DEVOIR MAISON 18

▸ Quelques applications de l'inégalité de Taylor–Lagrange

Partie I : La formule de Taylor–Lagrange

Soient $a < b$ deux réels, soit $n \in \mathbf{N}$, et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a,b]$, dérivable $n+1$ fois sur $]a,b[$.
On souhaite prouver qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Ce résultat est appelé formule de Taylor–Lagrange à l'ordre n, appliquée à f entre a et b.

1. Quel résultat classique retrouve-t-on si $n = 0$?
2. Pour $A \in \mathbf{R}$, et $t \in [a,b]$, on pose $\varphi_A(t) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - A\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$.
   a. Calculer $\varphi_A(b)$.
   b. Prouver qu'on peut choisir A tel que $\varphi_A(a) = \varphi_A(b)$.
   Dans la suite de la question, on suppose que A vérifie cette condition.
   c. Montrer que φ_A est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et pour tout $t \in]a,b[$, calculer $\varphi_A'(t)$.
   d. À l'aide du théorème de Rolle, démontrer la formule de Taylor–Lagrange.

Partie II. Première application : la série harmonique alternée.

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
Nous avons déjà prouvé en TD (c'est une conséquence de l'exercice 13.21) que la suite $(S_n)_n$ converge. Le but de cette partie est de déterminer sa limite.
On note f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par : $\forall x > -1, f(x) = \ln(1+x)$.

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, déterminer $f^{(n)}$.
4. Montrer que : $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}, \exists c \in \mathbf{R}_+^*, \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$.
5. Simplifier cette expression en utilisant les expressions des $f^{(k)}$ obtenues à la question 3.
6. En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in [0,1]$, $\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
7. Retrouver alors le fait que $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge et déterminer sa limite.

Partie III. Deuxième application : e est irrationnel... et un peu plus

8. À l'aide de la formule de Taylor–Lagrange, prouver que pour tout $x > 0$, et tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 < e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x.$$

9. On suppose par l'absurde que $e \in \mathbf{Q}$, et soient $(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$.
   Prouver qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $n!\left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \in \mathbf{N}^*$.
   En utilisant la question précédente, aboutir à une contradiction.

Un nombre réel α est dit **algébrique de degré au plus** 2 s'il existe trois entiers relatifs a, b, c avec $a \neq 0$ tel que α est racine de $aX^2 + bX + c$.

10. Montrer que si $\alpha \in \mathbf{Q}$, alors il est algébrique de degré au plus 2.

11. Donner un exemple de nombre irrationnel mais algébrique de degré au plus 2.

12. On souhaite désormais prouver que e n'est pas algébrique de degré au plus 2, ce qui permet notamment de retrouver son irrationalité.
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbf{Z}^3$, $a \neq 0$ tels que $ae^2 + be + c = 0$.
On pose alors pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = ae^x + ce^{-x}$.

- **a.** Pour tout $k \in \mathbf{N}$, déterminer la fonction $f^{k)}$.
- **b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\exists x_n \in]0, 1[$, $\dfrac{f^{(n)}(x_n)}{n} = (n-1)!f(1) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} f^{(k)}(0)$.

  On pose alors $u_n = \dfrac{f^{(n)}(x_n)}{n}$.
- **c.** Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, et après avoir justifié que $u_n \in \mathbf{Z}$, prouver qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = 0$.
- **d.** Prouver alors que $a = b = c = 0$, et conclure.

Plus généralement, Hermite a prouvé que e est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers. Mais la preuve en est beaucoup plus difficile.

Partie IV. Première inégalité de Kolmogorov

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.
On suppose que f et f'' sont bornées, et on note $M_0 = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$ et $M_2 = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |f''(t)|$.

13. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $h > 0$.

- **a.** Justifier que $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \dfrac{h^2 M_2}{2}$.
- **b.** En appliquant l'inégalité de Taylor–Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x - h$, et à l'aide de la question précédente, prouver que $|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + h\dfrac{M_2}{2}$.
- **c.** En déduire que f' est bornée et que si on note $M_1 = \sup\limits_{t \in \mathbf{R}} |f'(t)|$, alors $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$.

