# Devoir maison 17

*Vous traiterez au choix l'un des deux problèmes, le second étant plus difficile que le premier.*

## ▸ Problème 1 : noyaux et images itérés en dimension finie

Soit $E$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel (où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), et soit $f$ un endomorphisme de $E$.
On note $f^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, $f^{k+1} = f \circ f^k$.

### Partie I. Généralités

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Ker}(f^k)$ et $\mathrm{Im}(f^k)$ sont stables par $f$.
2. Prouver que les suites $(\mathrm{Im}\, f^k)_{k \geqslant 0}$ et $(\mathrm{Ker}\, f^k)_{k \geqslant 0}$ sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que :
$$\forall k \in \mathbf{N},\ \mathrm{Im}(f^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(f^k) \text{ et } \mathrm{Ker}(f^k) \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1}).$$
3. Prouver que s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^{k+1}) = \mathrm{Ker}(f^k)$, alors pour tout $p \geqslant k$, $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^k)$.
4. Montrer que s'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\mathrm{Im}(f^{k+1}) = \mathrm{Im}(f^k)$, alors pour tout $p \geqslant k$, $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^k)$.

### Partie II. Étude d'un exemple

Dans cette partie, $E$ désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3, et $(e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ l'unique endomorphisme de $E$ tel que :
$$f(e_1) = 0_E,\ f(e_2) = e_1 + 2e_2 - 3e_3,\ f(e_3) = e_1.$$

5. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et une base de $\mathrm{Im}\, f$.
6. Prouver que pour $k \geqslant 2$, $\dim \mathrm{Ker}\, f^k \geqslant 2$.
7. À l'aide d'une récurrence, montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $f^k(e_2) = 2^{k-2}(-e_1 + 4e_2 - 6e_3)$.
8. En déduire que pour tout $k \geqslant 2$, $\mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Im}\, f^2$ et $\mathrm{Ker}\, f^k = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$.
9. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f^2 \oplus \mathrm{Im}\, f^2$.

### Partie III. Cas de la dimension finie.

Dans cette partie, on suppose que $E$ est de dimension finie $n$.

10. Montrer que la suite $(\dim \mathrm{Ker}\, f^k)_{k \geqslant 0}$ est croissante, et justifier alors l'existence d'un entier $i$ tel que $\mathrm{Ker}\, f^{i+1} = \mathrm{Ker}\, f^i$.
On note alors $r = \min\{k \in \mathbf{N} \mid \mathrm{Ker}\, f^{k+1} = \mathrm{Ker}\, f^k\}$.
11. Justifier de même l'existence de $s = \min\{k \in \mathbf{N} \mid \mathrm{Im}\, f^k = \mathrm{Im}\, f^{k+1}\}$.
12. Prouver que $r = s$, que $r \leqslant n$ et que $E = \mathrm{Im}\, f^r \oplus \mathrm{Ker}\, f^r$.
13. Déterminer $s$ si $f$ est injectif. Même question si $f$ est nilpotent d'indice $p$.
14. Montrer que la restriction de $f$ à $N_r = \mathrm{Ker}\, f^r$ est nilpotente et préciser son indice de nilpotence.
15. Prouver que la restriction de $f$ à $I_r = \mathrm{Im}\, f^r$ est un automorphisme de $I_r$.

### Partie IV. Dimension infinie

16. Donner un exemple d'endomorphisme $f$ de $\mathbf{R}[X]$ pour lequel pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Ker}\, f^{k+1} \neq \mathrm{Ker}\, f^k$.
Donner un exemple d'endomorphisme $g$ de $\mathbf{R}[X]$ pour lequel pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathrm{Im}\, g^{k+1} \neq \mathrm{Im}\, g^k$.

## ▸ Problème 2 : hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ stables par produit

Le but de ce problème est de déterminer pour quelles valeurs de $n \geqslant 2$ il existe un hyperplan $\mathscr{H}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ stable par produit, c'est-à-dire pour lequel $\forall (A,B) \in \mathscr{H}^2$, $AB \in \mathscr{H}$, et de décrire tous ces hyperplans.
Tous les espaces vectoriels manipulés dans ce sujet sont des espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$.
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.
On pourra utiliser sans démonstration le résultat suivant, prouvé en TD :

$$\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4,\ E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}.$$

### I. Préliminaires matriciels

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On note $f_A : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}\right.$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $f_A$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$.
2. Prouver que $f_A$ est un isomorphisme si et seulement si $A \in GL_n(\mathbf{C})$.
3. ($\star$) On note $F_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mid AM = 0_n\}$.
   Montrer que $F_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, et que $\dim F_A = n(n - \mathrm{rg}(f_A))$.
   *Indication : on pourra prouver qu'une matrice est dans $F_A$ si et seulement si toutes ses colonnes sont dans $\mathrm{Ker}(f_A)$ et construire une base de $F_A$ à partir d'une base de $\mathrm{Ker}(f_A)$.*

### II. Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$

4. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\varphi_A : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ M & \longmapsto & \mathrm{tr}(AM) \end{array}\right.$.
   a. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\varphi_A$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
   b. Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\overline{A} = \left(\overline{a_{i,j}}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Calculer $\varphi_A(\overline{A}^\top)$.
   c. En déduire que $\varphi_A = 0_{\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{C}),\mathbf{C})} \Leftrightarrow A = 0_n$.
5. a. Donner sans démonstration la dimension de $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{C}),\mathbf{C})$.
   b. Montrer que l'application $\Phi : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{C}),\mathbf{C}) \\ A & \longmapsto & \varphi_A \end{array}\right.$ est une application linéaire.
   c. À l'aide de la question 4.c, prouver que $\Phi$ est injective.
   d. En déduire que pour toute forme linéaire $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$, il existe une unique matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\varphi = \varphi_A$.
6. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on note $\mathscr{H}_A = \mathrm{Ker}\,\varphi_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \mid \mathrm{tr}(AM) = 0\}$.
   a. Montrer que pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \setminus \{0_n\}$, $\mathscr{H}_A$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.
   b. Justifier que si $\mathscr{H}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, alors il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, non nulle, telle que $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A$.
   c. Prouver de plus que si $A$ et $B$ sont deux matrices non nulles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, alors $\mathscr{H}_A = \mathscr{H}_B$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $A = \lambda B$.

