DEVOIR MAISON 19

▸ Problème : fonction Γ et théorème de Bohr-Mollerup

Partie I. Trois résultats préliminaires

1. Prouver que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $t - t^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.
2. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.
   a. Justifier que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(1-x) \leqslant -x$.
   b. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   c. En utilisant la monotonie de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur des intervalles de la forme $[k, k+1]$, prouver que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$.
   d. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. On pose à présent, pour $n \geqslant 1$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
   a. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1$.
   b. En déduire que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, puis qu'elle converge.

Partie II. Définition de la fonction Γ

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose $\Pi_n(x) = \dfrac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

4. **Croissance de** $(\Pi_n(x))_{n\geqslant 1}$**.** Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$.
   a. À l'aide de l'inégalité de la question 2.a, prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   b. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x \geqslant 1 + \dfrac{x}{n+1}$.
   c. Prouver alors que la suite $(\Pi_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante.
5. **Convergence de** $(\Pi_n(x))_{n\geqslant 1}$**.** Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$.
   a. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer $\ln(x\Pi_n(x))$ en fonction notamment de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.
   b. En déduire, grâce aux résultats de la partie I que la suite $\left(\ln(x\Pi_n(x))\right)_{n\geqslant 1}$ est majorée, puis que $(\Pi_n(x))_{n\geqslant 1}$ est majorée.

Par le théorème de la limite monotone, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, la suite $(\Pi_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge.
On note alors $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \Pi_n(x)$.
Ceci définit donc une fonction $\Gamma : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$. Notons que puisque pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(\Pi_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante et à valeurs strictement positives, Γ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$.

Partie III. Premières propriétés de la fonction Γ

6. Montrer que $\Gamma(1) = 1$.
7. Prouver que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
8. a. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, justifier que la fonction $\ln \circ \Pi_n$ est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, et qu'elle est convexe.
   b. En déduire que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.
9. Justifier que la fonction Γ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

Partie IV. Le théorème de Bohr-Mollerup

Nous avons prouvé dans la partie précédente que la fonction Γ vérifie $\Gamma(1) = 1$, $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et que $\ln \circ \Gamma$ est convexe.
Dans cette partie, nous cherchons à prouver la réciproque : si $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ est une fonction telle que

- $f(1) = 1$
- $\forall x > 0, f(x+1) = xf(x)$
- $\ln \circ f$ est convexe.

alors $f = \Gamma$. Il s'agit du théorème de Bohr-Mollerup.

Dans toute la suite, on considère donc $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ qui satisfait les trois conditions ci-dessus.

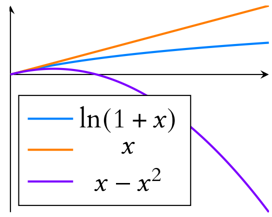
10. Prouver que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n+1) = n!$ et que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$f(x+n) = f(x)x(x+1)\cdots(x+n-1).$$
11. Prouver que : $\forall (u,v) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $\forall x \in [0,1]$, $f((1-x)u + xv) \leqslant f(u)^{1-x} f(v)^x$.
12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]0,1[$. En notant que $x + n = (1-x)n + x(n+1)$, prouver que $f(x+n) \leqslant (n-1)!n^x$.
13. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in]0,1[$, calculer $x(n+x) + (1-x)(n+1+x)$.
En déduire que $n! \leqslant (n+x)^{1-x} f(n+x)$.
14. Prouver que pour tout $x \in]0,1[$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{(n+x)^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$.
15. En déduire le théorème de Bohr-Mollerup.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 19

▸ Problème : fonction Γ et théorème de Bohr-Mollerup

Partie I. Trois résultats préliminaires

1. L'inégalité $\ln(1+t) \leqslant t$ relève du cours, et découle par exemple directement de la concavité de $x \mapsto \ln(1+x)$, dont la tangente en $x = 1$ a pour équation $y = x$.
Pour la seconde inégalité, posons, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $f(t) = \ln(1+t) - t + t^2$.
Alors f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$, et pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,



$$f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + 2t = \frac{1 - 1 - t + 2t + 2t^2}{1+t} = \frac{2t^2 + t}{t+1} \geqslant 0.$$

Donc f est croissante, et puisque $f(0) = 0$, $\forall t \in \mathbf{R}_+$, $f(t) \geqslant 0 \Leftrightarrow \boxed{t - t^2 \leqslant \ln(1+t).}$

2.a. C'est encore une fois la concavité de $x \mapsto \ln(1+x)$, qui est en fait valable sur $]-1,+\infty[$ tout entier, et donc avec pour tout $t \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+t) \leqslant t$.
Et donc en particulier pour $x \in [0,1[$, en posant $t = -x$, $\boxed{\ln(1-x) \leqslant -x.}$

2.b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0.$$

Détails
L'inégalité provient directement de la question précédente.

