracer sa courbe représentative sur $\mathcal{D}_f \cap [-\pi, \pi]$.

▸ Exercice 2 : théorème de Beatty et jeu de Wythoff

Si E est un ensemble fini, on note $\mathrm{Card}(E)$ le nombre d'éléments de E, appelé son cardinal.
Pour $a \in \mathbf{R}_+^*$, on note $E_a = \{\lfloor na \rfloor, n \in \mathbf{N}^*\}$.
On dit que deux parties non vides A et B de $\mathbf{N}^*$ forment une partition de $\mathbf{N}^*$ si :

i) $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire si A et B n'ont aucun élément en commun.

ii) $A \cup B = \mathbf{N}^*$.

Autrement dit, si et seulement si tout élément de $\mathbf{N}^*$ appartient à un et un seul des deux ensembles A et B.

Partie I. Le théorème de Beatty

1. Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $u_n(a) = \mathrm{Card}\left(\{p \in E_a \mid p \leqslant n\}\right) = \mathrm{Card}([\![1, n]\!] \cap E_a)$.
   - a. Justifier que si k, k' sont deux entiers naturels distincts, alors $\lfloor ka \rfloor \neq \lfloor k'a \rfloor$.
   - b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que le plus grand entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $\lfloor pa \rfloor \leqslant n$ vérifie $\dfrac{n+1}{a} - 1 \leqslant p < \dfrac{n+1}{a}$.
   - c. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{n+1}{a} - 1 \leqslant u_n(a) < \dfrac{n+1}{a}$.
   - d. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n(a)}{n}$ existe et calculer sa valeur.
2. Dans cette question, on suppose que p et q sont deux réels de $]1, +\infty[$ tels que E_p et E_q forment une partition de $\mathbf{N}^*$.
   - a. Prouver que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   - b. Montrer que $\dfrac{p}{q}$ est irrationnel. En déduire que p et q sont irrationnels.
3. On suppose à présent que p et q sont deux réels strictement positifs vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, avec p irrationnel. On souhaite prouver qu'alors E_p et E_q forment une partition de $\mathbf{N}^*$.
   - a. Justifier que $p > 1$ et que q est également irrationnel.
   - b. On suppose par l'absurde que $E_p \cap E_q \neq \emptyset$. Soit alors $i \in E_p \cap E_q$. Il existe donc deux entiers naturels non nuls n et m tels que $i = \lfloor np \rfloor = \lfloor mq \rfloor$.
     Prouver que $m + n - 1 < i < m + n$ et aboutir à une contradiction.
   - c. Soit $i \in \mathbf{N}^*$. On note alors $k = \left\lfloor \dfrac{i}{p} \right\rfloor$ et $j = \left\lfloor \dfrac{i}{q} \right\rfloor$.
     - i. On suppose que $i \notin E_p$. Montrer que $kp < i < kp + p - 1$.
     - ii. On suppose $i \notin E_p \cup E_q$. Montrer que $k + j < i < k + j + 1$.
     - iii. En déduire que $E_p \cup E_q = \mathbf{N}^*$.

Le résultat prouvé dans cette partie s'appelle le *théorème de Beatty* : quels que soient les réels p et q strictement plus grands que 1, E_p et E_q forment une partition de $\mathbf{N}^*$ si et seulement si p est irrationnel et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Partie II. Le nombre d'or

4. Justifier que l'équation $x^2 = x + 1$ possède une unique solution strictement positive φ, que l'on déterminera.
5. Prouver que φ est irrationnel, puis que E_φ et E_{φ^2} forment une partition de $\mathbf{N}^*$.
6. On suppose à présent que a est un réel strictement positif tel que E_a et E_{a^2} forment une partition de $\mathbf{N}^*$. Montrer alors que $a = \varphi$.

Dans la suite, on note $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ les deux suites définies par : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = \lfloor n\varphi \rfloor$ et $b_n = \lfloor n\varphi^2 \rfloor$.

7. Justifier que les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont strictement croissantes, et que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n < b_n$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n = a_n + n$.

Partie III. Le jeu de Wythoff

Cette dernière partie est facultative.

Deux joueurs s'affrontent au jeu suivant : ils ont devant eux deux piles de jetons, de tailles respectives $p \in \mathbf{N}^*$ et $q \in \mathbf{N}^*$, et jouent chacun leur tour.

À chaque tour de jeu, ils ont la possibilité de retirer un ou plusieurs jetons de la pile de leur choix, ou de retirer **le même nombre de jetons** des deux piles à la fois.

Celui qui retire les derniers jetons du jeu a gagné la partie.

Notons que le nombre de jetons en jeu étant une suite strictement décroissante d'entiers positifs, le jeu finit bien par désigner un vainqueur.

On peut donc représenter l'état du jeu à un instant donné par le couple $(a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ où a est le nombre de jetons de la première pile, et b est le nombre de jetons de la seconde pile.

Si avant qu'un joueur joue, le jeu est en position (a, b), alors après son tour, il sera dans une position de la forme $(a-k, b)$ (avec $1 \leqslant k \leqslant a$), ou $(a, b-k)$ (avec $1 \leqslant k \leqslant b$) ou $(a-k, b-k)$ (avec $1 \leqslant k \leqslant \min(a, b)$).

