DEVOIR MAISON 2

► Exercice 1 : raisonnements divers.

Les questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels. Prouver que
$$(\forall p,q \in \mathbf{N},\ u_{p+q} = u_p + u_q) \Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{R},\ \forall n \in \mathbf{N},\ u_n = na.$$
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\dfrac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbf{N}$.
3. Soit (u_n) la suite de réels définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+1}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.
4. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un unique réel c et une unique fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continue et vérifiant $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = 0$ tels que $f = g + c$.
5. Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \exists p,q \in \mathbf{N},\ n = 2^p(2q+1).$$
On interdit d'utiliser la décomposition en produit de facteurs premiers, cette dernière n'ayant pas été démontrée en terminale....

► Exercice 2 : autour des carrés parfaits.

Un entier $n \in \mathbf{N}$ est un carré parfait s'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $n = m^2$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\sqrt{n} \in \mathbf{Q} \Rightarrow \sqrt{n} \in \mathbf{N}$.

Partie facultative, plus difficile

Un triplet (a,b,c) d'entiers naturels est appelé un triplet pythagoricien si $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Montrer que $(3,4,5)$ est un triplet pythagoricien.
4. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{N}^*$ tels que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ soit un carré parfait.
On pourra utiliser le fait que si un entier b est un carré parfait, alors $25b$ l'est aussi, et se servir de la question 3).
5. On souhaite dans cette question prouver qu'il existe une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathbf{N}^*$ telle que pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2$ soit un carré parfait.
   a. Expliquer pourquoi on ne peut pas directement déduire ce résultat de celui de la question 4.
   b. Justifier que pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $(2m, m^2-1, m^2+1)$ et $(2m+1, 2m(m+1), 2m^2+2m+1)$ sont des triplets pythagoriciens.
   c. Conclure.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 2

▸ Exercice 1 : raisonnements divers

1. Procédons par double implication.
Supposons que pour tout $p, q \in \mathbf{N}$, $u_{p+q} = u_p + u_q$.
Soit alors $a = u_1$.
Prouvons alors par récurrence simple sur $n \in \mathbf{N}$ que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = na$.
On a $u_0 = u_{0+0} = u_0 + u_0 = 2u_0$, et donc $u_0 = 0 = 0 \times a$.
Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = na$. Alors $u_{n+1} = u_n + u_1 = na + a = (n+1)a$.
Par le principe de récurrence simple, on a donc $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = na$.
Ainsi, nous venons de prouver l'implication
$$(\forall p, q \in \mathbf{N}, u_{p+q} = u_p + u_q) \Rightarrow (\exists a \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = na).$$
Inversement, supposons qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_n = na$, et soit a un tel réel.
Soient alors $p, q \in \mathbf{N}$. Il vient donc $u_{p+q} = (p+q)a = pa + qa = u_p + u_q$.
Et donc nous avons prouvé l'implication
$$(\exists a \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}, u_n = na) \Rightarrow (\forall p, q \in \mathbf{N}, u_{p+q} = u_p + u_q).$$
Par double implication, on a bien l'équivalence annoncée.

Détails
Il s'agit de prouver qu'il existe un a tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = na$. Or si un tel a existe, nécessairement, $u_1 = 1 \times a = a$.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Procédons par disjonction de cas.
▸ Si n est pair, alors $\frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{n}{2}(n^2+1)$, avec $\frac{n}{2}$ et n^2+1 qui sont des entiers naturels, donc $\frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbf{N}$.
▸ Si n est impair, alors n^2 est impair, si bien que n^2+1 est pair donc $\frac{n^2+1}{2} \in \mathbf{N}$.
Et donc $\frac{n(n^2+1)}{2} = n\frac{n^2+1}{2}$ est un entier car produit de deux entiers naturels.
En conclusion, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbf{N}.}$

Méthode
L'idée d'employer une récurrence double vient de la relation de récurrence définissant u_n : chaque terme est déterminé par les deux précédents termes.

⚠ Attention !
Qui dit récurrence double dit initialisation double.