### III. Hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ stables par produit

Dans cette partie, $\mathscr{H}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ stable par produit.
Par la question 6.b, il existe donc une matrice non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, qu'on notera $A$, telle que $\mathscr{H} = \mathscr{H}_A$.

7. Dans cette question, on souhaite prouver que $I_n \in \mathscr{H}$. On raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin \mathscr{H}$.
   a. Justifier que $\varphi_A(I_n) \neq 0$, et que $\mathscr{M}_n(\mathbf{C}) = \mathscr{H} \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
   b. Prouver que $\psi : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & \dfrac{\varphi_A(M)}{\varphi_A(I_n)} I_n \end{array}\right.$ est la projection sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à $\mathscr{H}$.

c. Montrer que $\forall (M,M') \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})^2$, $\psi(MM') = \psi(M)\psi(M')$.

d. Prouver alors que pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $M^2 \in \mathcal{H} \Rightarrow M \in \mathcal{H}$.

e. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Rightarrow E_{i,j} \in \mathcal{H}$.

f. En déduire alors que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E_{i,i} \in \mathcal{H}$ et aboutir à une contradiction.

8. Prouver que $\mathcal{H}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

9. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = 0$.

10. Soit $M \in \mathcal{H}$.

   a. Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi_A) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_{AM})$.

   b. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $A(M - \lambda I_n) = 0_n$.

11. À l'aide de la question précédente, montrer que $\mathcal{H} \subset F_A + \mathrm{Vect}(I_n)$, où $F_A$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ défini à la question 3.

12. En déduire que $n\,\mathrm{rg}(f_A) \leqslant 2$, puis que nécessairement $n = 2$.

13. Montrer que $\det(A) = 0$, et en déduire que $A$ est nilpotente, d'indice de nilpotence égal à 2.

## IV. Épilogue : description des hyperplans de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ stables par produit

Par la partie précédente, on sait désormais qu'un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ stable par produit est de la forme $\mathcal{H}_A$, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C}) \setminus \{0_2\}$ vérifiant $A^2 = 0_2$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.
On considère donc dans cette partie une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, non nulle, telle que $A^2 = 0_2$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$.

14. Justifier qu'il existe $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{C})$ tel que $AX_1 \neq 0_{2,1}$.

15. On note $X_2 = AX_1$. Que vaut $AX_2$ ? Montrer que $(X_1, X_2)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{C})$.

16. Soit $P \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ la matrice dont la première colonne est $X_2$ et la seconde est $X_1$. Justifier que $P$ est inversible.

17. Prouver alors que $P^{-1}AP = U$, où $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

18. Montrer que $\mathcal{H}_U$ est l'ensemble $\mathcal{T}_2(\mathbf{C})$ des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.

19. Prouver que l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ réalise une bijection de $\mathcal{T}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathcal{H}_A$, qui est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
    En déduire que $\mathcal{H}_A$ est stable par produit, et que l'application ci-dessus est également un isomorphisme d'anneaux entre $\mathcal{T}_2(\mathbf{C})$ et $\mathcal{H}_A$

20. Prouver enfin que pour toute matrice $Q \in GL_2(\mathbf{C})$, $\{QMQ^{-1},\ M \in \mathcal{T}_2(\mathbf{C})\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ stable par produit.

***Conclusion*** *: on a donc prouvé que des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ stables par produit n'existent que si $n = 2$, et qu'alors les tels hyperplans sont exactement les ensembles de la forme $\{P^{-1}MP,\ M \in \mathcal{T}_2(\mathbf{C})\}$, où $P$ est une matrice de $GL_2(\mathbf{C})$.*
*On notera qu'il n'y a pas unicité d'une telle matrice $P$, par exemple, si $P = 2I_2$, alors $\{P^{-1}MP,\ M \in \mathcal{T}_2(\mathbf{C})\} = \mathcal{T}_2(\mathbf{C})$.*

# CORRECTION DU DEVOIR MAISON 17

## ► Problème 1 : noyaux et images itérés en dimension finie

**Partie I. Généralités**

1. Soit $k \in \mathbf{N}$. Soit $x \in \operatorname{Ker} f^k$. Alors $f^k(x) = 0_E$. On souhaite prouver que $f(x) \in \operatorname{Ker} f^k$, c'est-à-dire que $f^k(f(x)) = 0_E$.
Mais $f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$.
Donc $\boxed{\operatorname{Ker} f^k \text{ est stable par } f.}$

De même, soit $y \in \operatorname{Im} f^k$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^k(x)$, et donc $f(y) = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \in \operatorname{Im} f^k$.
Donc $\boxed{\operatorname{Im} f^k \text{ est stable par } f.}$

2. Soit $k \in \mathbf{N}$. Soit $y \in \operatorname{Im} f^{k+1}$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \in \operatorname{Im} f^k$.
Donc $\boxed{\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k.}$

De même, soit $x \in \operatorname{Ker} f^k$. Alors $f^k(x) = 0_E$, et donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_E) = 0_E$, de sorte que $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$.
Donc $\boxed{\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}.}$

3. Nous allons prouver que si $\operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k$, alors $\operatorname{Ker} f^{k+2} = \operatorname{Ker} f^{k+1}$.
Nous savons déjà que $\operatorname{Ker} f^{k+1} \subset \operatorname{Ker} f^{k+2}$.
Inversement, soit $x \in \operatorname{Ker} f^{k+2}$. Alors $f^{k+1}(f(x)) = 0_E$, de sorte que $f(x) \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$. Mais alors[1] $f(x) \in \operatorname{Ker} f^k$, de sorte que $f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = 0_E$. Et donc $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$.
Donc $\operatorname{Ker} f^{k+2} \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$, et donc par double inclusion, $\operatorname{Ker} f^{k+2} = \operatorname{Ker} f^k$.