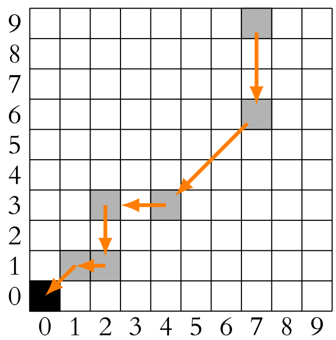
Par exemple, Lucas et Gaëlle s'affrontent lors d'une partie où les des tas contiennent initialement 7 et 9 jetons, et Gaëlle commence. Voici le déroulement de la partie.

- Gaëlle enlève trois jetons au second tas. Le jeu est en position $(7, 6)$.
- Lucas enlève trois jetons à chaque tas. Le jeu est en position $(4, 3)$.
- Gaëlle enlève deux jetons au premier tas. Le jeu est en position $(2, 3)$.
- Lucas enlève deux jetons au second tas. Le jeu est en position $(2, 1)$.
- Gaëlle enlève un jeton au premier tas. Le jeu est en position $(1, 1)$.
- Lucas enlève le dernier jeton de chaque tas. Lucas gagne.

Si on assimile les couples (a, b) aux cases d'un échiquier, la case en bas à gauche étant numérotée $(0, 0)$, un jeu équivalent serait le suivant : on place une dame sur une case, et à chaque tour les joueurs doivent déplacer la dame soit vers la gauche, soit vers le bas, soit en diagonale (vers le bas à gauche).

Le premier joueur qui atteint la case en bas à gauche gagne la partie.

Le schéma ci-dessous représente le déroulement de la partie décrite ci-dessus.



On note $\mathcal{F} = \{(a_n, b_n), n \in \mathbf{N}^*\} \cup \{(b_n, a_n), n \in \mathbf{N}^*\} \cup \{(0, 0)\}$, où $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ sont les suites définies à la partie II. Les éléments de $\mathcal{F}$ seront appelés **positions froides**.

9. Sachant que $a_1 = 1$, déterminer la liste des positions froides dont les deux coordonnées sont inférieures ou égales à 9. Autrement dit, décrire l'ensemble $\mathcal{F} \cap [\![0, 9]\!]^2$. *On pourra avec profit représenter ces positions sur une grille comme ci-dessus et s'en servir de support pour les questions suivantes.*

10. Soit (i, j) une position froide autre que $(0, 0)$. Montrer que $i \neq j$ puis que $(i, j) = \begin{cases} (a_{j-i}, b_{j-i}) & \text{si } i < j \\ (b_{i-j}, a_{i-j}) & \text{si } j > i \end{cases}$

11. Montrer que si le jeu se trouve dans une position froide (autre que $(0, 0)$) avant qu'un joueur joue, alors il ne peut pas être dans une position froide après qu'il ait joué.

12. Supposons à présent qu'avant le tour d'un joueur, le jeu se trouve dans une position $(i, j) \notin \mathscr{F}$.
Le but de cette question est alors de prouver qu'en jouant intelligemment, le joueur peut amener le jeu à une position froide.
Quitte à échanger les deux tas, faisons l'hypothèse que $i \leqslant j$.
   a. Prouver le résultat demandé si $i = j$, puis si $i = 0$.
   b. On suppose que $i \geqslant a_{j-i}$.
      i. Montrer qu'on a nécessairement $i > a_{j-i}$.
      ii. Justifier qu'en enlevant des jetons aux deux tas en même temps, le joueur peut amener le jeu à une position froide.
   c. Prouver également que si $i < a_{j-i}$, alors en enlevant des jetons à la seconde pile, on peut amener le jeu en position froide. *On se souviendra qu'en vertu de la question 5 , $i \in E_\varphi \cup E_{\varphi^2}$.*
13. Au début du jeu les deux tas contiennent respectivement p jetons et q jetons. Vous avez la possibilité de choisir si vous commencez ou non. Que choisissez-vous et comment jouez-vous par la suite pour être certain de gagner à coup sûr ?
En particulier, si les deux tas contiennent initialement 12 et 18 jetons, commencez-vous et quel sera votre premier coup ?

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 3

► Exercice 1 : étude d'une fonction

Partie I. Début de l'étude de f.

1. Puisque les fonctions $x \mapsto 1+\sin(2x)$ et $x \mapsto 1-\sin(2x)$ sont positives sur $\mathbf{R}$, le réel $f(x)$ est bien défini si et seulement si $|2\cos x| \neq 0$ et $\ln|2\cos x| \neq 1$.
La première condition est équivalente à $\cos x \neq 0$, ce qui est le cas si et seulement si x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
La seconde est équivalente à $2|\cos x| \neq 1 \Leftrightarrow \cos x \neq \pm\frac{1}{2}$. Ce qui est le cas si et seulement si x n'est pas de la forme $\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, ni de la forme $\frac{2\pi}{3}+k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
Autrement dit, $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbf{R} \setminus \left(\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right\}\right).}$

Remarque
Les racines ne sont pas un vrai problème puisque pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 \leqslant \sin(2x) \leqslant 1$, et donc $1 \pm \sin(2x) \geqslant 0$.

