DEVOIR MAISON 3

► Exercice : étude d'une fonction

On note f la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\sqrt{|x(x+3)|}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, sauf en un point x_0 que l'on précisera.
   *Vous prendrez bien soin de justifier que f **n'est pas dérivable** en x_0, par exemple en étudiant* $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$.
3. Déterminer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(f(x))$, puis en déduire une expression de f' en fonction f.
   Dresser alors un tableau de variations de f (sans les limites).
4. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
   En déduire que f se prolonge en une fonction $\widetilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continue en 0.
5. Prouver que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0, et déterminer $\widetilde{f}'(0)$.
6. **Comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$**
   a. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite finie, que l'on notera a.
   b. Soit u la fonction définie sur $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$ par $u(t) = e^{-t^2}\sqrt{1+3t}$.
      Justifier que u est dérivable en 0 et calculer $u'(0)$.
   c. En déduire l'existence d'une asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$, et donner une équation de cette asymptote.
7. Conduire une étude similaire à celle de la question 6 au voisinage de $-\infty$.
8. Tracer soigneusement la courbe représentative de f en faisant apparaître tous les éléments d'étude précédemment évoqués.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 3

1. Puisqu'une valeur absolue est toujours positive ou nulle, $\sqrt{|x(x+3)|}$ est défini pour tout $x \in \mathbf{R}$.
En revanche, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ n'est défini que pour $x \neq 0$, donc $\boxed{\text{l'ensemble de définition de } f \text{ est } \mathbf{R}^*.}$

2. Notons que $x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ est dérivable sur son ensemble de définition car composée de deux fonctions dérivables[1].
En revanche, la fonction racine carrée, bien que définie sur $\mathbf{R}_+$, n'est dérivable que sur $\mathbf{R}_+^*$.
Or $|x(x+3)| = 0$ si et seulement si $x \notin \{0, -3\}$.
Sur $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$, on a $\sqrt{|x(x+3)|} = \sqrt{x(x+3)}$.
Or la fonction $x \mapsto x(x+3)$ est dérivable[2] sur $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$, et y prend ses valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.
Donc par composition avec $t \mapsto \sqrt{t}$, dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x(x+3)}$ est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$.
Sur $]-3, 0[$, $|x(x+3)| = -x(x+3)$, et donc $\sqrt{|x(x+3)|} = \sqrt{-x(x+3)}$.
Mais comme ci dessus, $x \mapsto -x(x+3)$ est dérivable sur $]-3, 0[$, à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, et donc par composition avec $t \mapsto \sqrt{t}$, dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, $x \mapsto \sqrt{-x(x+3)}$ est dérivable sur $]-3, 0[$.
Ainsi, $x \mapsto \sqrt{|x(x+3)|}$ est dérivable sur $]-\infty, -3[\cup]-3, 0[\cup]0, +\infty[$, et donc par produit de fonctions dérivables, il en est de même de f.
Ceci prouve donc que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$, sauf peut-être en -3.

Mais ceci ne signifie pas que f n'est pas dérivable en -3, seulement que les théorèmes habituels sur la somme/le produit/la composée de fonctions dérivables ne s'appliquent pas, et donc ne disent rien de la dérivabilité de f en -3.
Afin de justifier que f n'est pas dérivable en -3, revenons à la définition de la dérivabilité, et prouvons que le taux d'accroissement de f en -3 n'admet pas de limite finie.
Pour $x \neq -3$, on a

$$\left|\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}\right| = \left|\frac{f(x)}{x+3}\right| = e^{-\frac{1}{x^2}}\frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x+3|}}{|x+3|} = \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}\sqrt{|x|}}_{\xrightarrow[x\to-3]{} e^{-1/9}\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{|x+3|}} \xrightarrow[x\to-3]{} +\infty.$$

Et donc le taux d'accroissement de f en -3 ne peut pas admettre de limite finie a, faute de quoi sa valeur absolue tendrait vers $|a|$.
On en déduit donc que f n'est pas dérivable en -3.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathscr{D}_f \text{ sauf en } -3.}$

Remarque
Nous dirons plus tard qu'il y a une tangente verticale (=de coefficient directeur «infini») au graphe de f au point d'abscisse -3.

3. Notons que pour x différent de 0 et -3, on a $\ln(f(x)) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2}\ln|x(x+3)|$.
En dérivant les deux membres de cette égalité, il vient, pour tout $x \notin \{-3, 0\}$,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2}\frac{2x+3}{x(x+3)} = \frac{4x+12+2x^3+3x^2}{2x^3(x+3)}.$$

Soit encore $\boxed{f'(x) = \dfrac{4x+12+2x^3+3x^2}{2x^3(x+3)}f(x).}$

Puisque f est clairement positive, il suffit d'étudier le signe de $\dfrac{2x^3+3x^2+4x+12}{2x^3(x+3)}$ pour obtenir le signe de $f'(x)$.

On constate aisément que -2 est racine du numérateur, et donc $2x^3+3x^2+4x+12$ se factorise par $x+2$: après calculs on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$2x^3+3x^2+4x+12 = (x+2)(2x^2-x+6).$$

Or, le discriminant de $2x^2-x+6$ est $1-48 < 0$, donc ce dernier polynôme ne possède pas de racine, et par conséquent est toujours positif[3].
On en déduit que $2x^3+3x^2+4x+12$ est du signe de $x+2$.