Prouvons alors par récurrence que pour tout $p \geqslant k$, $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^k$.
Pour $p = k$ et $p = k+1$ c'est évident.
Et si pour $p \geqslant k+1$, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$, alors $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{k-1} \subset \operatorname{Ker} f^k$, de sorte que $\operatorname{Ker} f^{k-1} = \operatorname{Ker} f^p$, et donc par ce qui précède, $\operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$.
Donc par le principe de récurrence, pour tout $k \geqslant p$, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^p$.

[1] Puisqu'on a supposé $\operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k$.

4. Prouvons de même que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1} \Rightarrow \operatorname{Im} f^{k+2} = \operatorname{Im} f^{k+1}$.
Soit donc $y \in \operatorname{Im} f^{k+2}$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+2}(x) = f(f^{k+1}(x))$.
Mais $f^{k+1}(x) \in \operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^k$, donc il existe $t \in E$ tel que $f^{k+1}(x) = f^k(t)$.
Et donc $y = f(f^k(t)) = f^{k+1}(t) \in \operatorname{Im} f^{k+1}$.
Donc $\operatorname{Im} f^{k+2} \subset \operatorname{Im} f^{k+1}$, et l'inclusion réciproque ayant été prouvée à la question 2, $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^{k+2}$.

On prouve alors de proche en proche, comme à la question précédente que pour tout $p \geqslant k$, $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^k$.

> ⚠ **Attention !**
> Le $t$ en question n'a aucune raison d'être égal à $x$. On veillera donc bien à le noter différemment.

**Partie II. Étude d'un exemple**

5. Soit $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in E$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{K}$.
Alors $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x) = 0_E \Leftrightarrow af(e_1) + bf(e_2) + cf(e_3) = 0_E$. Soit encore

$$b(e_1 + 2e_2 - 3e_3) + ce_1 = 0_E \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ 2b = 0 \\ -3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0.$$

Donc $x \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow x = ae_1 \Leftrightarrow x \in \operatorname{Vect}(e_1)$.
Donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1)$ possède une base formée d'un seul élément : le vecteur $e_1$.

De plus, on sait que $\operatorname{Im} f$ est engendré par $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, et puisque $f(e_1) = 0_E$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_2), f(e_3))$.
Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$, donc $f(e_2), f(e_3)$ est une famille génératrice de cardinal 2 de $\operatorname{Im} f$, donc en est une base.

> **Alternative**
> Sans théorème du rang, on peut directement vérifier qu'il s'agit d'une famille libre (car formée de deux vecteurs non colinéaires).

6. Notons que $e_1 \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et $f^2(e_3) = f(e_1) = 0_E$, donc $e_3 \in \operatorname{Ker} f^2$.
Ainsi, $\operatorname{Vect}(e_1, e_3) \subset \operatorname{Ker} f^2$. Puisque $(e_1, e_3)$ est libre[2], $\dim \operatorname{Vect}(e_1, e_3) = 2$, et donc $\dim \operatorname{Ker} f^2 \geqslant 2$.
Et donc pour $k \geqslant 2$, $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f^k$, donc $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f^k \geqslant 2.}$

[2] Car sous-famille d'une famille libre.

7. Pour $k = 2$, on a

$$f^2(e_2) = f(e_1+2e_2-3e_3) = f(e_1)+2f(e_2)-3f(e_3) = 2e_1+4e_2-6e_3-3e_1 = -e_1+4e_2-6e_3 = 2^{2-2}\left(-e_1 + 4e_2 - 6e_3\right).$$

Donc la récurrence est initialisée.
Supposons donc que $f^k(e_2) = 2^{k-2}(-e_1 + 4e_2 - 6e_3)$. Alors

$$f^{k+1}(e_2) = 2^{k-2}\left(-f(e_1) + 4f(e_2) - 6f(e_3)\right) = 2^{k-2}(4e_1+8e_2-12e_3-6e_1) = 2^{k-2}(-2e_1+8e_2-12e_3) = 2^{k-1}(-e_1+4e_2-6e_3).$$

Donc par le principe de récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, $\boxed{f^k(e_2) = 2^{k-2}\left(-e_1 + 4e_2 - 6e_3\right).}$

8. Puisque $-e_1 + 4e_2 - 6e_3 \neq 0_E$, nous avons donc déjà $\dim \operatorname{Im} f^k \geqslant 1$ pour $k \geqslant 2$.
Or par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f^k = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f^k \leqslant 3 - 2 = 1$.
Donc nécessairement, $\dim \operatorname{Im} f^k = 2 = \dim \operatorname{Im} f^2$. Puisque de plus $\operatorname{Im} f^k \subset \operatorname{Im} f^2$, on a égalité, $\boxed{\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^2.}$
Et donc $\dim \operatorname{Ker} f^k = 2$, et puisque $\operatorname{Vect}(e_1, e_3) \subset \operatorname{Ker} f^k$, par égalité des dimensions, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Vect}(e_1, e_3)$.