2. Commençons par noter que $\mathscr{D}_f$ est bien symétrique, donc les notions de parité/imparité ont bien un sens.
Rappelons que sin est impaire et cos est paire, de sorte que pour $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(-x) = \left(\sqrt{1-\sin(-2x)}+\sqrt{1+\sin(-2x)}\right)^{\frac{1}{\ln|2\cos(-x)|}} = \left(\sqrt{1+\sin(2x)}+\sqrt{1-\sin(2x)}\right)^{\frac{1}{\ln|2\cos(x)|}} = f(x).$$

Donc $\boxed{f \text{ est paire.}}$

Puisque sin et cos sont 2π-périodique, f l'est aussi.
Mieux : $\sin(2(x+\pi)) = \sin(2x+2\pi) = \sin(2x)$ et $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, de sorte que $|2\cos(x+\pi)| = |2\cos x|$.
Et donc $f(x+\pi) = f(x)$: $\boxed{f \text{ est } \pi\text{-périodique.}}$
Par π-périodicité de f, il suffit de l'étudier sur $\mathscr{D}_f \cap [-\pi,\pi]$ (puis d'effectuer des translations de vecteur $k\pi\vec{i}$, $k \in \mathbf{Z}$), et par parité, on peut pour cela se limiter à une étude sur $\mathscr{D}_f \cap \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (puis effectuer une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

3. Revenons à la définition d'une puissance non entière : pour $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(x) = \exp\left(\frac{1}{\ln|2\cos x|}\ln\left(\sqrt{1-\sin(2x)}+\sqrt{1+\sin(2x)}\right)\right).$$

Lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, on a $\sin(2x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 1$, et donc $\sqrt{1+\sin(2x)}+\sqrt{1-\sin(2x)} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} \sqrt{2}$.
Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} |2\cos(x)| = 0$, et donc[1] $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln|2\cos(x)| = -\infty$.
Donc $\dfrac{1}{\ln|2\cos(x)|} \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} e^0 = 1$.
Et donc $\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en } \frac{\pi}{2} \text{ en posant } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.}$

[1] $|2\cos(x)|$ reste positif.

Étude de fonctions auxiliaires

4. La fonction g est dérivable[2] sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$g'(t) = \ln(t) + \frac{t}{t} = 1+\ln(t).$$

On a donc $g'(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1+\ln(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(t) \geqslant -1 \Leftrightarrow t \geqslant e^{-1}$.

Par ailleurs, il est évident que $\lim\limits_{t\to+\infty} t\ln(t) = +\infty$.
Et pour la limite en 0^+, procédons au changement de variable $x = \frac{1}{t}$, de sorte que

$$\lim_{t\to0^+} g(t) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1/x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

Donc le tableau de variations de g est

[2] Car produit de deux fonctions que l'on sait dérivables.

Rappel
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0.$

t	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

5.a. La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ car quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. On a alors, pour tout $t \in]0,1[$,

$$h'(t) = \frac{\frac{-1}{4-t}\ln(t) - \frac{1}{t}\ln(4-t)}{(\ln t)^2} = -\frac{t\ln(t) + (4-t)\ln(4-t)}{t(4-t)\ln(t)^2} = \boxed{-\frac{g(t)+g(4-t)}{t(4-t)\ln(t)^2}}.$$

5.b. Il est clair que le dénominateur de $h'(t)$ est positif strictement sur $]0,1[$.
Ensuite, pour $t \in]0,1[$, $3 < 4-t < 4$, et donc par croissance de g sur $[e^{-1}, +\infty[$, pour tout $t \in]0,1[$, $g(4-t) \geqslant g(3) \geqslant 3$.
Et d'autre part, $-\frac{1}{2} \leqslant -e^{-1} \leqslant g(t)$, de sorte que $g(t) + g(4-t) \geqslant 3 - \frac{1}{2} > 0$.
On en déduit que pour tout $t \in]0,1[$, $h'(t) < 0$, et donc que $\boxed{h \text{ est strictement décroissante.}}$

5.c. Sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, cos est strictement décroissante, et à valeurs dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, donc $4\cos^2$ est décroissante, à valeurs dans $]0,1[$.
Et donc par composition de fonctions décroissantes, k bien définie, et $\boxed{\text{croissante sur } \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[}$.

Partie III. Retour à f

6. La formule évoquée par l'énoncé n'est autre que $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$.
Qui donne en particulier $\sin(2x) = \sin(x+x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\sin(2x)} &= \sqrt{1-2\cos(x)\sin(x)} = \sqrt{\cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x)}\\ &= \sqrt{(\sin(x)-\cos(x))^2} = \boxed{|\sin(x)-\cos(x)|.}\end{aligned}$$

7. Sur le même principe qu'à la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sqrt{1+\sin(2x)} = \sqrt{1+2\sin(x)\cos(x)} = \sqrt{(\sin(x)+\cos(x))^2} = |\sin(x)+\cos(x)|.$$

Notons que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x)+\cos(x) \geqslant 0$, et donc $|\sin(x)+\cos(x)| = \sin(x)+\cos(x)$.
Par ailleurs, pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(x) - \sin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant \sin(x) \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
Donc pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $|\cos(x)-\sin(x)| = \cos(x)-\sin(x)$.
Et pour $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, $|\cos(x)-\sin(x)| = \sin(x)-\cos(x)$.