Dérivée
Rappelons que la dérivée de $\ln|u|$ est $\frac{u'}{u}$.

Plus simplement
Puisque la fonction logarithme est strictement croissante, f et $\ln(f)$ ont les mêmes variations.
On préfère s'intéresser à $\ln(f)$ car sa dérivée est plus simple.

[1] Sur $\mathbf{R}^*$ pour la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ et sur $\mathbf{R}$ pour l'exponentielle.

[2] Car polynomiale.

[3] Car son coefficient de degré 2 est positif.

x	$-\infty$		-3		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^3(x+3)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$f(-2)$	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	

4. Pour $x > 0$, $\sqrt{|x(x+3)|} = x\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}$.

Et donc lorsque $x \to +\infty$, $1 + \dfrac{3}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, de sorte que $\sqrt{x|x+3|} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Puisque d'autre part $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$

De même, lorsque $x \leqslant -3$, $\sqrt{|x(x+3)|} = \sqrt{x^2+3x} = |x|\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}$, et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$

Au voisinage de 0, on a $\sqrt{|x(x+3)|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et puisque $-\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, $e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0.}$

Cette limite étant finie, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \text{ en posant } \widetilde{f}(0) = 0.}$

5. Il s'agit donc de prouver que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x}$ existe (et est finie).

On a, pour $x \neq 0$, $\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}\sqrt{|x(x+3)|}}{x} = x\sqrt{|x(x+3)|}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}$.
Or, en posant $X = \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, on a

$$\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} = Xe^{-X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Puisque $\sqrt{|x(x+3)|} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x} = 0$, si bien que $\boxed{\widetilde{f} \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } \left(\widetilde{f}\right)'(0) = 0.}$

6. Comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$

6.a. Pour $x > 0$, on a $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\sqrt{x(x+3)} = e^{-\frac{1}{x^2}}x\sqrt{1+\dfrac{3}{x}}$.
Et par conséquent,

$$\frac{f(x)}{x} = \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1} \underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc avec les notations de l'énoncé, $\boxed{a = 1.}$

6.b. Comme indiqué, soit $u : t \mapsto e^{-t^2}\sqrt{1+3t}$.
Alors u est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{3}, +\infty\right[$, comme produit de composées de fonctions dérivables[4].
Sa dérivée est alors donnée, à l'aide des formules usuelles, par

$$u' : t \mapsto e^{-t^2}\left(-2t\sqrt{1+3t} + \frac{3}{2\sqrt{1+3t}}\right).$$

Et en particulier, $u'(0) = e^0\dfrac{3}{2} = \boxed{\dfrac{3}{2}.}$

6.c. Rappelons que par définition, $u'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(h) - u(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{-h^2}\sqrt{1+3h} - 1}{h}$.

[4] Notons qu'elle pourrait être définie en $\frac{1}{3}$, mais qu'elle n'y serait pas dérivable car la racine n'est pas dérivable en 0

Méthode

La question 6.a. nous dit que s'il existe une asymptote, alors elle possède 1 pour coefficient directeur, et donc il s'agit à présent de déterminer si $f(x) - x$ possède ou non une limite finie en $+\infty$.

Mais pour $x > 0$, on a $f(x) - ax = f(x) - x = x\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\sqrt{1+\frac{3}{x}} - 1\right)$.

Posons alors $h = \frac{1}{x}$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Alors $x = \frac{1}{h}$ et

$$f(x) - x = x\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\sqrt{1+\frac{3}{x}} - 1\right) = \frac{1}{h}\left(e^{-h^2}\sqrt{1+3h} - 1\right) = \frac{u(h)-u(0)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} u'(0) = \frac{3}{2}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \frac{3}{2}$, et donc que la droite d'équation $y = x + \frac{3}{2}$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$.

7. Nous avons déjà mentionné que pour $x < -3$, $f(x) = |x|\sqrt{1+\frac{3}{x}} = -x\sqrt{1+\frac{3}{x}}$.

Et donc $\frac{f(x)}{x} = -\sqrt{1+\frac{3}{x}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$.

Et alors, pour $x < -3$, $f(x) + x = x\left(-e^{-\frac{1}{x^2}}\sqrt{1+\frac{3}{x}} + 1\right)$.

Puisque $\frac{1}{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, il est possible de tenir le même raisonnement qu'à la question 6.b, et donc $f(x) + x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{3}{2}$.

Et donc la droite d'équation $\boxed{y = -x - \frac{3}{2} \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ au voisinage de } -\infty.}$

8. Les points qu'il faut faire figurer sur un tel graphique sont :

- ►les valeurs de f qui auraient été calculée en cours d'exercice
- ►un sens de variation cohérent, avec notamment les tangentes horizontales là où la dérivée s'annule (ici en 0 et en -2)
- ►les limites avec les éventuelles asymptotes verticales ou horizontales
- ►tout ce que l'énoncé a pu faire apparaître d'autre, ici les asymptotes obliques d'équations $y = x + \frac{3}{2}$ et $y = -x - \frac{3}{2}$.