CORRECTION DU DEVOIR MAISON 18

▸ Quelques applications de l'inégalité de Taylor-Lagrange

Partie I : la formule de Taylor-Lagrange

1. Si $n=0$, il s'agit de prouver que pour f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a) \Leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
On reconnaît là $\boxed{\text{le théorème des accroissements finis.}}$

Attention !
Pour $k=0$,
$$(b-b)^k=0^0=1$$
alors que pour $k\geqslant 1$,
$$(b-b)^k=0.$$

2.a. On a $\varphi_A(b)=f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-b)^k}{k!}f^{(k)}(b)-A\frac{(b-b)^{n+1}}{(n+1)!}=f(b)-f(b)=\boxed{0.}$

2.b. Il suffit de prendre $A=\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right)$.

2.c. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^n$, elle est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, et donc $f^{(k)}$ est continue sur $[a,b]$.
Puisque les fonctions polynomiales $t\mapsto(b-t)^k$, $0\leqslant k\leqslant n+1$ sont continues sur $[a,b]$, par somme et produit de fonctions continues sur $[a,b]$, φ_A est continue sur $[a,b]$.
De même, les $f^{(k)}$ sont toutes dérivables sur $]a,b[$, ainsi que les $t\mapsto(b-t)^k$, et donc par somme et produit de fonctions dérivables, φ_A est dérivable sur $]a,b[$.
On a alors, pour tout $t\in]a,b[$,

$$\begin{aligned}
\varphi_A'(t)&=-\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)-\frac{k(b-t)^{k-1}}{k!}f^{(k)}(t)\right)+A\frac{(b-t)^n}{n!}\\
&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)+\sum_{k=0}^{n}\frac{k(b-t)^{k-1}}{k!}f^{(k)}(t)+A\frac{(b-t)^n}{n!}\\
&=-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k+1)}(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{k(b-t)^{k-1}}{k!}f^{(k)}(t)+A\frac{(b-t)^n}{n!}\\
&=-\sum_{i=1}^{n+1}\frac{(b-t)^{i-1}}{(i-1)!}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-t)^k}{k!}f^{(k)}(t)+A\frac{(b-t)^n}{n!}\\
&\boxed{=-\frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)+A\frac{(b-t)^n}{n!}.}
\end{aligned}$$

Détails
Pour $k=0$, le premier terme de la seconde somme est nul.

Chgt d'indice
$i=k+1$.

Puisque φ_A est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, que $\varphi_A(a)=\varphi_A(b)$, par le théorème de Rolle, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\varphi_A'(c)=0$.
Et donc $A\frac{(b-c)^n}{n!}=\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)$, de sorte que

$$f^{(n+1)}(c)=A=\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}\left(f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right).$$

Soit encore $\boxed{f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).}$

Partie II. Première application : la série harmonique alternée

3. C'est un grand classique, l'idée est de calculer les premières dérivées de f, conjecturer une formule, puis la prouver par récurrence sur n.
Notons que f est évidemment $\mathscr{C}^\infty$ car composée de ln et $x\mapsto x+1$ qui sont $\mathscr{C}^\infty$. Ici, on a, pour tout $x>-1$,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\ f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\ f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}.$$

Méthode
Justifier dès maintenant le caractère $\mathscr{C}^\infty$ de f dispense dans la suite de justifier l'existence des dérivées successives, et donc de se concentrer uniquement sur le calcul de ces dérivées.

Il semble raisonnable de conjecturer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x > -1$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.
Prouvons donc cette formule par récurrence sur $n \in \mathbf{N}^*$, récurrence qui est déjà largement initialisée.
Supposons donc que pour tout $x > -1$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Alors en dérivant cette égalité,

$$\forall x > -1,\ f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n-1} \times -n\frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n\frac{n!}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n\frac{(n+1-1)!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x > -1$,

$$\boxed{f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.}$$

De plus, notons que pour $n = 0$, on a évidemment $\forall x > -1$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \ln(1+x)$.

4. Fixons $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}$. Alors f est $\mathscr{C}^\infty$ (et en particulier $\mathscr{C}^{n+1}$) sur $[0,x]$, et donc vérifie les conditions de la formule de Taylor-Lagrange.
Il existe donc $c \in]0,x[$ tel que

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).}$$

5. Puisque $f^{(0)}(0) = \ln(1) = 0$, et pour $k \geqslant 1$, $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, on a donc

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+c)^{n+1}} = \boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\frac{1}{(1+c)^{n+1}}.}$$

6. Puisque $c > 0$, on en déduit que

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)}\frac{1}{(1+c)^{n+1}} \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

7. En particulier, pour $x = 1$, on obtient

$$|\ln(1+1) - S_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln(2) - S_n) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln(2).}$