9. Nous avons déjà, par le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f^2 + \dim \operatorname{Im} f^2$.
Par ailleurs, puisque $-e_1 + 4e_2 - 6e_3 \in \operatorname{Im} f^2$, qui est de dimension 1,

$$\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Vect}(-e_1 + 4e_2 - 6e_3).$$

**Détails**
Un espace de dimension 1 (une droite) possède pour base n'importe lequel de ses vecteurs non nuls.

Soit donc $x \in \operatorname{Ker} f^2 \cap \operatorname{Im} f^2$.
Alors $x \in \operatorname{Ker} f^2$, donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbf{K}$ tels que $x = \lambda e_1 + \mu e_2$.
Et puisque $x \in \operatorname{Im} f^2$, il existe $\alpha \in \mathbf{K}$ tel que $x = \alpha(-e_1 + 4_e 2 - 6e_3)$.
Et donc $\lambda e_1 + \mu e_3 = \alpha(-e_1 + 4e_2 - 6e_3) \Leftrightarrow (\lambda + \alpha)e_1 - 4\alpha e_2 + (\mu + 6\alpha)e_3 = 0_E$.
Puisque $(e_1, e_2, e_3)$ est libre, il vient $\begin{cases} \lambda + \alpha = 0 \\ -4\alpha = 0 \\ \mu + 6\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \alpha = \mu = 0.$
Et donc $x = 0_E$. On en déduit que $\operatorname{Im} f^2 \cap \operatorname{Ker} f^2 = \{0_E\}$.

Couplé à la condition sur les dimensions, ceci nous donne donc $\boxed{E = \operatorname{Im} f^2 \oplus \operatorname{Ker} f^2.}$

### Partie III. Cas de la dimension finie

10. Pour tout $k \geqslant 0$, $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$, et donc $\dim \operatorname{Ker} f^k \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$.
Puisque pour tout $k \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^k \leqslant n$, $A = \{\dim \operatorname{Ker} f^k,\ k \in \mathbf{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{N}$, elle possède un plus grand élément $d$. Soit donc $i \in \mathbf{N}$ tel que $d = \dim \operatorname{Ker} f^i$.
Alors par ce qui précède, $\dim \operatorname{Ker} f^i \leqslant \dim \operatorname{Ker} f^{i+1}$, et puisque $d = \max A$, $\dim \operatorname{Ker} f^{i+1} \leqslant d = \dim \operatorname{Ker} f^i$.
Donc $\dim \operatorname{Ker} f^{i+1} = \dim \operatorname{Ker} f^i$. Puisque $\operatorname{Ker} f^i \subset \dim \operatorname{Ker} f^{i+1}$, on a donc égalité : $\operatorname{Ker} f^i = \operatorname{Ker} f^{i+1}$.

**Rappel**
Un sous-espace vectoriel de $E$ qui a même dimension que $E$ est nécessairement égal à $E$ tout entier.

**Alternative** : la suite $(\dim \operatorname{Ker} f^k)_{k \geqslant 0}$ est une suite croissante et majorée. Donc elle est convergente. Mais étant une suite d'entiers, elle est nécessairement stationnaire, et donc il existe $i \in \mathbf{N}^*$ tel que $\dim \operatorname{Ker} f^{i+1} = \dim \operatorname{Ker} f^i$. La suite est similaire à ce qui a été fait ci-dessus.
L'ensemble $\left\{k \in \mathbf{N}^* \mid \operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k\right\}$ est une partie non vide (par la question précédente) de $\mathbf{N}^*$, et possède donc un plus petit élément.

11. Sur le même principe $B = \{\dim \operatorname{Im} f^k, k \in \mathbf{N}^*\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$, donc elle possède un plus petit élément $d$. Et alors si $s$ est tel que $\dim \operatorname{Im} f^s = d$, par décroissance de la suite $\left(\dim \operatorname{Im} f^k\right)_k$, pour tout $k \geqslant s$, $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^s$.

12. Si $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$, alors par le théorème du rang,
$\dim E - \dim \operatorname{Ker} f^k = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$, et donc $\dim \operatorname{Ker} f^k = \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

Ceci est en particulier vrai pour $k = s$, et donc $\dim \operatorname{Ker} f^s = \dim \operatorname{Ker} f^{s+1}$, si bien que par définition de $r$, $r \leqslant s$.
On prouve de même que puisque $\dim \operatorname{Ker} f^s = \dim \operatorname{Ker} f^{s+1}$, par le théorème du rang $\dim \operatorname{Im} f^s = \dim \operatorname{Im} f^{s+1}$ et donc $s \leqslant r$.
Et donc par double inégalité, $\boxed{r = s.}$

On a déjà, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} f^r + \dim \operatorname{Ker} f^r = \dim E$.
Il s'agit donc de prouver que $\operatorname{Im} f^r \cap \operatorname{Ker} f^r = \{0_E\}$.
Soit donc $y \in \operatorname{Im} f^r \cap \operatorname{Ker} f^r$. Alors $f^r(y) = 0_E$, et il existe $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$.
Donc $f^{2r}(x) = 0_E$. Or $2r \geqslant r$, donc $\operatorname{Ker} f^{2r} = \operatorname{Ker} f^r$, de sorte que $x \in \operatorname{Ker} f^r$. On a donc $f^r(x) = 0_E$, soit encore $y = 0_E$.
Donc $\operatorname{Ker} f^r \cap \operatorname{Im} f^r = \{0_E\}$, et donc $\boxed{E = \operatorname{Im} f^r \oplus \operatorname{Ker} f^r.}$

13. On sait que si $f$ est injectif, $\operatorname{Ker} f = \{0_E\} = \operatorname{Ker} \mathrm{id}_E = \operatorname{Ker} f^0$. Donc $r = 0$, et donc $s = 0$.
Et si $f$ est nilpotent d'indice $p$, alors pour tout $k \geqslant p$, $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$, donc $\operatorname{Im} u^k = \{0_E\}$.
Donc déjà $s \leqslant p$.
Et puisque $u^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$, $s > p - 1$, et donc $\boxed{s = p.}$