> **Détails**
> Il existe plein de manières de prouver ceci (bien que ce soit assez clair sur un cercle trigo).
> Le plus simple est sans doute de constater que la fonction $\cos - \sin$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et qu'elle s'annule en $\frac{\pi}{4}$, de sorte qu'elle est positive avant $\frac{\pi}{4}$ et négative après.

Donc pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a

$$\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)} = (\cos(x)-\sin(x)) + (\cos(x)+\sin(x)) = 2\cos(x).$$

Et ainsi, pour $x \in \mathscr{D}_f \cap \left[0, \frac{\pi}{4}\right] = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$,

$$f(x) = (2\cos(x))^{\frac{1}{\ln|2\cos(x)|}} = \exp\left(\frac{1}{\ln(2\cos(x))}\ln(2\cos(x))\right) = e^1 = e.$$

Donc f est constante égale à e sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$!

Pour $x \in \mathscr{D}_f \cap \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\sqrt{1-\sin(2x)} + \sqrt{1+\sin(2x)} = (\sin(x)-\cos(x)) + (\cos(x)+\sin(x)) = 2\sin(x).$$

Et donc

$$f(x) = (2\sin(x))^{\frac{1}{\ln|2\cos(x)|}} = \exp\left(\frac{1}{\ln(2\cos(x))}\ln(2\sin x)\right).$$

► **Sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$** : on a $\cos(x) \geqslant \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, et donc $\ln(2\cos(x)) > 0$.
Mais alors, $x \mapsto 2\cos(x)$ est décroissante, donc $x \mapsto \ln(2\cos(x))$ est décroissante, et à

valeurs positives, donc par composition par la fonction inverse[3], $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(2\cos(x))}$ est croissante.

[3] Décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

Puisque $x \mapsto \ln(2\sin(x))$ est également croissante sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$, on en déduit que $x \mapsto \dfrac{1}{\ln(2\cos x)}\ln(2\sin(x))$ est croissante sur $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right[$.
Et donc f l'est aussi, par composition avec la fonction exponentielle qui est croissante.

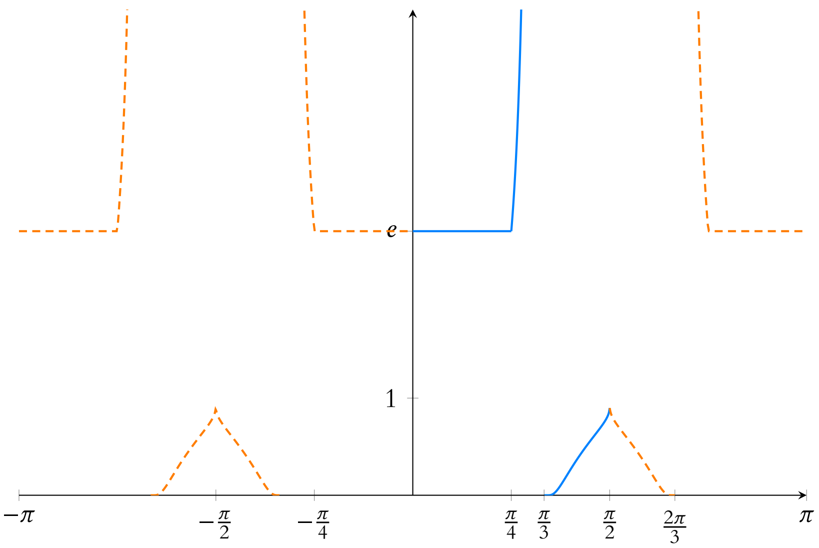
▸ **Sur $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$** : pour $x \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$k(x) = \frac{\ln(4-4\cos^2(x))}{\ln(4\cos^2(x))} = \frac{\ln(4\sin^2(x))}{\ln(4\cos^2(x))} = \frac{\ln\left((2\sin(x))^2\right)}{\ln\left((2\cos(x))^2\right)} = \frac{\ln(2\sin(x))}{\ln(2\cos(x))}.$$

Et donc $f(x) = \exp(k(x))$. Puisque nous avons mentionné que k est croissante, par composition par l'exponentielle, f l'est aussi sur $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque

Contrairement au cas précédent, $x \mapsto \ln(2\cos x)$ n'est plus à valeurs positives, même si elle reste décroissante. Mais alors, faute d'avoir des fonctions positives, on ne peut plus rien dire de la monotonie du produit.



8.

Figure 0.1 – En trait plein, le tracé initial. En pointillés, les parties de la courbe obtenues par symétries et translations.

▸ Exercice 2 : théorème de Beatty et jeu de Wythoff

Partie I. Le théorème de Beatty

1.a. Soient donc k, k' deux entiers distincts, et quitte à les échanger, supposons $k < k'$, si bien que $k' \geqslant k+1$. On a alors

$$\lfloor k'a \rfloor > k'a - 1 \geqslant (k+1)a - 1 \geqslant ka + (a-1) \geqslant ka \geqslant \lfloor ka \rfloor.$$

Et donc on a bien $\lfloor k'a \rfloor > \lfloor ka \rfloor$, si bien que ces deux entiers sont distincts.