Et donc $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est décroissante.}}$

2.c. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Alors $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante sur $[k,k+1]$, si bien que $\forall t \in [k,k+1]$, $\frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k+1}$.
Et donc par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} = \frac{1}{k+1}$.
En sommant ces relations pour k allant de 1 à $n-1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Mais par Chasles, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{n} = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$. Et donc

$$\ln(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \geqslant 0.$$

En ajoutant 1, il vient donc $u_n \geqslant 1 \geqslant 0$.

2.d. La suite (u_n) étant décroissante et minorée[1], par le théorème de la limite monotone, elle converge.

[1] Par 0.

3.a. C'est un classique : une décomposition en éléments simples nous donne, pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{(k-1)k} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, si bien que pour $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

3.b. Il est clair que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \leqslant 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ car pour tout $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k(k-1)} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.
Mais cette dernière suite étant convergente, elle est majorée[2].
Et donc (v_n) est majorée. Il est facile de constater que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante, et donc par le théorème de la limite monotone, $\boxed{\text{elle converge.}}$

[2] Mieux : elle est croissante et convergente, donc majorée par sa limite.

Partie II. Définition de la fonction Γ

4. Croissance de $(\Pi_n(x))_{n\geqslant 1}$.

4.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \boxed{\geqslant \frac{1}{n+1}.}$$

Rappel
C'est une inégalité de convexité classique : $e^x \geqslant 1+x$.

4.b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a alors $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \geqslant 1 + x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Et donc à l'aide de l'inégalité précédente, on en déduit donc que $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x \geqslant 1+\frac{x}{n+1}.}$

Remarque
Il est clair que $\Pi_n(x) > 0$, donc il est légitime de s'intéresser au quotient pour étudier la monotonie de la suite.

4.c. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a alors

$$\frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_n(x)} = \frac{(n+1)^x(n+1)!}{x(x+1)\cdots(x+n+1)}\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n^x n!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^x\frac{n+1}{x+n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^x\frac{1}{1+\frac{x}{n+1}}.$$

Mais par la question précédente, on a donc $\dfrac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_n(x)} \geqslant 1$ et donc $\boxed{(\Pi_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$

5. Convergence de $(\Pi_n(x))_{n\geqslant 1}$.

5.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\ln(\Pi_n(x)) = \ln(n^x) + \ln(n!) - \ln\big(x(x+1)\cdots(x+n)\big) = x\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n}\ln(x+k).$$

Or $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k)$, et donc en ajoutant[3] $\ln(x)$

$$\ln(x\Pi_n(x)) = x\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\big(\ln(x+k)-\ln(k)\big) = \boxed{x\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right).}$$

[3] Ce qui supprime le terme en $k=0$ dans la somme.

5.b. Commençons par noter que par la question 1,

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{k}-\frac{x^2}{k^2}\right).$$

Et donc

$$\ln(x\Pi_n(x)) \leqslant x\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + x^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \leqslant -xu_n + x^2 v_n.$$

Mais les deux suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, elles sont bornées, si bien qu'il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\ln(x\Pi_n(x)) \leqslant M$.
Et donc $\Pi_n(x) \leqslant \frac{e^M}{x}$, qui est bien une constante indépendante de n.
Donc $\boxed{\text{la suite } (\Pi_n(x))_{n\geqslant 1} \text{ est majorée.}}$

Partie III. Premières propriétés de la fonction Γ

6. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\Pi_n(1) = \frac{n^1\cdot n!}{1\cdot 2\cdots(n+1)} = \frac{n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Et donc $\boxed{\Gamma(1) = 1.}$

7. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Alors

$$\Pi_n(x+1) = \frac{n^{x+1}n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} = \frac{nx}{x+n+1}\Pi_n(x).$$

Mais $\dfrac{nx}{x+n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{nx}{n} = x$, si bien que

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to+\infty}\Pi_n(x+1) = x\lim_{n\to+\infty}\Pi_n(x) = \boxed{x\Gamma(x).}$$

On a alors $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1 = (2-1)!$, puis $\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2!$, et une récurrence facile prouve que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!}$

8.a. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Alors, comme calculé précédemment, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\ln(\Pi_n(x)) = x\ln(n) + \ln(n!) - \sum_{k=0}^{n} \ln(x+k).$$

Donc $\ln \circ \Pi_n$ est deux fois dérivable, car somme de fonctions qui le sont.
Et alors pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$[\ln \circ \Pi_n]'(x) = \ln(n) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}, \ [\ln \circ \Pi_n]''(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} \geqslant 0.$$

Et donc $\boxed{\ln \circ \Pi_n \text{ est convexe sur } \mathbf{R}_+^*.}$

8.b. Soient $x, y > 0$ et soit $\lambda \in [0,1]$.
Alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, par convexité de $\log \circ \Pi_n$,

$$\ln(\Pi_n((1-\lambda)x + \lambda y)) \leqslant (1-\lambda)\ln(\Pi_n(x)) + \lambda \ln(\Pi_n(y)).$$

Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$, il vient donc

$$\ln(\Gamma((1-\lambda)x + \lambda y)) \leqslant (1-\lambda)\ln(\Gamma(x)) + \lambda \ln(\Gamma(y))$$

si bien que la fonction $\boxed{\ln \circ \Gamma \text{ est convexe sur } \mathbf{R}_+^*.}$

Remarque
On prouverait facilement que ceci implique que Γ elle-même est convexe.