14. Si $f \in N_r$, alors $f^r(x) = 0_E$. Soit encore $f^r_{|N_r}(x) = 0_E$.
Donc $f_{N_r}$ est nilpotent et son indice de nilpotence vaut au plus $r$.
De plus, on sait que $\operatorname{Ker} f^{r-1} \neq \operatorname{Ker} f^r$, et donc si $x \in N_r \setminus \operatorname{Ker} f^{r-1}$, on a $f^{r-1}(x) \neq 0_E$, et donc $f^{r-1}_{|N_r} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.
Donc $\boxed{\text{l'indice de nilpotence de } f_{|N_r} \text{ vaut exactement } r.}$

15. Notons que $I_r$ étant stable par $f$, $f_{|I_r}$ peut bien être vu[3] comme un endomorphisme de $I_r$.
Il s'agit donc de prouver que $f_{|I_r}$ est injectif, puisque $I_r$ étant de dimension finie, tout endomorphisme injectif de $I_r$ est automatiquement[4] bijectif.
Soit donc $y \in \operatorname{Ker} f_{|I_r} = \operatorname{Ker} f \cap I_r$.
Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^r(x)$, et $f(y) = 0_E$.
Donc $f^{r+1}(x) = 0_E$, de sorte que $x \in \operatorname{Ker} f^{r+1} = \operatorname{Ker} f^r$. Et donc $y = f^r(x) = 0_E$.
Ceci prouve bien que $\operatorname{Ker} f_{|I_r} = \{0_E\}$ et donc $f_{|I_r}$ est injectif, donc un automorphisme de $I_r$.

[3] Moyennant corestriction.

[4] C'est le corollaire du théorème du rang.

**Partie IV. Dimension infinie**

16. Considérons $f : P \mapsto P'$, de sorte que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f^k : P \mapsto P^{(k)}$.
Il est bien connu que $P^{(k)} = 0$ si et seulement si $\deg P < k$, et donc $\operatorname{Ker} f^k = \mathbf{R}_{k-1}[X]$.
Et donc pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\operatorname{Ker} f^k \neq \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

De même, soit $g : P \mapsto XP$. Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $g^k : P \mapsto X^k P$.
Donc $\operatorname{Im} g^k = \{X^k P,\ P \in \mathbf{R}[X]\}$ est l'ensemble des polynômes divisibles par $X^k$.
Donc $X^{k+1} \in \operatorname{Im} g^{k+1}$ et $X^{k+1} \notin \operatorname{Im} g^k$.
Donc $\operatorname{Im} g^{k+1} \neq \operatorname{Im} g^k$, et ce pour tout $k \in \mathbf{N}$.

## ▸ Problème 2 : hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ stables par produit (concours marocain 2020)

**Préliminaires matriciels**

1. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors

$$f_A(\lambda X + Y) = A(\lambda X + Y) = \lambda AX + AY = \lambda f_A(X) + f_A(Y).$$

Donc $f_A$ est linéaire et donc est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$.

2. Puisque $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ est de dimension finie, $f_A$ est un isomorphisme si et seulement si il est injectif.
Soit si et seulement si $\operatorname{Ker} f_A = \{0_{n,1}\} \Leftrightarrow (\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C}),\ AX = 0_{n,1} \Leftrightarrow X = 0_{n,1})$.
Mais nous reconnaissons là l'une des caractérisations des matrices inversibles, donc $f_A$ est un isomorphisme si et seulement si $A \in GL_n(\mathbf{C})$.

3. Il est évident que la matrice nulle appartient à $F_A$.
Soient $M_1, M_2 \in F_A$ et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors

$$A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda 0_n + 0_n = 0_n$$

donc $\lambda M_1 + M_2 \in F_A$. Et donc $F_A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

Pour la dimension, mettons tout de suite de côté le cas où $A$ est inversible. Dans ce cas, on a $\operatorname{rg}(f_A) = \dim \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C}) = n$, et donc $n - \operatorname{rg}(f_A) = 0$.
Mais par ailleurs, si $M \in F_A$, alors $AM = 0_n$, et donc par multiplication à gauche par $A^{-1}$, $M = 0_n$. Donc $F_A = \{0_n\}$ est de dimension $0 = n \times (n - \operatorname{rg}(f_A))$.
Nous supposons donc dans la suite de la question que $A$ n'est pas inversible[5].
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, et soient $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. Nous savons alors que la $j^{\text{ème}}$ colonne du produit $AM$ est égal à $AC_j$.
Et donc $M \in F_A \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], AC_j = 0_{n,1} \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], C_j \in \operatorname{Ker} f_A$.

[5] Et donc que $f_A$ n'est pas un isomorphisme, donc que $\operatorname{rg}(f_A) < n$.

Soit donc $d = \dim \operatorname{Ker}(f_A)$, et soit $X_1, \dots, X_d$ une base de $\operatorname{Ker} f_A$.
Pour $j \in [\![1, n]\!]$ et $k \in [\![1, d]\!]$, notons $M_{j,k}$ la matrice dont tous les colonnes sont nulles, sauf la $j^{\text{ème}}$, égale à $X_k$.
Soit alors $M \in F_A$, et soient comme précédemment $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $M$, qui sont donc dans $\operatorname{Ker} f_A$.

**Remarque**
Maintenant que vous connaissez les matrices, vous avez probablement reconnu que $\operatorname{Ker}(f_A)$ est ce que nous avons appelé $\operatorname{Ker} A$.

Alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe des scalaires $\lambda_{k,j}$, $1 \leqslant k \leqslant d$ tels que $C_j = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \lambda_{k,j} X_k$.

Autrement dit, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M$ est celle de $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} \lambda_{k,j} M_{j,k}$.

Mais il s'agit aussi de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{d} \lambda_{k,i} M_{i,k}$ puisque pour $i \neq j$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de $M_{i,k}$ est nulle.