1.b. Nous savons que pour $p \in \mathbf{N}$, $\lfloor pa \rfloor \leqslant n \Leftrightarrow pa < n+1$. Soit encore si et seulement si $p < \dfrac{n+1}{a}$.
Donc déjà, si p est le plus grand des tels entiers, alors $p\dfrac{n+1}{a}$.
Et alors $p+1$, qui est strictement plus grand que p, ne vérifie plus $\lfloor (p+1)a \rfloor \leqslant n$, donc on a $(p+1)a \geqslant n+1$, soit encore $p \geqslant \dfrac{n+1}{a} - 1$.

Et donc on a bien $\boxed{\dfrac{n+1}{a} - 1 \leqslant p < \dfrac{n+1}{a}}$.

1.c. Puisque les $\lfloor pa \rfloor$, pour $p \in \mathbf{N}^*$ sont deux à deux distincts, il s'agit de compter le nombre de $p \in \mathbf{N}^*$ tels que $\lfloor pa \rfloor \leqslant n \Leftrightarrow pa < n+1$.
Autrement dit, $u_n(a) = \operatorname{Card}\{p \in \mathbf{N}^* \mid \lfloor pa \rfloor \leqslant n\}$.
Mais si on note p_0 le plus grand des tels p, on a donc $\{p \in \mathbf{N}^* \mid \lfloor pa \rfloor \leqslant n\} = [\![1, p_0]\!]$, qui est donc de cardinal p_0.

⚠ Attention !

Si les $\lfloor pa \rfloor$ n'étaient pas deux à deux distincts, ça ne fonctionnerait pas : il pourrait y avoir plus de p que d'éléments de E_a.

Et donc en utilisant la caractérisation de p_0 obtenue à la question précédente, il vient bien $\boxed{\dfrac{n+1}{a} - 1 \leqslant u_n(a) < \dfrac{n+1}{a}.}$ ù

1.d. On a donc, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{n+1}{na} - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{u_n(a)}{n} < \dfrac{n+1}{na}$.
Soit encore $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{na} - \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{u_n(a)}{n} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{na}$.
Mais les termes de droite et de gauche de l'encadrement précédent tendent tous deux vers n, donc par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n(a)}{n} = \dfrac{1}{a}.}$

2.a. Si E_p et E_q forment une partition de $\mathbf{N}^*$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$[\![1, n]\!] = [\![1, n]\!] \cap \mathbf{N}^* = ([\![1, n]\!] \cap E_p) \cup ([\![1, n]\!] \cap E_q),$$

et ces deux ensembles sont disjoints .
En particulier, on a donc

Autrement dit
$[\![1, n]\!] \cap E_p$ et $[\![1, n]\!] \cap E_q$ forment une partition de $[\![1, n]\!]$

$$n = \mathrm{Card}([\![1, n]\!]) = \mathrm{Card}([\![1, n]\!] \cap E_p) + \mathrm{Card}([\![1, n]\!] \cap E_q) = u_n(p) + u_n(q).$$

Et donc pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $1 = \dfrac{u_n(p)}{n} + \dfrac{u_n(q)}{n}$, si bien que par passage à la limite, $1 = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$.

2.b. Supposons par l'absurde que $\dfrac{p}{q}$ soit rationnel, notons $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{b}$, avec a, b entiers.
Alors $bp = qa$, et donc $\lfloor bp \rfloor = \lfloor qa \rfloor$, si bien que si on pose $n = \lfloor bp \rfloor$, alors $n \in E_p$, et puisque $n = \lfloor aq \rfloor$, alors $n \in E_q$.
Et donc $n \in E_p \cap E_q$, contredisant le fait que E_p et E_q sont disjoints.
Donc déjà, $\dfrac{p}{q}$ est irrationnel.

Si à présent l'un des deux nombres p et q était rationnel, disons p, alors on aurait $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{q-1}{q}$ et donc $p = \dfrac{q}{q-1} \in \mathbf{Q}$.
Et donc $\dfrac{p}{q}$ serait également rationnel puisque quotient de deux rationnels. Or nous venons de prouver que $\dfrac{p}{q}$ est irrationnel, donc $\boxed{p \text{ et } q \text{ sont tous deux irrationnels.}}$

3.a. On a $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q} < 1$, et donc $p > 1$.
Supposons par l'absurde que q soit rationnel. Alors $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q}$ est rationnel, et donc p est également rationnel[4].
Ceci est absurde puisqu'on a supposé p irrationnel, et donc q est irrationnel.

3.b. Puisque $i = \lfloor np \rfloor$, alors[5] $i \leqslant np < i+1$.
Notons que la première inégalité ne peut être une égalité car si on avait $np = i$, alors $p = \dfrac{i}{n}$ serait rationnel.
Donc $i < np < i+1 \Leftrightarrow np - 1 < i < np \Leftrightarrow n - \dfrac{1}{p} < \dfrac{i}{p} < n$.
De même, $m - \dfrac{1}{q} < \dfrac{i}{q} < m$.
Et donc en ajoutant ces deux inégalités, il vient $m + n - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} < i\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}\right) < m + n$.
Mais par hypothèse, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, donc on a bien $m + n - 1 < i < m + n$.
Mais alors i est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs, ce qui est impossible.
On en déduit donc que $\boxed{E_p \cap E_q = \emptyset.}$

3.c.i. On a, par définition de la partie entière, $k \leqslant \dfrac{i}{p} < k+1 \Leftrightarrow kp \leqslant i < kp + p$.
Puisque p est irrationnel et k et i entiers, $i \neq kp$, et donc $kp < i$.