3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition $1 \leqslant u_n \leqslant n^2$.
Prouvons alors $\mathscr{P}(n)$ par récurrence double sur $n \in \mathbf{N}^*$.
On a $u_1 = 1$, et donc $1 \leqslant u_1 \leqslant 1^2$.
De plus, $u_2 = u_1 + \frac{u_0}{1} = 2$, donc $1 \leqslant u_2 \leqslant 2^2$.
Ainsi, la récurrence est initialisée.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ soient vraies.
Alors $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+1} \geqslant 1 + \dfrac{1}{n+1} \geqslant 1$.
De plus,
$$\begin{aligned} u_{n+2} &\leqslant (n+1)^2 + \frac{n^2}{n+1} \leqslant (n+1)^2 + n\frac{n}{n+1} \leqslant (n+1)^2 + n \\ &\leqslant n^2 + 3n + 1 \leqslant n^2 + 4n + 2 \leqslant (n+2)^2. \end{aligned}$$
Donc $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant (n+2)^2$, si bien que $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
Par le principe de récurrence double, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, 1 \leqslant u_n \leqslant n^2.}$

4. Procédons par analyse-synthèse.
Analyse. Supposons qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue, telle que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = 0$ et $f = g + c$ et fixons de tels c et g.
Alors $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 (g(t)+c)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt + \int_0^1 c\,dt = 0 + c = c$.
Et donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) = f(x) - c = f(x) - \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.
Ainsi, si de tels c et g existent, ils sont uniques, définis par les formules ci-dessus.

⚠ Attention !
À ce stade, nous n'avons pas prouvé l'existence de g et c, puisque nous la supposions. Une synthèse est donc indispensable.

Synthèse. Notons $c = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ et $g = f - c$.
Alors g est continue car f l'est, et

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 c\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - c = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g(x) + c = f(x) - c + c = f(x)$.
Donc il existe bien de tels c et g.

Conclusion : il existe un unique réel c et une unique fonction continue g vérifiant $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt = 0$ tels que $f = g + c$.

> **Remarque**
> Si on connaît la décomposition en nombres premiers, ce résultat est évident, puisqu'il suffit de séparer la puissance de 2 qui apparaît dans cette décomposition du produit des facteurs impairs de n.
> Mais pour l'instant cette décomposition n'a pas encore été prouvée, et il nous faudra également une récurrence forte pour le faire.

5. Procédons par récurrence forte sur $n \in \mathbf{N}^*$, en prouvant la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \exists p, q \in \mathbf{N},\ n = 2^p(2q+1).$$

Puisque $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(1), \mathscr{P}(2), \dots, \mathscr{P}(n)$ soient vraies.
▸ Si $n+1$ est impair, soit $q \in \mathbf{N}$ tel que $n+1 = 2q+1$.
Alors $n+1 = 2^0(2q+1)$, et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
▸ Si $n+1$ est pair, soit $r = \frac{n}{2}$, qui est un entier compris entre 1 et n.
Par hypothèse de récurrence[1], il existe $p, q \in \mathbf{N}$ tels que $r = 2^p(2q+1)$, et alors

$$n + 1 = 2r = 2^{p+1}(2q+1).$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence forte, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \text{ il existe } p, q \in \mathbf{N} \text{ tels que } n = 2^p(2q+1).}$

[1] Puisque $r \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{P}(r)$ est vraie.

▸ Exercice 2 : autour des carrés parfaits.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$ qui n'est pas un carré parfait. En particulier, $n > 0$.
Supposons par l'absurde que $\sqrt{n} \in \mathbf{Q}$, et soient $p, q \in \mathbf{N}^*$, premiers entre eux, tels que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$.
Alors $n = \frac{p^2}{q^2}$, et donc $q^2 n = p^2$. Donc p divise $q^2 n$, et puisque p et q sont premiers entre eux, par le lemme de Gauss, p divise n.
Soit $a \in \mathbf{N}$ tel que $n = ap$. Alors $apq = p^2$, si bien que $p = aq$. Donc q divise p.
Et alors q divise à la fois p et q, donc divise leur pgcd, qui vaut 1 par hypothèse.
Ainsi, $q = 1$, donc $\sqrt{n} = p$ est un entier, si bien que $n = p^2$ est un carré parfait, ce qui est absurde.
Remarque *: on aurait tout aussi bien pu raisonner par contraposée plutôt que par l'absurde, puisque nous venons de prouver que si $\sqrt{n}$ est rationnel, alors n est un carré parfait.*