Et donc $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{d} \lambda_{k,i} M_{i,k} \in \operatorname{Vect}(M_{i,k}, (i,k) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, d]\!])$.

Nous avons donc mis en évidence une famille génératrice de $F_A$, prouvons qu'elle est libre.

Soient donc $(\lambda_{i,k})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant k \leqslant d}}$ des complexes tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{d} \lambda_{i,k} M_{i,k} = 0_n$.

Alors la $j^{\text{ème}}$ colonne du membre de gauche est $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} \lambda_{j,k} X_k$, qui est donc nul.
Par liberté de $(X_1, \dots, X_d)$, on a donc $\lambda_{j,1} = \lambda_{j,2} = \cdots = \lambda_{j,d} = 0$.
Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la famille des $M_{i,k}$ est libre, et donc est une base de $F_A$.
Elle est de cardinal $n \times d$, et donc

$$\dim F_A = n \times d = n \times \dim \operatorname{Ker} f_A = n \times (n - \operatorname{rg}(f_A)).$$

### II. Formes linéaires sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et hyperplans de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$

**4.a.** Il est évident que $\varphi_A$ est à valeurs dans $\mathbf{C}$.
Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, et soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors

$$\varphi_A(\lambda M + N) = \operatorname{tr}(A(\lambda M + N)) = \operatorname{tr}(\lambda AM + AN) = \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(AN) = \lambda \varphi_A(M) + \varphi_A(N).$$

Donc $\varphi_A$ est linéaire, et donc est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

**4.b.** On a

$$\varphi_A\left(\overline{A}^\top\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[A\overline{A}^\top\right]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[A]_{i,k}[\overline{A}^\top]_{k,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\overline{a}_{i,k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|^2.$$

**4.c.** Il est évident que si $A = 0_n$, alors pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\varphi_A(M) = \operatorname{tr}(AM) = 0$.
Inversement, supposons que $\varphi_A$ soit la forme linéaire nulle, c'est-à-dire que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\operatorname{tr}(AM) = 0$.
Alors en particulier, $\varphi_A\left(\overline{A}^\top\right) = 0$.

Par la question précédente, on a donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|^2 = 0$.
Mais il s'agit alors d'une somme de réels positifs, qui est nulle si et seulement si chacun de

ses termes est nul.
Soit si et seulement si $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,k} = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$.

**5.a.** Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et $\lambda \in \mathbf{C}$. Alors, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a

$$[\Phi(\lambda A + B)](M) = \operatorname{tr}((\lambda A + B)M) = \lambda \operatorname{tr}(AM) + \operatorname{tr}(BM) = [\lambda\Phi(A)](M) + [\Phi(B)](M).$$

Donc $\Phi(\lambda A + B) = \lambda\Phi(A) + \Phi(B)$, et donc $\Phi$ est linéaire.

**5.b.** Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a $A \in \operatorname{Ker}\Phi \Leftrightarrow \varphi_A = 0_{\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}),\mathbf{C})}$.
Or, par la question 4.b, cette dernière condition est vérifiée si et seulement si $A = 0$, donc $\operatorname{Ker}\Phi = \{0_n\}$. Donc $\Phi$ est injective.

**5.c.** Nous savons que $\dim \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \mathbf{C}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \times \dim C = \dim \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
Et donc puisque $\Phi$ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension, c'est un isomorphisme.
Et donc pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \mathbf{C})$, il existe un unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $\varphi = \Phi(A) = \varphi_A$.

**6.a.** Par 4.c, nous savons que puisque $A$ est non nulle, la forme linéaire $\varphi_A$ est également non nulle. Et donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

**6.b.** Inversement, si $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, alors il existe une forme linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbf{C}), \mathbf{C})$, non nulle, telle que $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}\varphi$.
Mais alors il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $\varphi = \varphi_A$, et donc $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}\varphi_A = \mathcal{H}_A$.

**6.c.** Nous savons que $\operatorname{Ker}\varphi_A = \operatorname{Ker}\varphi_B$ si et seulement il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $\varphi_A = \lambda\varphi_B$.
Soit si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $\Phi(A) = \Phi(\lambda B)$, ce qui par injectivité de $\Phi$ est équivalent à $A = \lambda B$.

**Rappel**
Deux formes linéaires non nulles définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont colinéaires.

**III. Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ stables par produit.**

**7.a.** Puisque $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A = \operatorname{Ker}(\varphi_A)$, si $I_n \notin A$, alors $I_n \notin \operatorname{Ker}(\varphi_A)$, et donc $\varphi_A(I_n) \neq 0$.
Il est alors classique[6] que toute droite engendré par un élément qui n'est pas dans $\mathcal{H}$ est un supplémentaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Et donc en particulier, c'est le cas de $\operatorname{Vect}(I_n)$.

[6] C'est dans le cours.

**7.b.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Notons $M = N + \lambda I_n$, avec $N \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ l'unique décomposition de $M$ comme un élément de $\mathcal{H}$ plus un élément de $\operatorname{Vect}(I_n)$.
Alors $\varphi_A(M) = \underbrace{\varphi_A(N)}_{=0 \text{ car } N\in\mathcal{H}} + \lambda\varphi_A(I_n)$.

Donc $\lambda = \dfrac{\varphi_A(M)}{\varphi_A(I_n)}$.

Le projeté de $M$ sur $\operatorname{Vect}(I_n)$ parallèlement à $\mathcal{H}$ est alors[7] $\lambda I_n = \dfrac{\varphi_A(M)}{\varphi_A(I_n)} I_n = \psi(M)$.

Et donc $\psi$ est bien la projection sur $\mathcal{H}$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(I_n)$.

[7] Par définition d'une projection.