[4] Car inverse d'un rationnel.

[5] Par définition de la partie entière.

Pour la seconde inégalité, supposons par l'absurde que $kp + p - 1 \leqslant i$.
Alors $kp + p - 1 \leqslant i < kp + p$, soit encore $i < kp + p < i + 1$.
Puisque i est entier, on aurait alors $i = \lfloor kp + p \rfloor = \lfloor (k+1)p \rfloor$.
Mais ce n'est pas possible puisqu'on a supposé que $i \notin E_p$.
Et donc il vient bien $\boxed{kp < i < kp + p - 1.}$

3.c.ii. L'inégalié précédente s'écrit encore $k < \dfrac{i}{p} < i + 1 - \dfrac{1}{p}$.
Sur le même principe, on a $j < \dfrac{i}{q} < j + 1 - \dfrac{1}{q}$.
Et donc en sommant les inégalités ainsi obtenues, il vient

$$k + j < i\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) < k + j + 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \Leftrightarrow k + j < i < k + j + 1.$$

Et ceci est absurde car cela signifierait que i est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs.

3.c.iii. De ce qui précède, on déduit que pour tout $i \in \mathbf{N}^*$ est soit dans E_p, soit dans E_q.
Autrement dit, $\mathbf{N}^* = E_p \cup E_q$.
Puisque nous avons déjà prouvé que ces ensembles sont disjoints, on en déduit que $\boxed{E_p \text{ et } E_q \text{ forment bien une partition de } \mathbf{N}^*.}$

Partie II. Le nombre d'or

4. Il s'agit d'une équation du second degré : $x^2 - x - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$.
Elle possède donc deux solutions réelles qui sont $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Puisque $\sqrt{5} > 1$, cette seconde solution est évidemment négative, et donc $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ est la seule solution positive de l'équation.

5. Pour prouver que E_φ et E_{φ^2} forment une partition de $\mathbf{N}^*$, appliquons le théorème de Beatty : puisque φ est irrationnel[6], il suffit donc de prouver que $\dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^2} = 1$.
Or $\varphi^2 = \varphi + 1$, donc $\dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^2} = \dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi+1} = \dfrac{\varphi + 1 + \varphi}{\varphi(\varphi+1)} = \dfrac{2\varphi+1}{\varphi^2+\varphi} = \dfrac{2\varphi+1}{\varphi+1+\varphi} = 1$.
Et donc $\boxed{E_\varphi \text{ et } E_{\varphi^2} \text{ forment bien une partition de } \mathbf{N}^*.}$

[6] Car $\sqrt{5}$ l'est, ce qui se prouve comme l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

6. Par la partie I, a est irrationnel, et doit vérifier $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2} = 1$. Soit encore[7] $a + 1 = a^2$.
Puisque cette équation admet une unique solution positive, qui est φ, on en déduit que $a = \varphi$.

[7] Après multiplication par a^2.

7. La stricte croissance de ces suites a quasiment été prouvée à la question 1.a : pour $n \in \mathbf{N}^*$, on a $n < n + 1$, et donc $\lfloor n\varphi \rfloor < \lfloor (n+1)\varphi \rfloor$ soit encore $a_n < a_{n+1}$, et le raisonnement est le même pour b_n.

Enfin, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $n\varphi < n\varphi^2$, et donc $\lfloor n\varphi \rfloor \leqslant n\varphi \leqslant n\varphi^2$. En particulier, $a_n \leqslant n\varphi^2$.
Et donc nécessairement $a_n \leqslant \lfloor n\varphi^2 \rfloor$, donc $a_n \leqslant b_n$.
Si on avait de plus l'égalité $a_n = b_n$, alors $a_n \in E_\varphi$ et $b_n \in E_{\varphi^2}$, et donc $a_n \in E_\varphi \cap E_{\varphi^2}$, contredisant le fait que $E_\varphi \cap E_{\varphi^2} = \emptyset$.
Donc on a bien $\boxed{a_n < b_n.}$

Rappel
Pour $n \in \mathbf{Z}$ et $x \in \mathbf{R}$, $n \leqslant x \Leftrightarrow n \leqslant \lfloor x \rfloor$.

8. Puisque $\varphi^2 = \varphi + 1$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\lfloor n\varphi^2 \rfloor = \lfloor n(\varphi+1) \rfloor = \lfloor n\varphi + n \rfloor = \lfloor n\varphi \rfloor + n = \boxed{a_n + n.}$$

Rappel
Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

Partie III. Le jeu de Wythoff

9. Puisque $a_1 = 1$, on a donc $b_1 = a_1 + 1 = 2$.
Ne perdons pas de vue que $E_\varphi = \{a_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ et $E_{\varphi^2} = \{b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$, et que par la partie II, $\mathbf{N}^* = E_\varphi \cup E_{\varphi^2}$.
Donc tout entier strictement positif est soit un élément de la suite (a_n), soit un élément de

la suite (b_n).