> **Rappel**
> Rappelons le lemme de Gauss : si a divise bc et que a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

2. Soit $n \in \mathbf{N}$. La contraposée de la proposition précédente est $\sqrt{n} \in \mathbf{Q} \Rightarrow n$ est un carré parfait.
Donc si $\sqrt{n} \in \mathbf{Q}$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $n = p^2$, et alors $\sqrt{n} = p \in \mathbf{N}$.

3. C'est bien connu[2] : $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

[2] La moitié des triangles rectangles que vous avez manipulé en 3^{eme} avaient des côtés de longueur 3, 4 et 5....

4. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$: «$\exists a_1, \dots, a_n \in \mathbf{N}^2$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ soit un carré parfait».
Il est clair que $\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque 1^2 est un carré parfait.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie, et soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{N}^*$ tels que $a_1^2 + \cdots + a_n^2$ soit un carré parfait. Soit alors p tel que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 = p^2$.
Alors $(5a_1)^2 + (5a_2)^2 + \cdots + (5a_n)^2 = 25p^2 = (5p)^2$.
Mais alors

$$\begin{aligned}(5a_1)^2 + (5a_2)^2 + \cdots + (5a_{n-1})^2 + (3a_n)^2 + (4a_n)^2 &= 25a_1^2 + \cdots + 25a_{n-1}^2 + 9a_n^2 + 16a_n^2 \\ &= 25a_1^2 + 25a_2^2 + \cdots + 25a_{n-1}^2 + 25a_n^2 \\ &= 25p^2 = (5p)^2.\end{aligned}$$

Ainsi, les $n+1$ entiers $5a_1, \dots, 5a_{n-1}, 3a_n, 4a_n$ sont tous strictement positifs et la somme de leurs carrés est un carré parfait.
Et donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Par le principe de récurrence simple, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

5.a. Dans la question 4, nous avons prouvé que pour n fixé, on pouvait trouver des entiers $a_1, \dots, a_n$, dépendant de n, tels que $a_1^2 + \dots + a_n^2$ soit un carré parfait.
Ici, on souhaite construire une suite d'entiers, fixée une fois pour toutes, telle que toute somme des n premiers carrés de la suite soit un carré parfait.

Par exemple, nous avions dit que $\mathscr{P}(1)$ était vraie, puisqu'on pouvait prendre $a_1 = 1$.
Nous en déduisions que $\mathscr{P}(2)$ était vraie, puisqu'on pouvait prendre $a_1 = 3$ et $a_2 = 4$. On note que ce n'est pas le même a_1 que celui utilisé dans $\mathscr{P}(1)$.
Puis on en déduisait que $\mathscr{P}(3)$ était vraie, puisqu'on pouvait prendre $a_1 = 15$, $a_2 = 12$ et $a_3 = 16$ $\left(3^2 + 12^2 + 16^2 = 25^2\right)$. On constate là encore que les a_1 et a_2 qui conviennent ne sont pas les mêmes que dans $\mathscr{P}(2)$.
La construction proposée ci-dessus ne peut donc pas suffire à prouver l'existence d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ayant les propriétés souhaitées.

5.b. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$(2m)^2 + (m^2-1)^2 = 4m^2 + m^4 - 2m^2 + 1 = m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2+1)^2.$$

Donc $(2m, m^2-1, m^2+1)$ est un triplet pythagoricien.