Partie III. Deuxième application : e est irrationnel ... et un peu plus

8. C'est le même principe qu'à la question précédente : pour $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n à la fonction exp (qui vérifie bien les hypothèses puisqu'elle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ tout entier) entre 0 et x, on obtient l'existence de $c \in]0,x[$ tel que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\exp^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\exp^{(n+1)}(c).$$

Mais les dérivées successives de exp sont toutes égales à exp, et en particulier valent 1 en 0.
Donc il vient

$$e^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c.$$

Puisque $c \in]0,x[$, on a[1] $0 < e^c < e^x$, et donc il vient

$$\boxed{0 < e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x.}$$

[1] Par stricte croissance de l'exponentielle.

9. Notons que pour $n \in \mathbf{N}$ fixé et $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\dfrac{n!}{k!} = n(n-1)\cdots(n-k+1) \in \mathbf{N}$.

Et donc si n est tel que $n!\dfrac{p}{q} \in \mathbf{N}$, alors $n!\left(\dfrac{p}{q} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right) \in \mathbf{N}$.

Or un tel n existe toujours, on peut par exemple considérer $n_0 = q$, car alors pour $n \geqslant n_0$, $n!\dfrac{p}{q} = \underbrace{\dfrac{n!}{(n-n_0+1)!}}_{\in\mathbf{N}} \underbrace{n_0!\dfrac{p}{q}}_{\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}$.

Appliquons le résultat de la question précédente avec $x = 1$. Il vient alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(n+1)!}$$

et donc $n!\left(\dfrac{p}{q} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Par le théorème des gendarmes, on a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n!\left(\dfrac{p}{q} - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right) = 0$.

Mais alors si on pose, pour $n \geqslant n_0$, $u_n = n!\left(e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$, alors $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite d'entiers qui converge vers 0.

Elle est donc nulle à partir d'un certain rang.

Or, nous venons de dire que ces entiers sont non nuls, d'où une contradiction.

On en déduit que $\boxed{e \text{ est irrationnel.}}$

> **Détails**
> Prendre par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition de limite.

10. Soit $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbf{Q}$, avec $p \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. Alors α est racine de $qX - p$, et donc de $qX^2 - pX$, qui est bien de degré 2, à coefficients entiers. Donc $\boxed{\alpha \text{ est algébrique de degré au plus 2.}}$

11. Nous savons que $\sqrt{2}$ est irrationnel, mais il est algébrique de degré au plus 2 puisque racine de $X^2 - 1$.

12.a. La dérivée de f est $f' : x \mapsto ae^x - ce^{-x}$.
Puis la dérivée seconde est $f'' : x \mapsto ae^x + ce^{-x}$.
Et alors une récurrence triviale prouve que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\boxed{f^{(k)} : x \mapsto ae^x + (-1)^k ce^{-x}.}$

12.b. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (car somme de fonctions qui le sont), par la formule de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et 1 à l'ordre $n-1$, il existe $x_n \in]0, 1[$ tel que

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} 1^k + \frac{1^n}{n!} f^{(n)}(x_n) \Leftrightarrow \boxed{(n-1)!f(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} f^{(k)}(0) = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n}}.$$

12.c. Notons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in]0, 1[$, et que $f^{(n)}$ est bornée sur $[0, 1]$ par $|a|e^1 + |c|$ car

$$\forall x \in [0, 1], |f^{(n)}(x)| = |ae^x + (-1)^n ce^{-x}| \leqslant |a|e^1 + |c|.$$

Donc $\left(f^{(n)}(x_n)\right)_n$ est bornée[2], et donc $\boxed{\dfrac{f^{(n)}(x_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{(n-1)!}{k!} = (n-1)(n-2)\cdots(k+1) \in \mathbf{N}$, et $f^{(k)}(0) = a + (-1)^k c \in \mathbf{Z}$.
Par ailleurs, $f(1) = ae + ce^{-1}$. Mais on a supposé que $ae^2 + be + c = 0 \Leftrightarrow b = -(ae + ce^{-1})$, et donc $f(1) = -b \in \mathbf{Z}$.
On en déduit donc que $u_n \in \mathbf{Z}$.

Or une suite d'entiers qui tend vers 0 est nécessairement nulle à partir d'un certain rang.
En effet, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $|u_n| < \frac{1}{2}$, et donc[3], $u_n = 0$.

[2] Par $|a|e + |c|$.