**7.c.** *On a sûrement envie d'utiliser la question précédente, mais elle ne nous est en fait d'aucune aide ici car on ne sait rien de $\varphi_A(MM')$.*
Soient donc $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, et notons $M = N + \lambda I_n$ et $M' = N' + \lambda' I_n$, avec $N, N' \in \mathcal{H}$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbf{C}$. On a donc

$$MM' = (N + \lambda I_n)(N' + \lambda' I_n) = \underbrace{NN' + \lambda N + \lambda N'}_{\in\mathcal{H}} + \lambda\lambda' I_n.$$

Et donc $\psi(MM') = \lambda\lambda' I_n = \psi(M)\psi(M')$.

**Subtilité**
Ici, $\varphi_A(M)$ est un complexe, donc son carré est nul si et seulement si il est nul.
En revanche, $\psi(M)$ est une matrice carrée, et son carré peut-être nul sans que la matrice elle-même ne le soit (matrice nilpotente d'indice 2). On aurait pu arguer que $\psi(M)$ est dans $\operatorname{Vect}(I_n)$, et que la seule matrice scalaire de carré nul est la matrice nulle, mais il faut impérativement un argument de ce type pour conclure.

**7.d.** Notons que $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}\psi$. Et donc si $M^2 \in \mathcal{H}$, alors $\psi(M^2) = 0_n$. Soit encore $(\psi(M))^2 = 0_n$.
Ce qui en utilisant la formule ci-dessus, montre que $\varphi_A(M)^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi_A(M) = 0 \Leftrightarrow A \in \mathcal{H}$.

**7.e.** Nous savons, grâce à la formule rappelée en début de sujet que pour $i \neq j$,

$$E_{i,j}^2 = E_{i,j}E_{i,j} = \delta_{i,j}E_{i,j} = 0_n.$$

Et donc en particulier, $E_{i,j}^2 \in \mathcal{H}$, si bien que $E_{i,j} \in \mathcal{H}$.

**Remarque**
Sur le même principe, $\mathcal{H}$ doit nécessairement contenir toutes les matrices nilpotentes.

**7.f.** Pour $i \in [\![1,n]\!]^2$ et $j \neq i$, on a $E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i}$. Et par la question précédente, $E_{i,j}$ et $E_{j,i}$ sont dans $\mathcal{H}$, donc par stabilité de $\mathcal{H}$ par produit, $E_{i,i} \in \mathcal{H}$.
Nous venons donc de prouver que $\mathcal{H}$ contient toutes les matrices élémentaires, et donc contient $\operatorname{Vect}(E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2) = \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
Ceci est absurde car $\mathcal{H}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et donc de dimension strictement inférieure à celle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.
On en déduit donc que $\mathcal{H}$ contient $I_n$.

**8.** Puisque $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel, c'est en particulier un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbf{C}), +)$. On l'a supposé stable par produit, et $I_n \in \mathscr{H}$, donc ceci suffit à garantir que $\mathscr{H}$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

**9.** Puisque $I_n \in \mathscr{H}$, $\varphi_A(I_n) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(AI_n) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A) = 0$.

**10.a.** Soit $N \in \operatorname{Ker}(\varphi_A) = \mathscr{H}$.
Alors, par stabilité de $\mathscr{H}$ par produit, $MN \in \mathscr{H}$, et donc $\varphi_A(MN) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(AMN) = 0 \Leftrightarrow \varphi_{AM}(N) = 0$.
Et donc on a bien $\operatorname{Ker}(\varphi_A) \subset \operatorname{Ker}(\varphi_{AM})$.

**10.b.** Soit $AM = 0_n$, auquel cas $\lambda = 0$ convient.
Soit $AM \neq 0$, et alors $\operatorname{Ker}(\varphi_{AM})$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Puisqu'il contient $\operatorname{Ker}(\varphi_A)$ et que ces deux espaces sont de même dimension[8], ils sont égaux.
Et alors par la question 6.c, il existe $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $AM = \lambda A \Leftrightarrow A(M - \lambda I_n) = 0_n$.

[8] Deux hyperplans sont toujours de même dimension.

**11.** Nous venons donc de prouver que si $M \in \mathscr{H}$, alors il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $M - \lambda I_n \in F_A$.
Et alors $M = (M - \lambda I_n) + \lambda I_n \in F_A + \operatorname{Vect}(I_n)$.
Donc $\mathscr{H} \subset F_A + \operatorname{Vect}(I_n)$.

**12.** On a donc $\dim \mathscr{H} \leqslant \dim F_A + \dim \operatorname{Vect}(I_n)$.
Ce qui, en reprenant la dimension de $F_A$ obtenue à la question 3, nous donne,

$$n^2 - 1 \leqslant n^2 - n \operatorname{rg}(f_A) + 1 \Leftrightarrow n \operatorname{rg}(f_A) \leqslant 2.$$

Puisque $A$ n'est pas la matrice nulle, il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ tel que $AX \neq 0_{n,1} \Leftrightarrow f_A(X) \neq 0_{n,1}$.
Et donc $\operatorname{rg}(f_A) \geqslant 1$. Si bien qu'on doit avoir $n \leqslant 2$, et donc $n = 2$.

**13.** Si $A$ était inversible, $f_A$ serait un isomorphisme, et donc $\operatorname{rg}(f_A) = 2$, ce qui ne permet pas d'avoir $2 \operatorname{rg}(f_A) \leqslant 2$.
Donc $A$ n'est pas inversible, de sorte que $\det(A) = 0$.

Rappelons que pour toute matrice $M$ de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$, on a $M^2 - \operatorname{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0_2$.
Donc ici, $A^2 - \underbrace{\operatorname{tr}(A)}_{=0} A + \underbrace{\det(A)}_{=0} I_2 = 0_2 \Leftrightarrow A^2 = 0_2$.
Puisque de plus $A \neq 0_2$, $A$ est donc nilpotente d'indice 2.

### IV. Épilogue : description des hyperplans de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ stables par produit.

