DM20 : Indications

Exercice 1

► 1)b) Appliquer le théorème du rang à w.
► 10) Des matrices semblables ont même trace, et en particulier, les matrices semblables à T ont une trace égale à 3.
On pourra chercher des matrices diagonales, qui ont mêmes coefficients diagonaux que leur inverse (mais pas nécessairement dans le même ordre), mais dont la trace ne vaut pas 3.

Problème 2

► 9) C'est d'assez loin la question la plus pénible et la plus difficile du sujet, elle peut sûrement être gardée pour la fin.
L'idée est donc d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $u_{|\operatorname{Im} u}$ qui est donc nilpotent d'indice p (si u est nilpotent d'indice $p+1$).

Donc il existe $y_1, \dots, y_t \in \operatorname{Im} u$ tels que $\operatorname{Im} u = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(y_i)$.

Notons alors x_i un antécédent de y_i. On vérifie alors aisément que $s(x_i) = s(y_i) + 1$.
On a alors $u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t)$ qui sont dans $\operatorname{Ker} u$. Prouver qu'ils forment une famille libre, et la compléter alors à l'aide de vecteurs $z_1, \dots, z_{n-r-t}$ de sorte à avoir une base de $\operatorname{Ker} u$.
Il faut ensuite remarquer que si $z \in \operatorname{Ker} u$, alors $C_u(z) = \operatorname{Vect}(z)$.

Reste donc à prouver que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-r-t} C_u(z_i)$.
Il y a encore un peu de travail pour cela...