9. Puisque $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur l'intervalle ouvert $\mathbf{R}_+^*$, elle y est continue.
Et donc par composition avec l'exponentielle, Γ elle même est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

Partie IV. Le théorème de Bohr-Mollerup

10. La preuve de $f(n+1) = n!$ se fait facilement par récurrence comme pour la fonction Γ à l'aide de $f(1) = 1$ et $f(x+1) = xf(x)$.
Soit $x > 0$. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$ que $f(x+n) = f(x)x(x+1)\cdots(x+n-1)$.
Pour $n = 1$, on a $f(x+1) = xf(x)$ par hypothèse.
Et si $f(x+n) = f(x)x(x+1)\cdots(x+n-1)$, alors

$$f(x+n+1) = (x+n)f(x+n) = f(x)x(x+1)\cdots(x+n+1)(x+n).$$

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, f(x+n) = f(x)x(x+1)\cdots(x+n-1).}$

11. Soient $u, v \in \mathbf{R}_+^*$, et soit $x \in [0,1]$. Alors

$$\ln\left[f((1-x)u + xv)\right) \leqslant (1-x)\ln(f(u)) + x\ln(f(v)).$$

Par croissance de l'exponentielle, on a donc

$$f\left((1-x)u + xv\right) \leqslant e^{(1-x)\ln(f(u)) + x\ln(f(v))} = \boxed{f(u)^{1-x}f(v)^x.}$$

12. L'inégalité de la question précédente nous donne donc $f(x+n) \leqslant f(n)^{1-x}f(n+1)^x$. Or

$$f(n)^{1-x}f(n+1)^x = ((n-1)!)^{1-x}(n!)^x = (n-1)!\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right)^x = \boxed{(n-1)!n^x.}$$

13. On a $x(n+x) + (1-x)(n+1+x) = nx + x^2 + n + 1 + x - xn - x - x^2 = n+1$ et donc toujours par la question 10,

$$\begin{aligned} f(n+1) &\leqslant f(n+1+x)^{1-x}f(n+x)^x \leqslant f(n+1+x)\left[\frac{f(n+x)}{f(n+1+x)}\right]^x \\ &\leqslant f(n+1+x)\left[\frac{1}{n+x}\right]^x \leqslant (n+x)f(n+x)\frac{1}{(n+x)^x} \leqslant (n+x)^{1-x}f(n+x). \end{aligned}$$

Puisque $f(n+1) = n!$, il vient bien $\boxed{n!(n+x)^{x-1} \leqslant f(n+x).}$

14. On a donc, pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$,

$$f(x) = \frac{f(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \geqslant \frac{n!}{(n+x)^{1-x}} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} \geqslant \frac{n!(n+x)^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Et de même, en utilisant $f(x) = \dfrac{f(x+n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$ et l'inégalité de la question 11, on obtient tout de suite $f(x) \leqslant \dfrac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}$.

15. On a donc prouvé que si $x \in]0,1[$, alors $\left(\dfrac{n+x}{n}\right)^x \Pi_n(x) \leqslant f(x) \leqslant \Pi_n(x)\dfrac{x+n}{n}$.
Mais puisque $\dfrac{x+n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, et que $\left(\dfrac{n+x}{n}\right)^x = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors par le théorème des gendarmes, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \Pi_n(x) = \Gamma(x)$.
Pour $x = 1$, on a encore bien $f(x) = \Gamma(x)$. Et plus généralement, pour x entier, il n'y a pas de soucis.
Et pour $x > 1$ non entier, si on note $n = \lfloor x \rfloor$, et $y = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ la partie fractionnaire de x, alors

$$f(x) = f(n+y) = y(y+1)\cdots(y+n-1)f(y) = y(y+1)\cdots(y+n-1)\Gamma(y) = \Gamma(y+n) = \Gamma(x).$$

Ceci achève donc la preuve du théorème de Bohr-Mollerup.

Commentaires *: le Bohr du théorème est Harald Bohr, mathématicien danois, c'est le petit frère du physicien Niels Bohr, lauréat du prix Nobel.*
Il a aussi la particularité d'être médaillé olympique[4], ce qui est plutôt rare (mais pas unique) chez les mathématiciens.

[4] En football aux Jeux de 1908.