En particulier, 3 est un élément d'une de ces deux suites.
Supposons qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $b_p = 3$, alors on aurait $a_1 = 1 < a_2 \leqslant a_p < b_p = 3$, et donc $a_2 = 2$.
Mais 2 est déjà une valeur prise par (b_n), donc n'est pas une valeur prise par (a_n). D'où une contradiction.
De même, supposons qu'il existe $p \geqslant 3$ tel que $a_p = 3$. Alors $1 < a_2 < a_p = 3$, et donc pour les mêmes raisons que ci-dessus, c'est absurde.
Donc nécessairement $a_2 = 3$. Et donc $b_2 = a_2 + 3 = 5$.

Sur le même principe, 4 doit être un élément d'une de ces deux suites, et nécessairement $4 = a_3$. Donc $b_3 = a_3 + 3 = 7$.
Puis $6 = a_4$, donc $b_4 = 10$.
Et alors pour $n \geqslant 5$, $b_n > 10$, si bien que $(a_n, b_n) \notin [\![0,9]\!]^2$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{F} \cap [\![0,9]\!]^2 = \{(0,0),(1,2),(2,1),(3,5),(5,3),(4,7),(7,4)\}.}$

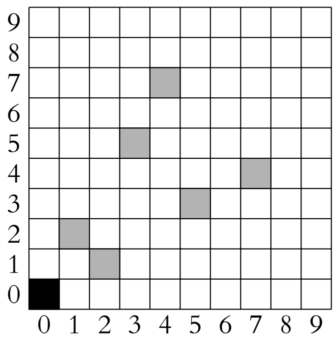


FIGURE 0.2 – Les positions froides à coordonnées dans $[\![0,9]\!]^2$.

10. Si $(i,j) \in \mathcal{F}$ est différent de $(0,0)$, alors il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $(i,j) = (a_p, b_p)$ ou $(i,j) = (b_p, a_p)$. Dans les deux cas, puisque[8] $a_p \neq b_p$, on a bien $i \neq j$.

[8] Encore une fois : E_φ et E_{φ^2} n'ont pas d'éléments en commun.

Supposons à présent que $i < j$. Pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $b_p > a_p$, donc il ne peut pas exister d'entier $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $(i,j) = (b_p, a_p)$.
Donc[9] il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $(i,j) = (a_p, b_p)$.
Or $b_p = a_p + p$, donc nécessairement, $p = b_p - a_p = j - i$, si bien que $(i,j) = (a_{j-i}, b_{j-i})$.
De même, si $j > i$, alors il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $(i,j) = (b_p, a_p)$, et donc $i = b_p = a_p + p = j + p$, si bien que $p = i - j$ et donc $(i,j) = (b_{i-j}, a_{i-j})$.

[9] Rappelons que (i,j) est une position froide.

11. Notons (i,j) une position froide. Il s'agit de prouver que pour $k \in [\![1,i]\!]$, $(i-k, j) \notin \mathcal{F}$, que pour $k \in [\![1,j]\!]$, $(i, j-k) \notin \mathcal{F}$ et que pour $k \in [\![1, \min(i,j)]\!]$, $(i-k, j-k) \notin \mathcal{F}$.

Quitte à échanger les deux tas, on peut supposer que $i \leqslant j$, de sorte que par la question précédente, $(i,j) = (a_{j-i}, b_{j-i})$.
Soit alors $k \in [\![1,i]\!]$, et supposons par l'absurde que $(i-k, j) \in \mathcal{F}$.
Puisque $i - k \leqslant j$, comme expliqué à la question précédente, $(i-k, j) = (a_{j-i+k}, b_{j-i+k})$.
Mais alors $b_{j-i+k} = b_{j-i}$, ce qui est impossible puisque $i - j + k > i - j$ et que $(b_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante.

De même, supposons que $(i, j-k) \in \mathcal{F}$. Alors soit $i < j-k$, et alors $(i, j-k) = (a_{j-i+k}, b_{j-i+k})$, ce qui est impossible car $(a_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.
Soit $j - k < i$, mais alors $(i, j-k) = (b_{i-j+k}, a_{i-j+k})$.
En particulier, on en tire $a_{j-i} = b_{i-j+k}$, ce qui est impossible car $E_\varphi \cap E_{\varphi^2} = \emptyset$.

Rappel
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \in E_\varphi$ et $b_n \in E_{\varphi^2}$.

Enfin, supposons que $(i-k, j-k) \in \mathcal{F}$.
Alors $(i-k, j-k) = (a_{j-k-(i-k)}, b_{j-k-(i-k)}) = (a_{j-i}, b_{j-i}) = (i,j)$, ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\text{si le jeu est en position froide avant le tour d'un joueur, il ne l'est plus après son tour.}}$
Commentaire *: ce qu'on vient de prouver, c'est en fait que dans chaque ligne, chaque colonne, et*

chaque «diagonale» (droite de pente 1), se trouve au plus une position froide. Et donc que partant d'une position froide, un mouvement le long d' une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale ne peut pas aboutir à une autre position froide.