[3] u_n étant entier.

12.d. Nous venons donc de prouver que pour $n \geqslant n_0$, $f^{(n)}(x_n) = 0 \Leftrightarrow ae^{x_n} + (-1)^n ce^{-x_n} = 0$.
Donc $a = (-1)^{n+1} c \underbrace{e^{-2x_n}}_{>0}$ est du signe de $(-1)^{n+1}c$.

En particulier, pour n pair, a et c sont de signes opposés, et pour n impair, a et c sont de même signe.
Ceci signifie que $a = c = 0$. Et alors nécessairement $be = 0 \Leftrightarrow b = 0$.
Ceci contredit le fait que $a \neq 0$, et donc $\boxed{e \text{ n'est pas algébrique de degré au plus } 2.}$

Commentaire *: en réalité, Charles HERMITE a prouvé en 1873 que e n'est racine d'aucun polynôme*[4] *non constant à coefficients entiers. On dit que e est un nombre transcendant. Si l'on sait que* **R** *contient bien plus de nombres transcendants que de nombres algébriques (racines d'un polynôme non constant à coefficients entiers), il est difficile d'exhiber des nombres transcendants (e et π étant les plus célèbres d'entre eux).*

[4] De quelque degré que ce soit.

Partie IV. Première inégalité de Kolmogorov

13.a. Puisque f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, elle satisfait bien les hypothèses[5] de la formule de Taylor-Lagrange, appliquée à l'ordre 1 entre x et $x+h$: il existe $c \in]x, x+h[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{f''(c)}{2}(x+h-h)^2 \Leftrightarrow f(x+h) - f(x) - hf'(x) = \frac{h^2}{2}f''(c).$$

Et donc $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| = \frac{h^2}{2}|f''(c)| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2$.

[5] De classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, x+h]$, 2 fois dérivable sur $]x, x+h[$.

Détails
M_2 est par définition le plus petit des majorants de $|f''|$. C'est donc en particulier **un** majorant de $|f''|$, de sorte que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ |f''(x)| \leqslant M_2.$$

13.b. De même, il existe $d \in]x-h, x[$ tel que

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{(-h)^2}{2}f''(d) \Rightarrow |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2.$$

Par inégalité triangulaire, on a donc

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| &= |(f(x+h) - f(x) - hf'(x)) - (f(x-h) - f(x) + hf'(x))| \\ &\leqslant |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| + |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \\ &\leqslant \frac{h^2}{2}M_2 + \frac{h^2}{2}M_2 \leqslant h^2 M_2.\end{aligned}$$

Et donc, toujours par inégalité triangulaire,

$$|2hf'(x)| = |(f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)) - (f(x+h) - f(x-h))| \leqslant h^2M_2 + |f(x+h)| + |f(x-h)| \leqslant h^2M_2 + 2M_0.$$

Et donc $\boxed{|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2.}$

13.c. L'inégalité que nous venons d'obtenir est valable pour tout $h > 0$.
Soit donc $g : h \mapsto \frac{M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2$.
Alors g est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée égale à $g' : h \mapsto -\frac{M_0}{h^2} + \frac{M_2}{2} = \frac{M_2h^2 - 2M_0}{h^2}$.
Donc la fonction g possède un minimum en $h_0 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$, et donc

$$|f'(x)| \leqslant g(h_0) = M_0\sqrt{\frac{M_2}{2M_0}} + \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}\frac{M_2}{2} \leqslant 2\sqrt{\frac{M_0M_2}{2}} \leqslant \sqrt{2M_0M_2}.$$

L'inégalité ainsi obtenue étant valable pour tout $x \in \mathbf{R}$, avec un majorant indépendant de $\mathbf{R}$, on en déduit que f' est bornée et que $\sqrt{2M_0M_2}$ est un majorant de $|f'|$, de sorte que M_1, qui est le plus petit des majorants de $|f'|$ est inférieur ou égal à $\sqrt{2M_0M_1}$.

Remarque : le calcul ci-dessus ne vaut que pour $M_2 \neq 0$. Mais M_2 est nul si et seulement si f'' est la fonction nulle, c'est-à-dire si et seulement si f' est constante, et donc si et seulement si f est affine.
Mais une fonction affine est bornée sur $\mathbf{R}$ si et seulement si elle est constante, et dans ce cas, f' est nulle, donc $M_1 = 0$.
Donc l'inégalité $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$ est encore bien valable.