**14.** Puisque $A$ n'est pas la matrice nulle, l'une au moins de ses colonnes est non nulle. Et donc soit $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (qui est la première colonne de $A$) est non nul, soit $A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ est non nul.
Et donc il existe $X_1 \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C})$ tel que $AX_1 \neq 0_{2,1}$.

**15.** On a $AX_2 = A^2X_1 = 0_nX_1 = 0_{2,1}$.
Puisque $\dim \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C}) = 2$, il suffit de prouver que $(X_1, X_2)$ est libre, car alors étant de cardinal 2, ce sera automatiquement une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C})$.
Soient donc $\lambda_1, \lambda_2$ des complexes tels que $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0_{2,1}$.
Alors en multipliant à gauche par $A$, il vient $\lambda_1 AX_1 + \lambda_2 AX_2 = 0_{2,1} \Leftrightarrow \lambda_1 AX_1 = 0_{2,1}$.
Or par hypothèse, $AX_1 \neq 0_{2,1}$, donc $\lambda_1 = 0$.
Reste alors $\lambda_2 X_2 = 0_{2,1}$, et puisque $X_2 = AX_1 \neq 0_{2,1}$, $\lambda_2 = 0$.
Donc $(X_1, X_2)$ est libre et donc est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C})$.

**16.** La famille des colonnes de $P$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{C})$, donc il s'agit d'une caractérisation des matrices inversibles rencontrée plus tôt dans l'année.
Plus simplement, pour une matrice $2 \times 2$, nous savons qu'elle est inversible si et seulement si ses colonnes ne sont pas colinéaires, ce qui est nécessairement le cas ici puisque $(X_1, X_2)$ est libre.

**17.** Pour éviter d'avoir à calculer $P^{-1}$, prouvons plutôt que $AP = PU$.
Souvenons-nous à cet effet que la $j^{\text{ème}}$ colonne de $AP$ est égale au produit de $A$ par la $j^{\text{ème}}$ colonne de $P$.
Et en particulier, la première colonne de $AP$ est $AX_2 = 0_{2,1}$.
Et sa seconde colonne est $AX_1 = X_2$.

Par ailleurs, la première colonne de $PU$ est nulle, car la première colonne de $U$ l'est.
Et la seconde colonne de $PU$ est $P\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, c'est-à-dire la première colonne de $P$, donc $X_2$.

Et donc $AP = PU$ puisque ces deux matrices ont les mêmes colonnes.
Et par conséquent $P^{-1}AP = U$.

**18.** Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$. Alors

$$M \in \mathcal{H}_U \Leftrightarrow \operatorname{tr}(UM) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tr}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow c = 0.$$

Donc $\mathcal{H}_U = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, (a, b, d) \in \mathbf{C}^3\right\} = \mathcal{T}_2(\mathbf{C})$.

**19.** Notons $f$ l'application définie sur $\mathcal{T}_2(\mathbf{C})$, qui à $M$ associe $PMP^{-1}$.
Alors $f$ est à valeurs dans $\mathcal{H}_A$, car si $M \in \mathcal{T}_2(\mathbf{C})$, il vient

$$\operatorname{tr}(Af(M)) = \operatorname{tr}\left(APMP^{-1}\right) = \operatorname{tr}\left(PUP^{-1}PMP^{-1}\right) = \operatorname{tr}(PUMP^{-1}) = \operatorname{tr}(UMPP^{-1}) = \operatorname{tr}(UM) = 0$$

car $M \in \mathcal{T}_2(\mathbf{C}) = \mathcal{H}_U$.

> **Rappel**
> On a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, donc on peut permuter l'ordre des matrices à l'intérieur de la trace.

De plus, $f$ est clairement linéaire. Prouvons que $f$ est injective : on a $f(M) = 0_n \Leftrightarrow PMP^{-1} = 0_n$, ce qui après multiplication à gauche par $P^{-1}$ et à droite par $P$ est équivalent à $M = 0_n$.
Puisque $\mathcal{T}_2(\mathbf{C})$ et $\mathcal{H}_A$ sont deux hyperplans de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, ils ont même dimension, et donc $f$ étant injective, c'est un isomorphisme (et en particulier une bijection).

Soient à présent $M_1, M_2 \in \mathcal{H}_A$. Alors $P^{-1}M_1P$ et $P^{-1}M_2P$, qui sont les antécédents de $M_1$ et $M_2$ par $f$, sont dans $\mathcal{H}_U = \mathcal{T}_2(\mathbf{C})$. Et donc leur produit $P^{-1}M_1PP^{-1}M_2P = P^{-1}M_1M_2P$ est encore[9] dans $\mathcal{T}_2(\mathbf{C})$, de sorte que $M_1M_2 = P(P^{-1}M_1M_2P)P^{-1} \in \mathcal{H}_A$.
Et donc $\mathcal{H}_A$ est stable par produit.
Puisqu'on a facilement $f(MN) = f(M)f(N)$ et $f(I_n) = PI_nP^{-1} = I_n$, $f$ est donc un morphisme d'anneaux.

[9] L'ensemble des matrices triangulaires est stable par produit.

**20.** Soit $Q \in GL_2(\mathbf{C})$. Alors pour tout $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, on a $QMQ^{-1} = N \Leftrightarrow M = Q^{-1}NQ$, si bien que $M \mapsto QMQ^{-1}$ est une bijection de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ sur lui-même.
Et étant linéaire, elle préserve donc la dimension des sous-espaces vectoriels, de sorte que l'image de $\mathcal{T}_2(\mathbf{C})$, c'est-à-dire $\{QMQ^{-1}, M \in \mathcal{T}_2(\mathbf{C})\}$ est de même dimension de $\mathcal{T}_2(\mathbf{C})$, et donc est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$.
Il est stable par produit pour les mêmes raisons qu'à la question précédente.