De même,

$$\begin{aligned}(2m+1)^2 + (2m(m+1))^2 &= 4m^2 + 4m + 1 + 4m^4 + 8m^3 + 4m^2\\ &= 4m^4 + 8m^3 + 8m^2 + 4m + 1.\end{aligned}$$

Et $(2m^2+2m+1)^2 = (2m^2+2m+1)(2m^2+2m+1) = 4m^4 + 8m^3 + 8m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2 + (2m(m+1))^2$.
Donc $(2m+1, 2m(m+1), 2m^2+2m+1)$ est un triplet pythagoricien.

5.c. Construisons une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence de la manière suivante : $a_1 = 3$ et $a_2 = 4$.
Alors on a bien $a_1^2 = 3^2$ et $a_1^2 + a_2^2 = 5^2$.
Supposons construits $a_1, \dots, a_p$ tels que $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_p^2$ soit un carré parfait.
Soit alors $q \in \mathbf{N}$ tel que $a_1^2 + \dots + a_p^2 = q^2$.
► Si q est pair, soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $q = 2m$. Posons alors $a_{p+1} = m^2 - 1$.
On a donc $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{p+1}^2 = q^2 + a_{p+1}^2 = (2m)^2 + (m^2-1)^2 = (m^2+1)^2$ qui est un carré parfait.
► Si q est impair, soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $q = 2m+1$. Posons alors $a_{p+1} = 2m(m+1)$.
Alors $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{p+1}^2 = q^2 + a_{p+1}^2 = (2m+1)^2 + (2m(m+1))^2 = (2m^2+2m+1)^2$ qui est un carré parfait.
De proche en proche, on définit alors une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ qui par construction vérifie : pour tout $p \geqslant 1$, $a_1^2 + \dots + a_p^2$ est un carré parfait.

> **Intuition**
> L'idée dans ce qui suit est que, d'après la question précédente, tout entier naturel non nul fait partie d'un triplet pythagoricien. Et donc il est possible de trouver $r \in \mathbf{N}^*$ tel que $q^2 + r^2$ soit un carré parfait. On choisit alors de poser $a_{p+1} = r$.

Intéressons nous aux premiers termes de la suite que nous venons de construire : $a_1 = 3$ et $a_2 = 4$ par construction.
Mais alors $a_1^2 + a_2^2 = 5^2 = (2\times 2+1)^2$.
On pose donc $a_3 = 2\times 2 \times (2+1) = 12$.
Et alors $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$.

Puisque $13 = 2\times 6 + 1$, on pose donc $a_4 = 2\times 6\times(6+1) = 84$.
Et alors $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 169 + 84^2 = 7225 = 85^2$.
On a donc ensuite $85 = 2\times 42 + 1$, et donc on peut poser $a_5 = 2\times 42(42+1) = 3612$, si bien que $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 85^2 + 3612^2 = 3613^2$. Etc

On constate[3] qu'à l'exception de a_1, tous les a_k sont pairs. Mais alors pour tout $p \geqslant 2$, $a_1^2 + \dots + a_p^2$ est impair. Et donc si $a_1^2 + \dots + a_p^2 = (2m+1)^2$, par construction $a_{p+1} = 2m(m+1)$.
Et donc $a_1^2 + \dots + a_{p+1}^2 = (2m^2+2m+1)^2 = (2\underbrace{m(m+1)}_{:=m'}+1)^2$, si bien que par construction,

[3] Et on pourrait le prouver par récurrence.

$a_{p+2} = 2m'(m'+1) = 2m(m+1)\left(m(m+1)+1\right) = a_{p+1}\left(\frac{a_{p+1}}{2}+1\right) = \frac{a_{p+1}^2}{2} + a_{p+1}$.
Ainsi, notre suite vérifie : $\forall n \geqslant 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{2} + a_n$.

Il aurait donc été possible de donner une définition par récurrence de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ en posant $a_1 = 3$, $a_2 = 4$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{2} + a_n$.

On peut alors[4] prouver par récurrence (simple) que pour tout $p \geqslant 2$, a_p est un entier pair, et que $a_1^2 + \cdots + a_p^2 = (a_p+1)^2$, qui est donc un carré parfait.

[4] Je vous laisse le soin d'écrire les détails si vous souhaitez vous en convaincre.