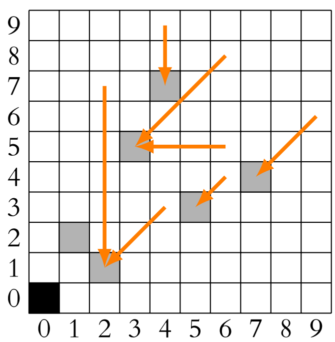
12.a. Si $i = j$, alors il suffit de retirer i jetons aux deux piles pour gagner.
De même, si $i = 0$, il suffit de retirer j jetons à la seconde pile pour gagner.

12.b.i. Si on avait $i = a_{j-i}$, alors on aurait $j = i + (j - i) = a_{j-i} + j - i = b_{j-i}$.
Mais alors $(i, j) = (a_{j-i}, b_{j-i}) \in \mathscr{F}$, ce qui n'est pas le cas. Donc $i > a_{j-i}$.

12.b.ii. Il s'agit donc de prouver qu'il existe $k \in \mathbf{N}^*$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tel que $(i - k, j - k) = (a_q, b_q)$.
Mais si deux tels entiers k et q existent, alors par la question 10, $(i - k, j - k) = (a_{j-i}, b_{j-i})$, et donc $i - k = a_{j-i}$, de sorte que $k = i - a_{j-i}$.

Posons donc $k = i - a_{j-i} > 0$ et prouvons que retirer k jetons aux deux tas permet d'amener le jeu à une position froide.
On a $i - k = i - (i - a_{j-i}) = a_{j-i}$. Et $j - k = j - i + a_{j-i} = b_{j-i}$ par la question 8.
Et donc $(i - k, j - k) = (a_{j-i}, b_{j-i}) \in \mathscr{F}$, donc enlever k jetons aux deux tas emmène bien le jeu en position froide.

12.c. Supposons à présent que $i < a_{j-i}$. Comme nous avons déjà traité le cas $i = 0$, supposons $i > 0$, si bien que $i \in \mathbf{N}^* = E_\varphi \cup E_{\varphi^2}$.
▶ Si $i \in E_{\varphi^2} = \{b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$, notons n l'unique[10] entier tel que $i = b_n$.
Puisque $j > i$, $j > b_n > a_n$.
Et donc si on note $k = j - a_n$, on a $j - k = a_n$, si bien que retirer k jetons de la seconde pile emmène le jeu en position $(b_n, a_n) \in \mathscr{F}$.
▶ Si $i \in E_\varphi = \{a_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ notons l'unique entier tel que $i = a_n$.
Et alors $i < a_{j-i}$ si bien que $a_n < a_{j-i}$. Par stricte croissance de la suite $(a_p)_{p\geqslant 1}$, on a donc $n < j - i$. Et donc $j > n + i = n + a_n = b_n$.
Si on note $k = j - b_n > 0$, on a donc $j - k = b_n$, si bien qu'en enlevant k jetons à la seconde pile, on emmène le jeu en position $(a_n, b_n) \in \mathscr{F}$.
L'idée qui a été développée dans cette question est que si à un moment le jeu se trouve au dessus ou à gauche d'une position froide, alors il est toujours possible, en enlevant des jetons à l'un ou l'autre des deux tas, de se retrouver dans cette position froide.
Et que si ce n'est pas le cas (c'est-à-dire si on est en dessous de la seule position froide de la colonne, et à droite de la seule position froide de la ligne), alors en enlevant des jetons aux deux tas (donc en se déplaçant en diagonale), alors il est possible de rejoindre une position froide.
La figure ci-dessous indique les déplacements à effectuer depuis quelques positions qui ne sont pas froides.



[10] L'unicité découle de la stricte croissance de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$.

13. Si (p, q) est une position froide, laissons notre adversaire commencer. Alors par la question 11, quel que soit le coup qu'il joue, il n'amènera pas le jeu en position froide.
Et par la question 12, au tour suivant, nous pourrons amener le jeu en position froide. Puis quel que soit le coup joué par notre adversaire, il ne pourra pas amener le jeu en position froide. Et ainsi de suite, si à chaque tour on joue un coup qui nous emmène en position froide, au tour suivant notre adversaire ne pourra pas le faire. Donc nous finirons par gagner.

En revanche, si (p, q) n'est pas une position froide, choisissons de commencer, et au premier tour, amenons le jeu en position froide. On se retrouve alors dans la configuration précédente, et en amenant à chaque tour le jeu en position froide, nous sommes assurés de gagner.

Pour l'exemple donné, il s'agit donc de déterminer si $(12, 18)$ est une position froide ou non.
Mais en prolongeant les calculs de la question 9, on a $a_5 = 8$, donc $b_5 = 13$. Puis $a_6 = 9$ donc $b_6 = 15$. donc $a_7 = 11$ et $b_7 = 18$, puis enfin $a_8 = 12$ donc $b_8 = 20$.
Donc $(12, 18)$ n'est pas une position froide : c'est à nous de commencer.
On a $12 > a_{18-12} = 9$, donc comme expliqué dans la question 12.b.ii, il faut enlever $3 = 12 - 9$ jetons aux deux tas, ce qui nous emmène en position $(9, 15) = (a_6, b_6)$, qui est donc une position froide.